Desempeño de estudiantes de magisterio en una tarea de comparación de razones

Gabriela **Valverde** Soto
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
gabriela.valverde@ucr.ac.cr

Resumen

En esta comunicación se presentan los elementos centrales de una investigación que se ha desarrollado en el contexto de la formación inicial de maestros. Este estudio se centró en promover el desarrollo del conocimiento matemático sobre la razón y la proporcionalidad como una forma de sustentar y favorecer el proceso de desarrollo de la competencia matemática. Se siguió la metodología de un experimento de enseñanza. El reporte se centra en describir los conocimientos matemáticos manifestados por los estudiantes de magisterio en la resolución de un problema típico de comparación de razones: *Compartiendo pizza*. Entre las conclusiones se destaca que el problema es propicio para promover la flexibilidad del conocimiento procedimental en el contexto de la formación inicial de maestros de Educación Primaria.

Palabras clave: experimentos de enseñanza, razón, proporcionalidad, formación inicial de maestros

Abstract

This paper presents main components of a research developed at elementary school teacher's education. This study aimed promotes the development of knowledge about ratio and proportionality as a way to sustain the development of the mathematical literacy. The methodological design of this research corresponds to a teaching experiment. The report focuses on describing mathematical knowledge expressed by future teachers in solving a typical problem of comparison of ratios: *Sharing pizza*. Among the findings highlighted that the problem is useful to promote flexibility of procedural knowledge in the context of initial teacher training for elementary education.

Keywords: teaching experiments, ratio, proportionality, elementary teacher training

Introducción

Una de las preocupaciones del formador de docentes de Educación Primaria es el diseño y gestión de ambientes de aprendizaje en los cuales los futuros maestros tengan la oportunidad de desarrollar aquellos conocimientos y competencias necesarias en su desempeño profesional. Conscientes de que una de las actividades que el docente tiene es la tarea de promover la alfabetización matemática de sus estudiantes se planteó como interrogante central del estudio ¿cómo promover el desarrollo del conocimiento matemático y las competencias matemáticas de los futuros maestros de educación primaria?

Se eligió centrar la investigación en los contenidos matemáticos razón y proporcionalidad dado que están implicados en múltiples situaciones del entorno, motivo por el cual ofrecen condiciones propicias para concretar un trabajo de aula que se sustente en el enfoque funcional del conocimiento matemático (Rico & Lupiáñez, 2008) y en consecuencia es posible contar con diversos problemas, contextos y situaciones desde los cuales estimular la competencia matemática.

Con el fin de abordar la pregunta descrita anteriormente se decidió realizar un experimento de enseñanza centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas (Simon, 2000). Este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa a través del desarrollo de un diseño instruccional (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). Una descripción detallada de las acciones realizadas en cada fase del experimento puede encontrarse en Valverde y Castro (2013).

En esta comunicación se presentarán las generalidades relativas al experimento de enseñanza realizado, para esto se utiliza información procedente de la sesión en la que se desarrolla el problema *Compartiendo pizza*, una tarea que se ha utilizado en diversas investigaciones (Ben Chaim, Keret, & Ilany, 2012) con el fin de estudiar si los resolutores de la misma aplican el razonamiento proporcional.

Antecedentes y marco teórico

El razonamiento proporcional comprende una red de conocimientos y relaciones que constituyen una pieza fundamental en el desarrollo cognitivo de los escolares de diferentes niveles educativos, constituye además la base de otros conocimientos centrales en la educación matemática tales como las funciones lineales y se relaciona con otras áreas del currículo escolar dadas las aplicaciones en la química, física, ciencias sociales, entre otras (Lamon, 2007; Vergnaud, 1983). Susan Lamon propone que el razonamiento proporcional significa aportar razones que sustenten afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (a, b, c y d) en un contexto que simultáneamente implica covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos; esto podría consistir en la habilidad de identificar una relación multiplicativa entre dos cantidades así como en la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. Estas son sólo algunas razones por las cuales se ha desarrollado ampliamente la investigación en relación con estos contenidos matemáticos.

