XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

La Comprensión en Matemáticas del Profesor de Educación Básica en México. El Concepto de Razón de Cambio

Miguel **Díaz** Chávez
Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México
Universidad Pedagógica Nacional Unidad 151
México
mdiaz3010@gmail.com

Resumen

Reportamos los hallazgos de una experiencia diseñada con dos propósitos: el primero, identificar el nivel de comprensión que tiene el profesor de educación básica acerca del concepto de razón de cambio y segundo, intervenir en ese proceso de comprensión. Aquí damos cuenta del primero. La experiencia la desarrollamos en el contexto de un programa de actualización aplicando un cuestionario que contenía dos tareas: la descripción del concepto y la resolución de problemas no rutinarios. El análisis de las descripciones de los profesores nos descubrió el deficiente nivel de comprensión que estos alcanzan; el cual contrasta con el nivel de comprensión instrumental que muestran en las representaciones y, las relaciones que establecen entre éstas. El estudio nos revela que entre la comprensión instrumental y relacional existen niveles intermedios de comprensión del concepto de razón de cambio.

Palabras clave: Comprensión en matemáticas, profesor de educación básica, razón de cambio

Introducción

La comprensión de los conceptos desde hace tiempo se ha enfatizado, con mucha razón, en la educación matemática; ya que, si bien es cierto que el alumno debe desarrollar habilidades y destrezas en el uso de reglas y técnicas, no es suficiente; se requiere además de la comprensión de las mismas. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) por ejemplo, señala en sus *Principles and Standards for School Mathematics* como principio de enseñanza que: Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente sus nuevos conocimientos a partir de sus experiencias y sus aprendizajes previos. Esto está íntimamente relacionado con el principio de enseñanza: Para que la enseñanza sea efectiva los profesores deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que a ellos les toca enseñar y ser capaces de recurrir a este conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. Tener frecuentes y amplias oportunidades y fuentes para mejorar y actualizar su comprensión. Conocer los distintos significados de los conceptos y distintas representaciones de los mismos.

La Organization for Economic Cooperation and Development (OECD, 2002) por su parte, en el *Programme for International Student Assesment* (PISA) al respecto enuncia que: la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes saben y necesitan aprender y, entonces exigirles y apoyarlos para aprenderlo bien. Entonces, el aprendizaje con comprensión resulta incuestionable, sin embargo, conseguirlo depende de la enseñanza, del ambiente y de actores que la promuevan, en estos últimos se encuentra el profesor.

La buena comprensión del estudiante depende de una buena comprensión de los conceptos por parte del profesor, ya que ésta le permite al docente diseñar situaciones didácticas que la promuevan; ante su ausencia seguirá reproduciendo lo memorizado y mecanizado; acción que muy probablemente provoca en los alumnos sentimientos negativos hacia la matemática, como: la fobia y la frustración, atribuidos según Boas (1981), correcta o incorrectamente, a sus profesores.

Nosotros, desde hace más de una década nos hemos interesado por la exploración y desarrollo del proceso de comprensión del profesor de matemáticas en México, particularmente de los conceptos de cálculo (Díaz, 1992). En una de nuestras investigaciones recientes (Díaz & Rivera, 2012), dirigida a indagar la comprensión de los profesores de cálculo de bachillerato acerca de los significados e interpretaciones de la derivada, les solicitamos hallar la derivada de una función definida por pedazos, ver Figura 1:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0\le x\le 1 \\ -\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 & 1<x\le \frac{13}{6} \\ 2x-\frac{7}{3} & \frac{13}{6}<x\le 4 \end{cases}$$

Figura 1. Función definida por pedazos.

El análisis de las trayectorias de solución de los profesores nos permitió descubrir que algunos aplicaban las reglas de derivación mecánicamente a cada una de las expresiones que integraban la función, como se puede mirar en la Figura 2.

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \quad \boxed{f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$f(x)=-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+3 \quad \boxed{f'(x)=-2\left(x-\frac{7}{6}\right)}$$

$$f(x)=2x-\frac{7}{3} \quad \boxed{f'(x)=2}$$

Figura 2. Aplicación mecánica de las técnicas de derivación.

Otros profesores, ver Figura 3, recordando algunos conceptos de cálculo de manera encapsulada, aisladas, establecían relaciones y conclusiones no coherentes

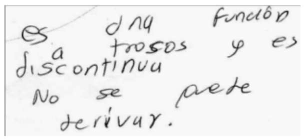


Figura 3. Conceptos encapsulados.

