

# VISUALIZACIÓN DE SÓLIDOS POR SECCIONES TRANSVERSALES USANDO GEOGEBRA

**Nancy Saravia Molina**

**Elizabeth Advíncula Clemente**

nsaraviam@pucp.edu.pe, eadvincula@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

## Resumen

*En este taller nos interesa compartir una experiencia en aula en la que usamos el GeoGebra como una herramienta que favorece la visualización de sólidos formados por secciones transversales, cuya construcción resulta complicada tanto para los estudiantes como para los docentes al trabajar con lápiz y papel en un entorno estático, como es el caso de la pizarra u hojas de papel. Propondremos actividades para que los participantes trabajen con diversas herramientas del GeoGebra y puedan realizar construcciones dinámicas, y a partir de la manipulación e interacción con ellas elaboraren y validen sus conjeturas acerca de las características propias de los sólidos mencionados. Asimismo, nos interesa generar un espacio para discutir sobre las ventajas y desventajas que ofrecen las herramientas del GeoGebra en la visualización de objetos matemáticos y reflexionar sobre su incorporación en nuestras clases.*

**Palabras clave:** Visualización, sólidos, secciones transversales, GeoGebra.

## Introducción

En el curso de cálculo integral cuando trabajamos volúmenes de sólidos, usando el método de secciones transversales, observamos que la visualización de estos sólidos no es fácil para los estudiantes debido a que nos limitamos a representar una figura tridimensional en un plano como es el caso de la pizarra y representamos figuras estáticas que no permiten mostrar fácilmente las características de los mismos. En nuestra búsqueda de herramientas que nos ayuden a visualizar estos sólidos y permita a los estudiantes la comprensión de la generación de los mismos, encontramos recursos tecnológicos que nos ayudan como es el caso del GeoGebra, que es un software libre que nos permite construir sólidos y visualizar sus principales características al manipularlos e interactuar con ellos.

## Enfoque teórico

En la actualidad, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas viene siendo reconocida como una componente importante en la resolución de problemas, así como en la realización de demostraciones (Battista, 2007; Presmeg, 2006, Phillips et al., 2010 y Rivera, 2011).

Según Arcavi (2003, p. 217) "la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la

creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Coincidimos con esta definición pues en los problemas que nos interesa abordar en nuestro taller es muy importante contar con un esquema o representación gráfica que nos permita reconocer las características de los sólidos que se obtienen al seccionarlos usando distintas formas de secciones transversales y cómo estos cambios en las secciones transversales afectan los volúmenes de los sólidos en cuestión.

Desde el punto de vista de Duval (1999), la representación y la visualización son el centro de la comprensión en matemáticas, y por tal, es fundamental analizar en qué medida estos elementos interactúan para producir aprendizaje. Asimismo, señala que el uso de representaciones semióticas es esencial para acceder a los objetos matemáticos; cuya comprensión involucra distinguir un objeto de su representación. Duval (2016) también señala que la conversión requiere el uso interactivo de dos registros de representación semiótica o más, pero para garantizar la comprensión es necesaria la coordinación de representaciones formuladas en diferentes registros.

Por otro lado, consideramos que el *GeoGebra* es un artefacto, que en términos de Rabardel (1995) podría convertirse en un instrumento a través de un proceso de génesis instrumental, el cual permite identificar los esquemas de utilización que construyen y movilizan los sujetos cuando interactúan con el *GeoGebra* al resolver problemas matemáticos, elaborar y verificar conjeturas. En este sentido, el *GeoGebra* facilita la visualización, el descubrimiento y el reconocimiento de propiedades invariantes en los objetos matemáticos involucrados (Madama y Curbelo, 2012) así como la comprensión de las características propias de los sólidos seccionados por distintas secciones transversales debido al dinamismo y flexibilidad que presenta este software para realizar construcciones y modificaciones.

### **Diseño e implementación del taller**

Las actividades propuestas en este taller tienen por objetivo que los docentes de matemática resuelven problemas relacionados con sólidos generados por secciones transversales, reconociendo las propiedades de dichos sólidos a partir de la exploración, manipulación, elaboración y validación de conjeturas, haciendo uso del *GeoGebra*.

Este taller se desarrollará en una sesión de 90 minutos, en un laboratorio de computación donde cada participante desarrollará las actividades propuestas con apoyo del *GeoGebra*. En primer lugar, realizarán un trabajo individual y luego se realizará una discusión grupal para intercambiar estrategias de solución y diversos modos de validación de conjeturas.

En un primer momento, los participantes tendrán 20 minutos para desarrollar la actividad 1, de manera individual, explorando las vistas y herramientas del *GeoGebra* que considere necesarias para realizar las construcciones correspondientes. Luego, tendrán 15 minutos para socializar sus resultados con todo el grupo. En un segundo momento, tendrán 20 minutos para desarrollar en parejas la actividad 2 sobre la construcción de los sólidos por secciones transversales. Luego, cada pareja tendrá 25 minutos para compartir sus resultados a todo el

grupo. En los últimos 10 minutos reflexionaremos sobre las ventajas y desventajas que ofrece el *GeoGebra* respecto a la visualización de sólidos construidos por secciones transversales y cómo esto favorece la resolución de problemas que involucran a dichos sólidos.