En las investigaciones centradas en caracterizar el razonamiento proporcional que aplican los sujetos, se ha recurrido al planteamiento de tareas matemáticas que se diferencian en aspectos tales como el contexto, en la estructura numérica o en los tipos de razones involucradas. Uno de los tipos de tareas que se han utilizado más comúnmente son las denominadas tareas de comparación de razones; en este caso la información numérica de las dos razones está dada de forma completa, bien sea de forma implícita o explícita, sin embargo no es necesario dar una respuesta numérica. Un ejemplo de este tipo es el problema del jumo de naranja de Noelting (1980), no obstante en trabajos posteriores como en el de Tourniaire y Pulos (1985) denominaron a estos, problemas de mezclas.

El razonamiento proporcional es complejo y ayudar a los estudiantes a desarrollarlo no es una tarea fácil para el profesor y el éxito de esto depende en gran medida del conocimiento adecuado del docente en relación con los contenidos y procesos matemáticos relacionados con la razón y la proporcionalidad. Sin embargo, en contraste con la gran cantidad de investigaciones que se han dedicado a estudiar el razonamiento proporcional de los escolares existen pocos estudios que se han interesado por estudiar el mismo tópico en el contexto de la formación de maestros o de profesores de secundaria (Lobato, Orrill, Druken, & Jacobson, 2011).

Al igual que los estudios centrados en otros subconstructos de los números racionales, las investigaciones centradas en el razonamiento proporcional sugieren que muchos profesores de primaria y secundaria en formación inicial y en activo manifiestan una comprensión deficiente de la razón y la proporcionalidad basada en conocimientos procedimentales como el producto cruzado o la regla de tres, de los cuales desconocen la fundamentación (Harel & Behr, 1995; Riley, 2010). Las concepciones erróneas, dificultades y obstáculos relativos al razonamiento proporcional que han sido identificadas en los estudios con niños o adolescentes también han sido expresadas por profesores en activo o en formación inicial (Cramer, Post, & Currier, 1993; Post, Harel, Behr, & Lesh, 1988; Simon & Blume, 1994; Valverde & Castro, 2009).

En cuanto a estudios que buscan promover el desarrollo del conocimiento de futuros docentes en el campo de la razón y la proporción destacan los realizados por Ben-Chaim, Ilany y Keret (2008), Ben-Chaim et al. (2012). Estos investigadores crearon, implementaron y evaluaron el impacto de “auténticas actividades de investigación” que se centran tanto en el contenido matemático común como en el conocimiento didáctico y las actitudes en la formación de docentes de matemáticas de primaria y secundaria. La conclusión del estudio es que la aplicación del modelo, incorporando teoría y práctica, conduce a un cambio dramático positivo en el conocimiento matemático y didáctico de los futuros docentes. Adicionalmente, se dio una mejora en sus actitudes y creencias hacia el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en general, y en la razón y proporción, en particular.

La investigación desarrollada se fundamenta en la noción de competencia matemática (OCDE, 2004); el conocimiento matemático en el contexto de la formación inicial de maestros de educación primaria (Hill, Ball, & Schilling, 2008), y el análisis didáctico (Rico, 2013) como herramienta de planificación que ha permito organizar los conocimientos matemáticos y competencias objeto del experimento de enseñanza.

Metodología

La investigación realizada consiste en un tipo de experimento de enseñanza (dentro del paradigma de los experimentos de diseño) centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. La elección de la metodología indicada ha obligado a abordar la planificación, implementación y análisis de una experiencia de trabajo en un aula de formación de maestros.