Otros más, haciendo uso de los registros gráficos llegaron, como se muestra en la Figura 4, en base a su percepción visual, a conclusiones falsas

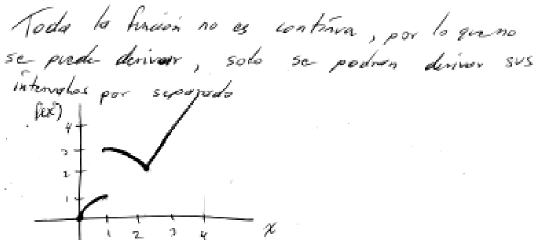


Figura 4. Conclusiones falsas.

Estos hechos nos revelaron el estado de encapsulación y comprensión en que se encuentran los significados e interpretaciones de la derivada en el profesor que investigamos, lo cual evidentemente tiene relación con el proceso de comprensión que construyen en sus estudiantes.

La derivada es un concepto de gran riqueza por su aplicación en una amplia gama de fenómenos relacionados con el cambio, este último inicia su construcción formal la educación básica y se extiende en todo el currículum, hasta el universitario (Lamon, 2007). Esto es evidente en conceptos como: número racional, razón, proporción, fracción, entre otros.

Dada la importancia que tiene el concepto de razón de cambio, la genética de su construcción en la educación básica, así como el bajo desempeño obtenido por los estudiantes mexicanos en distintas evaluaciones nacionales e internacionales en relación a matemáticas (Tabla 1); consideramos pertinente explorar y documentar el nivel de comprensión del concepto mencionado en el profesor de educación básica; quien por cierto vale la pena subrayar, no cuenta con una formación en la disciplina.

Tabla 1
Resultados de México en la Prueba PISA del 2000 a 2012

AÑO DE APLICACIÓN		**2000**	**2003**	**2006**	**2009**	**2012**
Media obtenida por México en Matemáticas		387	385	406	419	413
Media de los países de la OCDE en Matemáticas		500	496	498	496	494
Por niveles de desempeño de los estudiantes	Debajo del nivel 1 al primer nivel		66%	56%	51%	55%
	Niveles 2 y 3		31%	38%	44%	41%
	Niveles 4 a 6		3%	5%	5%	4%

Fuente: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2004, 2007, 2010, 2013)

Revisando la literatura encontramos algunas investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio, más no del profesor mencionado. Así, la mayoría explora la cognición de los estudiantes (Lamon, 2007; Singh, 2000; Teuscher & Reys, 2010), otras discuten los significados y la construcción de propuestas (Behr, Guershon, Post & Lesh, 1992) y solo un artículo da cuenta de la exploración de la razón de cambio en los profesores, pero en el nivel superior (Ellis, 2007).

Marco teórico: Comprensión y sus niveles

El interés por estudiar la comprensión en matemáticas ha sido compartida por diversos sectores de la comunidad científica desde mediados del siglo pasado, investigadores como: Brownell (1947), Skemp (1976), Hiebert and Carpenter (1992), Sierpinska (1994), así como Carpenter and Lehrer (1999) se han dedicado a esa tarea.

En relación a la exploración de la comprensión de la razón de cambio consideramos en principio la clasificación dual que hace el profesor Skemp (1976): comprensión instrumental y comprensión relacional; así como el papel de las representaciones y las relaciones que establecen entre las mismas los sujetos como indicadores para determinar el tipo y nivel de la comprensión, enfatizado por Hiebert and Carpenter (1992). De estos últimos tomamos en cuenta cuatro elementos para analizar las representaciones y evaluar la comprensión: Los errores de los sujetos. Las conexiones realizadas entre los símbolos, los procedimientos simbólicos y los referentes correspondientes. Las conexiones entre los procedimientos simbólicos y las situaciones de solución en problemas informales y, las conexiones realizadas entre diferentes sistemas simbólicos. Estos han sido resaltadas en escritos afines al tema (Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2007).

Metodología

La investigación la realizamos en el contexto de un taller de actualización de profesores sobre el eje: sentido numérico y pensamiento algebraico, con una duración de veinte horas. El taller tuvo lugar en cuatro regiones del Estado de México, con la participación total de 36 profesores de preescolar, 79 de primaria y 36 de secundaria. Para la investigación consideramos el perfil de cada profesor (Tabla 2), considerando el año de nacimiento, género, experiencia, licenciatura, número de cursos tomados sobre la enseñanza de la matemática en los dos años anteriores y, el grado máximo de estudios. Así por ejemplo: 77**F**13 Preescolar0M , identifica a una profesora de treinta y siete años de edad, con trece años de experiencia, no ha tomado cursos en los últimos dos años y cuenta con estudios de maestría.