A continuación, mostramos las actividades diseñadas para ser trabajadas con los docentes participantes.

### **Actividad 1: Construcción de semicircunferencias que representan funciones**

- a) Construya una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 9 unidades.
- b) Construya el arco superior de la circunferencia y denótelo como  $f$ .
- c) Ubique un punto sobre el arco superior de la circunferencia y denótelo con la letra  $A$ , y deslícelo sobre el arco  $f$ .
- d) Construya el arco inferior de la circunferencia, denótelo como  $g$ .
- e) Ubique un punto sobre el arco inferior de la circunferencia y denótelo con la letra  $B$ , y deslícelo sobre el arco  $g$ .
- f) Construya un segmento perpendicular al eje  $X$  que una los puntos  $A$  y  $B$ , y deslice dicho segmento usando el deslizador y la animación.
- g) Comente lo que observa.
- h) Responda lo siguiente:
  - h1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?
  - h2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?
  - h3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

### **Actividad 2: Construcción de sólidos con base elíptica**

- a) Construya una elipse con ejes mayor y menor de 5 y 4 unidades, respectivamente.
- b) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que son cuadrados con un lado contenido en la base del sólido.
- c) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que triángulos rectángulos isósceles con un cateto contenido en el plano de la base del sólido.
- d) Construya un sólido con secciones transversales perpendiculares al eje mayor de la base elíptica que son semicírculos con su diámetro contenido en la base del sólido.
- e) Comente los cambios que observa en el sólido al variar las secciones transversales.
- f) Responda lo siguiente:
  - f1) ¿Qué hizo para resolver esta actividad?

f2) ¿Qué conceptos matemáticos uso para resolver esta actividad?

f3) ¿Qué capacidades matemáticas podría desarrollar un estudiante a través de esta actividad?

### **Resultados esperados**

Al realizar las actividades propuestas con un grupo de docentes observamos que los participantes en su mayoría lograron realizar las construcciones pedidas, pero al inicio tuvieron dificultades para familiarizarse con las herramientas del *GeoGebra*. Cabe resaltar que algunos docentes evidenciaron dificultades con el objeto matemático sólidos generados por secciones transversales, pero realizar las construcciones les permitió descubrir y validar las propiedades que presentan dichos sólidos. Asimismo, podemos comentar que los docentes lograron trabajar en el registro gráfico tridimensional al construir el sólido y en el registro algebraico al determinar su volumen.

Entre los resultados que esperamos en nuestro taller, tenemos los siguientes:

- Que los profesores conozcan y adquieran una herramienta, como el GeoGebra, que puedan utilizar en sus clases de manera que facilite el aprendizaje de sus estudiantes respecto a los sólidos generados por secciones transversales, pues la visualización geométrica de estos objetos facilita la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados.
- Que los profesores usen de manera adecuada las herramientas deslizador y rastro que nos ofrece el GeoGebra, los cuales forman una pieza fundamental en la construcción y visualización de sólidos. El rastro permite la visualización de la construcción del sólido de manera progresiva y esto facilita la comprensión de dicho objeto.
- Que los profesores manipulen los sólidos construidos ubicándolos en diferentes posiciones del espacio, lo cual favorece la comprensión de estos objetos matemáticos y sus propiedades.

### **Consideraciones finales**

A modo de cierre podemos comentar lo observado en el desarrollo de las actividades propuestas en este taller, con docentes de educación superior.

- Para construir las secciones transversales sobre la base del sólido es necesario que se tenga la idea de cómo construir las secciones en el espacio usando el GeoGebra, para lo cual es necesario dar coordenadas correctas y diferenciar si trabajamos en el plano o en el espacio. Esat fue una dificultad para algunos docentes.
- El software GeoGebra nos facilita la visualización del sólido, pero el conocimiento matemático debe tenerlo claro el docente para poder construir las secciones transversales en una base del sólido dada. Al respecto, las construcciones de algunas secciones transversales resultaron más complejas que otras.
- El GeoGebra es un recurso o herramienta que el docente puede usar para facilitar la

comprensión de conceptos matemáticos que resultan abstractos e incomprensibles para los estudiantes en un primer momento. En este punto podemos resaltar el potencial de las herramientas punto en objeto, arrastre y animación.

Finalmente, este taller está orientado a profesores tanto del nivel secundaria como del superior ya que buscamos contribuir con la enseñanza de las superficies por secciones transversales, incorporando el uso del GeoGebra y reflexionando sobre la potencialidad de las herramientas que ofrece, a fin de promover el desarrollo de habilidades tales como explorar, descubrir, elaborar, refutar y verificar conjeturas, encontrar contraejemplos, comprobar propiedades y realizar generalizaciones.

## Referencias

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval R. y Sáenz-Ludlow A. (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas*, Capítulo 2, pp. 61-94. Colombia.
- Madama, M. & Curbelo, M. (2012). *Visualizar, conjeturar y demostrar utilizando el software GeoGebra*. Acta de la Conferencia Latinoamericana *GeoGebra*, 109-116.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.