El diseño instruccional elaborado está basado en un conjunto de tareas matemáticas que constituyen diferentes tipos de problemas de razón y proporcionalidad. Las situaciones reales que contemplan estas tareas se sitúan en distintos escenarios del entorno cotidiano. El diseño se fundamenta en la perspectiva funcional del conocimiento matemático considerado en el estudio PISA y se concretó en cuatro sesiones de trabajo. En la preparación del experimento realizamos distintas actividades, entre las que destacamos: (a) un análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (Gómez, 2009) de la razón y la proporcionalidad, (b) identificación de objetivos, contenidos y tareas instruccionales, (c) estudio y elección de dinámica de aula, (d) negociación con los profesores de la asignatura, y (e) registro de las decisiones tomadas.

La programación de las sesiones se describió en términos de: objetivos de investigación para la sesión (son concreciones de los dos objetivos generales de la investigación), expectativas de aprendizaje del estudiante (objetivos específicos), contenidos instruccionales y un análisis detallado de las tareas que se complementó con el enunciado de “supuestos” relativos al posible desempeño de los estudiantes en la resolución de las mismas así como de errores potenciales asociados a la tarea.

Particularmente, para la cuarta sesión de trabajo se planteó la necesidad de recoger información que permitiese describir las estrategias que aplican los estudiantes en la comparación de razones e identificar indicadores del razonamiento proporcional en las mismas. Ante esta situación se decidió aplicar el problema “Compartiendo pizza” (Figura 1).

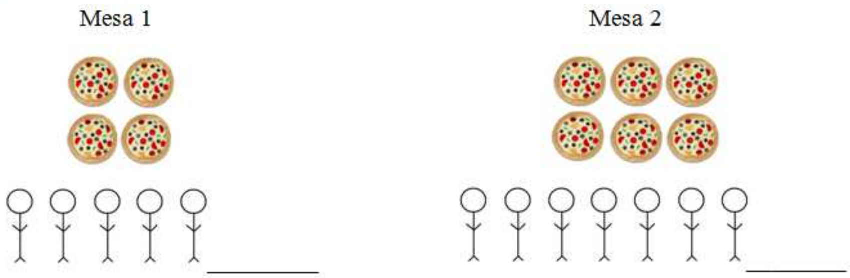
Esta tarea proviene de la investigación de Ben-Chaim et al. (2012). Se debe discernir qué situación ofrece más ventaja para comer pizza si en una mesa hay 5 personas y 4 pizzas o en otra mesa en la que hay 7 personas y 6 pizzas. La tarea requiere que los futuros docentes apliquen alguna estrategia de comparación de razones para poder elegir cuál es la mejor opción, en este caso decidir en cuál de las dos mesas cada persona puede comer más. Las razones que se han de comparar no son ni unitarias ni equivalentes y tienen la cualidad de que los términos se relacionan aditivamente de la misma manera (6-4=2 y 8-6=2)[1]. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la tarea se considera una *exposición*.

Además de la traducción se han realizado dos cambios a la tarea original, uno ha sido el cambio de las razones que se van a comparar, en principio eran 4:10 y 3:8 y se han sustituido por las razones 4:6 y 6:8, este cambio se debe a las posibilidades que cada par ofrece en relación con las estrategias que se podrían utilizar, por ejemplo dividir en tercios y comparar es más sencillo que dividir en quintos, también se busca que la relación aditiva entre las cantidades fuese la misma con el fin de estudiar si después de la tercera sesión los estudiantes seguían incurriendo en razonamientos meramente aditivos. El otro cambio se refiere a la representación gráfica de la situación pues se considera que al colocar las pizzas circulares y debajo las personas, eliminado la mesa, tenedores, platos etc., de la versión original, se puede favorecer alguna estrategia gráfica de reparto o de interpretación de la situación en términos de alguna unidad de referencia elegida por el estudiante.

[1] La cantidad de personas que se representa en cada razón incluye a Daniel.