Tabla 2
Perfil de los participantes en la Región Sur del Estado de México (Tejupilco)

Preescolar	Primaria	Secundaria
	69F22 Admn. Esc0	69M18Primaria1
77F13 Preescolar0M	60M25 No contestó0M	79M15Primaria0
J77M12Primaria0M	86M03 Sec. TV0	70M19Primaria1M
74F18 Primaria0	77M13 Primaria1	78F15 Preescolar0
74F16Preescolar0	86F03Preescolar0	85M0 Matemáticaeduc1
76F17 Preescolar0	72M20 Primaria0	73M20Primaria0
68F23 Preescolar0M	68M20Primaria0	78F12Primaria0
81M09 Primaria0M	59F38Normal0	75M19C.Naturales0M
74F16 Preescolar0M	77M14 Primaria0	73M17Primaria0M
	77F13 Primaria0M	70M19Preescolar0M
	73F16 Preescolar0	
	76M12 No contestó0	

Para explorar la comprensión diseñamos un taller y un cuestionario dividido en dos secciones. En la primera solicitamos datos relacionados con su perfil profesional. En esta misma sección se pidió a los profesores describir, varios conceptos, entre ellos el de razón de cambio. La segunda sección del cuestionario consistió de dos problemas, uno de los cuales es una adaptación del incluido en el examen PISA (2000) que titulamos: “Manzanos y coníferas”, éste es:

Un agricultor siembra árboles de manzanas. Para proteger el huerto del viento, siembra coníferas, utilizando un modelo como el que muestra el dibujo.

X=conífera; ●= manzana

X X X X ● X X X X	X X X X X X ● ● X X X X ● ● X X X X X X	X X X X X X X X ● ● ● X X X X ● ● ● X X X X ● ● ● X X X X X X X X	X X X X X X X X X X ● ● ● ● X X X X ● ● ● ● X X X X ● ● ● ● X X X X ● ● ● ● X X X X X X X X X X

a) ¿En algún momento el número de coníferas es igual al número de árboles de manzana? Escribe tus argumentos.
b) Supóngase que este agricultor quiere hacer más grande el huerto con más filas de árboles. ¿Qué aumentará más rápidamente, el número de árboles de manzana o el de coníferas? Argumenta tu respuesta.
c) ¿Cuántos árboles de coníferas se requerirán para rodear *k* árboles de manzana? Escribe tus argumentos.

El problema en su versión original plantea tres preguntas semejantes a las nuestras con los puntajes que van de 570 hasta 750, respectivamente (OECD, 2002), que señalan el grado de dificultad. Para su solución se requiere de una buena comprensión del concepto de función, particularmente de la función lineal y la cuadrática, de la comprensión de la variación y, de la razón de cambio asociada a la primera derivada.

Discusión de los resultados

En lo que sigue mostramos lo más significativo de nuestros descubrimientos obtenidos sobre el nivel de comprensión de los profesores, consecuencia del análisis que realizamos de sus respuestas. El análisis lo hacemos primero considerando las descripciones y luego las trayectorias de solución al problema de manzanos y coníferas.

Lo que comunican sobre el concepto. Las descripciones.

Resultado del análisis de las descripciones de los profesores participantes, encontramos que en general convergen a un significado del concepto muy distante del matemático, lo cual en términos de lo que comunican exhibe un nivel de comprensión casi nulo; por ejemplo, las descripciones de los profesores de preescolar son del este estilo de la Figura 5:

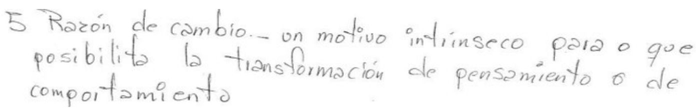
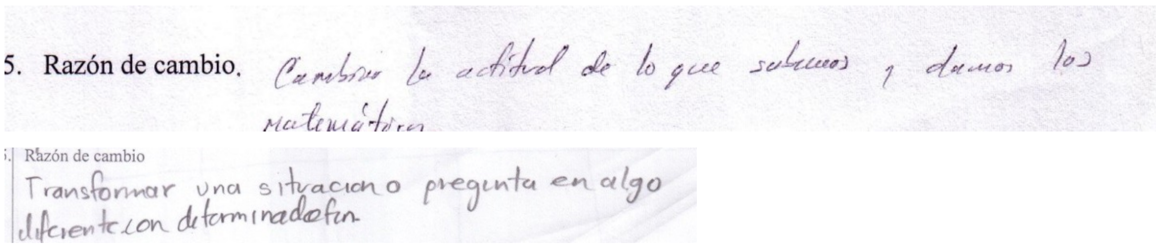


Figura 5. Descripción de una profesora de preescolar.