Compartiendo pizza

Cada mes Daniel y sus amigos se encuentran en un restaurante para cenar pizza. Habitualmente Daniel llega tarde, pero sus amigos lo aprecian mucho y le esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. Daniel llega con mucho apetito y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes y 7 personas.



a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

b. La razón entre las mesas grandes (mesa 2 con 8 sitios) y las mesas pequeñas (mesa 1 con 6 sitios) del restaurante es de 7 a 4. Hay sitio exactamente para 240 personas. Realiza los cálculos necesarios para saber cuántas mesas de cada tipo hay en el restaurante.

Figura 1. Tarea “Compartiendo Pizza”.

La implementación se realizó en condiciones naturales de desarrollo de una asignatura de Didáctica de la Matemática para futuros maestros de la Universidad de Granada, España. Se utilizó una metodología de trabajo en el aula basada en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión, compuesta por cuatro fases: trabajo individual en clase, trabajo colaborativo, puesta en común y reconstrucción individual de la tarea fuera de clase.

En cuanto al análisis de la información obtenida, como es propio en las investigaciones de diseño, se han realizado dos tipos de análisis: análisis continuados durante los diferentes ciclos del proceso de investigación y un análisis final retrospectivo de los datos recogidos en el proceso de investigación. Este último es un análisis cualitativo de corte interpretativo y se focaliza en tres unidades de estudio: gran grupo, pequeños grupos y casos individuales de estudiantes. El objetivo del análisis retrospectivo del gran y pequeño grupo ha sido profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y supuestos sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se ha pretendido aportar “conocimiento” que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria.

Una de las dimensiones de análisis retrospectivo de cada sesión se refiere al conocimiento matemático puesto de manifiesto por los futuros docentes en la resolución de las tareas. En el siguiente apartado se muestran los resultados obtenidos al analizar esta dimensión usando la información recogida en la cuarta sesión y respecto al problema de las pizzas.

Resultados del análisis de la resolución del problema compartiendo pizza

Este apartado recoge las estrategias que aplicaron los estudiantes en la comparación de razones propuesta en la tarea compartiendo pizza. En la Tabla 1 se resumen las estrategias aplicadas por los equipos (E_i) de los dos grupos de participantes (G1 y G2). Después de la tabla se detallan y dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 1

Actuaciones manifestadas en la comparación de razones

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
CoR1	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*
CoR2								*						*		*
CoR3						*										
CoR4			*													
CoR5	*			*												

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
CoR1	*	*	*	*	*	*	*	*	*
CoR2		*	*	*	*		*		
CoR3						*		*	*
CoR5							*	*	*
CoR6					*				

Estrategias

CoR1: División de las dos cantidades
CoR2: División de pizzas en número fijo de porciones
CoR3: Procedimientos de comparación de fracciones
CoR4: Resolución gráfica
CoR5: Reinterpretación de la situación en términos de una razón (Normalización)
CoR6: Suposición de equivalencia de razones

CoR1. División de las dos cantidades

En el G1, quince de los 16 equipos y en el G2 todos los equipos aplicaron la división de las cantidades como procedimiento para comparar las razones, siendo éste el acercamiento más frecuente en la resolución de la tarea. La búsqueda del valor racional de las razones facilita la visualización de la situación más conveniente, en consecuencia la comparación de razones se transforma en una situación de comparación de números decimales. Esta aproximación evidencia una ausencia absoluta del razonamiento proporcional, pues no se considera ninguna idea de compensación relativa ni tampoco se reconoce la razón como un elemento que permite abordar la situación.

Como ejemplo de este procedimiento se muestra un fragmento del trabajo del equipo E19 del G1:

> *B4: …, yo hecho la división de 4 entre 6 y me salía cero con sesenta y seis aquí (0,66)…*
>
> *A13: a cero coma sesenta y seis trozos de pizzas toca a cada uno ¿no?*

> *B4: sí, y aquí me salía, haciendo lo mismo ¿no? eh… seis entre ocho…, ocho entre seis me salía cero setenta y cinco*

Como se observa en el fragmento anterior, la interpretación del cociente (cantidad intensiva) no es del todo adecuada pues lo que se obtiene es cantidad de pizza/persona sin embargo los estudiantes concluyen que tal cantidad son “trozos” o en otros casos hablan de porciones. Esto denota una ausencia de comprensión de la cantidad intensiva, es decir, los estudiantes muestran una dificultad para interpretar lo que esta cantidad abstracta representa en la realidad. Por otro lado, la consideración de cantidad de pizzas o de personas ya sea como dividendo o como divisor provoca la presencia de un error relativo a la interpretación del cociente, lo detallaremos en el apartado referente a los errores en la comparación de razones.

CoR2. División de pizzas en número fijo de porciones

La división de las pizzas en un número fijo de porciones, suma de todas las porciones y reparto equitativo de las mismas entre la cantidad de personas resultó ser una resolución manifestada en tres equipos del G1 (E11, E17 y E20) y en cinco equipos del G2 (E2, E3, E4, E5 y E10).

Este procedimiento, al igual que el anterior, no es evidencia de un buen razonamiento proporcional dado que no hay evidencia de que se reconozcan las relaciones multiplicativas escalares o funcionales que vinculan las cantidades de la situación (Lamon, 2007). Como ejemplo se muestra un fragmento del trabajo del equipo E10 del G2.

> *A4: yo la forma en que lo hecho, mira como era más difícil dividir 4 pizzas enteras entre 5 ó 6 (B3: 6), acá pone 6, yo hecho la pizza en trozos, la hecho en 8 trozos la pizza entonces he multiplicado 8 por 4 (B3: 32), sí, sí 32 dividido entre 6 y tocaban a 5 y algo, sí 5 y un cuarto de trozos (B3: pero ahí ya es complicado para ellos), sí pero lo otro me salía um… aquí sí me salía exacto, me salía 5 trozos para cada uno, en la mesa 2…*

CoR3. Procedimientos de comparación de fracciones

Entre las posibles maneras que pueden aplicarse para comparar dos fracciones se observa que, los estudiantes del equipo E6 del G1 y de los equipos E7, E11 y E12 del G2, utilizan básicamente las ideas de fracciones equivalentes y homogenización de fracciones, de modo que al igualar los denominadores la comparación se reduce a determinar la relación de orden entre los numeradores. Se reconoce en el desempeño de los estudiantes el uso del lenguaje de las fracciones y la mención explícita de los procedimientos de búsqueda de fracciones equivalentes o de homogenización de fracciones. Este acercamiento se ejemplifica con un segmento del trabajo del equipo E7 del G2. Después de este fragmento se presenta en la Figura 2 la resolución expuesta por este equipo en la producción escrita.

> *F3: y otra estrategia también es esto es cuatro sextos y esto es seis octavos, ¿no?, si simplificamos nos daba aquí que eran dos tercios y aquí simplificando también aquí entre dos, sería tres cuartos entonces sacamos factor común de eso que es 12 ¿no?, entonces 12 entre 3 (C3: 4)…, y aquí daba 9, 9 doceavos de una pizza, comen más que…*

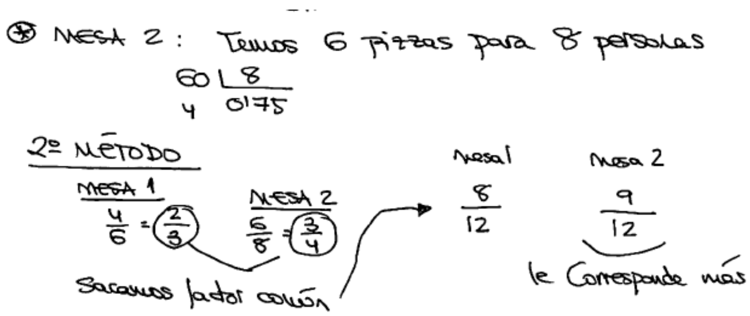


Figura 2. Procedimiento CoR3 manifestado en el equipo E7 del G2.

CoR4. Resolución gráfica

Solamente en el equipo E3 del G1 se manifestó una resolución gráfica. Sin embargo, se observa que el estudiante ha resuelto el ejercicio según la estrategia que hemos descrito anteriormente y codificado como CoR2 pero la ha razonado y representado haciendo uso de los dibujos de la tarea. A continuación se muestra un fragmento de la intervención del estudiante A2 en la que explica al equipo lo que ha realizado, posteriormente en la Figura 3 se presenta el trabajo escrito.

> *A2: no sé… es que después yo lo hecho de otra manera, sabes lo que te digo, yo lo he partido y he visto que donde tenía que comer era aquí, pero así lo he visto en dibujo no sacando… ya cuando lo he visto pues lo hecho, yo con el dibujo he dividido todas las pizzas en 4 y agrupaba 4…*
>
> *B2: vamos a ponerlo…, uno gráficamente*
>
> *A2: claro el primero lo hacemos de manera gráfica con los dibujos y en el segundo ya lo desarrollamos con los números…*

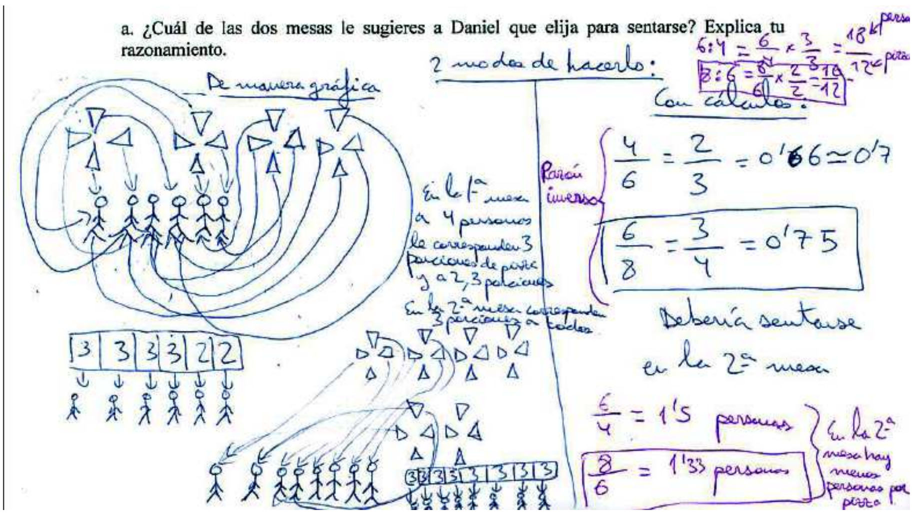


Figura 3. Resolución del ejercicio (a) manifestada en el equipo E3 del G1.

CoR5. Reinterpretación de la situación en términos de una razón (Normalización)

Se ha observado la estrategia de la normalización en los equipos E1 y E4 del G1 y E10, E11 y E12 del G2. Esta consiste en la elección de una razón del tipo *"a pizzas"*: *"b personas"* o *"b personas*: *a pizzas"* mediante la cual reinterpretan la situación expuesta, llegan a dos razones con antecedentes o consecuentes iguales y logran determinar la mesa más conveniente para sentarse a comer. No obstante, según Lamon (2007), la normalización no es un buen indicador del razonamiento proporcional ya que los estudiantes que la usan fallan en reconocer toda la relación estructural de una proporción.

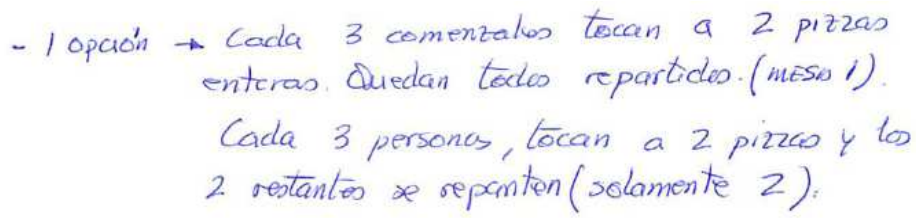
Se ejemplifica con un fragmento del trabajo del equipo E11 del G2 en el cual el estudiante manifiesta que ha usado la razón unitaria ½ pizza: 1 persona, posteriormente tras el reparto inicial llega a las razones 1:6 y 2:8 cuya comparación es más sencilla, pues 2:8 es equivalente a 1:4.

> *B13: bueno yo lo hecho de otra forma, he propuesto el reparto de la mesa 1 como son 6 personas y hay 4 pizzas, he cogido 3 personas que es la mitad de las personas le he repartido media pizza a cada uno de los integrantes de la mesa y queda 1 pizza para repartir entre los seis, sin embargo en la mesa 2 he hecho el mismo procedimiento como hay 8 personas y hay 6 pizzas he cogido 4 y he repartido media a cada uno, y sobran 2 pa repartir entre los 8, entonces vemos que la proporción es mayor*
>
> *A13: uno, uno a seis y dos a ocho…*

Se presenta otro ejemplo, ahora del equipo E10 del G2 con el fin de ilustrar el razonamiento expuesto al elegir la razón no unitaria 3 personas: 2 pizzas.

> *D3: claro, yo también he llegado a que la mesa 2 comen más, yo aquí (he)hecho 3 personas tocan a 2 pizzas entonces aquí si pongo a Daniel 3 tocan a 2 pizzas ¿no?, aquí 3 personas tocan a 2 ¿no?, y hay 3, 6, 7 y si ponemos a Daniel, 8, o sea que a 3 personas tocan a 2 pizzas, otras 3 tocan a 2 pizzas, y otras 2 pizzas para 2 y por eso ahí tocan a más…*

En la Figura 4 se presenta la estrategia CoR5 expuesta en la producción escrita del equipo E10 del G2.



- 1 opción → Cada 3 comensales tocan a 2 pizzas enteras. Quedan todos repartidos. (mesa 1).
Cada 3 personas, tocan a 2 pizzas y los 2 restantes se reparten (solamente 2).

Figura 4. Estrategia CoR5 manifestada en el equipo E10 del G2

CoR6. Suposición de equivalencia de razones

Tal estrategia consiste en relacionar dos de las cantidades y a partir de esa razón suponer, de manera simulada, que las otras cantidades se relacionan bajo la misma razón; luego proceder como en una regla de tres, y comparar el resultado obtenido con las cantidades dadas originalmente (Valverde & Castro, 2009). Como ejemplo de esta estrategia se muestra un fragmento del trabajo del equipo E5 del G2 que ha sido el único en el que se ha manifestado su uso, aunque se infiere que no lo hacen de una manera suficientemente evidente.

> *C5: yo lo (que he) hecho es una regla de tres, he puesto 4 pizzas a 5 personas, si en la mesa 2 hay 6 pizzas, a cuántas personas daría, entonces me daba que la mesa 2 había más…*

Cabe destacar que considerando la información procedente de la resolución de la tarea de las pizzas, se ha detectado que en la mayor parte de los equipos del G1, excepto en tres de ellos (E9, E16 y E20), y en todos los equipos del G2, los estudiantes participaron en algún tipo de intercambio productivo de ideas, a saber: momentos en los cuales dos o más integrantes intervienen para elaborar una respuesta, algún miembro corrige una idea errónea o inadecuada aportada por otro compañero o momentos en los que se evidencian distintos puntos de vista en relación con la resolución de algún ejercicio.

Conclusiones

En relación con las fortalezas de la tarea destacamos que ha resultado eficaz para fortalecer la flexibilidad del conocimiento procedimental de los estudiantes en la tarea de comparar razones; Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009) definen este constructo como la habilidad de emplear múltiples métodos de resolución para abordar problemas así como elegir estratégicamente cuál método es más eficaz, por ejemplo cuál método reduce las demandas de cálculo. En este sentido, se ha observado que de 16 equipos del G1 solamente E3, E4, E6 y E17 manifestaron al menos dos resoluciones diferentes, no obstante destacamos que es posible que la cantidad de equipos con este tipo de actuación fuera mayor si se les hubiese pedido desde la primera fase que utilizaran más de un método de resolución. Esta pauta se les dio en el G2, en el mismo observamos que en 6 de 9 equipos mostraron más de una forma de abordar la comparación de razones. En resumen, consideramos que para utilizar la tarea "*Compartiendo Pizza*" en el ámbito de la formación de maestros y con el objetivo de promover y/o estudiar el razonamiento proporcional es preciso añadir al enunciado la indicación de mostrar al menos dos formas diferentes de resolución.

En la misma línea se concluye que la tarea por sí misma, sin la gestión adecuada, no permite conocer cualitativamente actuaciones en las que se evidencien indicadores del razonamiento proporcional como la detección y uso de relaciones escalares o aplicación de estrategias de compensación de razones. La tarea ha sido aplicada con éxito en estudios como el de Lamon (1996) donde los niños participantes no tenían un conocimiento procedimental como el de los futuros maestros participantes de este estudio, los niños exhibieron distintas estrategias de comparación de razones en las cuales la división de números naturales no tuvo protagonismo.

Consideramos que es posible que la inclusión de razones que mantengan alguna de las relaciones entera (escalar o funcional), podría favorecer el uso de estrategias de comparación de razones distintas de la división.

La inclusión de razones que presentaran la misma relación aditiva entre los elementos de cada una (antecedente y consecuente), permitió conocer si los estudiantes basaban sus decisiones en un razonamiento absoluto (aditivo) o si de lo contrario usaban el razonamiento multiplicativo para establecer la comparación.

De acuerdo con las actuaciones mostradas en ambos grupos en la resolución de la tarea, se afirma que no hay evidencia de que el carácter abierto de la misma les ocasionara dificultades para expresar los resultados, a diferencia de otras tareas del experimento de enseñanza en las que se ha requerido una argumentación verbal, ésta ha precisado de conocimientos de tipo procedimental por lo que los estudiantes no han tenido dificultad en la comunicación de los resultados o procesos de resolución.

Referencias y bibliografía

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (Pre- an In-Service Mathematics Teachers of elementary and middle school classes)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ben-Chaim, D., Ilany, B., & Keret, Y. (2008). "Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Bolema-Rio Claro, 21*(31), 125-159.

Berk, D., Taber, S., Carrino, C., & Poetzl, C. (2009). Developing Prospective Elementary Teachers' Flexibility in the Domain of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. En D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: MacMillan Publishing.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel (Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia).

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 471-498.

Harel, G., & Behr, M. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *3*, 31-51.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children´s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte: NCTM, Information Age Publishing.

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., & Jacobson, E. (2011, April). *Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA. Recuperado de http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/products/workshops/AERA2011/Lobato_Orrill_Druken_Erikson_AERA_2011.pdf

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2. Problem-structure at successive stages. Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 331-363.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Post, T., Harel, C., Behr, M. & Lesh, R. (1988). Intermediate teachers` knowledge of rational numbers concepts. En E. Fennema, T. Carpenter, & S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 194-217). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Rico, L. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, M. Molina & J. L. Lupiñanez (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Riley, K. R. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A., & Blume, G. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *13*, 183-197.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Valverde, G., & Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII Simposio de la SEIEM* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

Valverde, G., & Castro, E. (2013). Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria: Síntesis de una investigación. En A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM, XVI Simposio de la SEIEM Baeza*. Disponible en https://dl.dropboxusercontent.com/u/104572257/Grupos/GruposBaeza.pdf

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.