Descripciones como la anterior asocian a la *razón de cambio* el significado de la valoración psicológica o social; sin embargo es preciso reflexionar acerca del contacto que estos profesores tienen con el concepto en el proceso de construcción del pensamiento matemático en preescolar, donde al menos, el concepto de cambio está presente, no se puede soslayar su presencia en conceptos fundamentales como el de sucesión, seriación, los cuales convergen a la construcción del concepto de número. Las descripciones además, revelan, por un lado, que estos profesores no son conscientes de la relación que guarda el concepto de cambio con el pensamiento matemático y, por otro lado, que estos conceptos: *razón* y *cambio*, aún encapsulados, son conceptos que los niños, en edad preescolar conocen, comprenden y utilizan en una amplia gama de sus actividades.

El nivel de comprensión no varían mucho en el caso de los profesores que laboran en la escuela primaria, es muy semejante al que exhiben los profesores de preescolar, basta mirar la Figura 6, donde están las descripciones dadas por **68M20primaria0** y **77M20primaria.**


5. Razón de cambio. Cambiar la actitud de lo que sabemos y damos los matemáticas

Razón de cambio
Transformar una situacion o pregunta en algo diferente con determinado fin

Figura 6. Descripción de profesores de educación primaria.

Otros como **59F38 Normal0** solo atinan a comenzar un enunciado, ver Figura 7.


Razón de cambio: Para

Figura 7. Descripción de una profesora experimentada.

Incluso algunos profesores como: **69F22admonesc0**, de los de mayor edad y experiencia, probablemente por temor a exhibirse prefirieron no escribir nada.

Este nivel de comprensión también choca con el hecho de que a este profesor le corresponde comenzar la construcción formal del concepto de razón de cambio en el pensamiento del estudiante; ya que, como lo hemos mencionado, temas relacionados con este concepto como las fracciones y su significado como razón, se encuentran precisamente en los primeros años de la educación primaria en México como se puede ver en los programas de matemáticas que rigen este nivel educativo (SEP, 2012).

El nivel de comprensión casi no se modifica en los profesores de educación secundaria, la excepción son los profesores: **73M20Primaria0** y **85M0 Matemáticaeduc1**. El primero describe la razón de cambio como se muestra en la Figura 8:

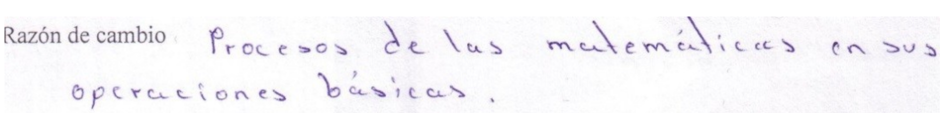
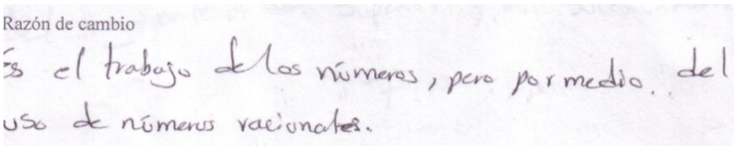

Razón de cambio Procesos de las matemáticas en sus operaciones básicas.

Figura 8. Descripción de un profesor de secundaria

En esta se percibe primero ya una elaboración en el contexto de las matemáticas y, además con el concepto de razón, el cual sin embargo, sigue estando en un bajo nivel de comprensión del concepto dado que no muestran relaciones entre conceptos y, mucho menos, una apropiación del mismo.

La descripción del segundo, Figura 9, es un poco menos alejada que las anteriores, pero, a pesar de que en esta última se encuentran algunos elementos como: número y números racionales, que se relacionan con el concepto de razón de cambio, no dejan de ser ideas encapsuladas, inconexas y sin significado coherente.


Razón de cambio

Es el trabajo de los números, pero por medio del uso de números racionales.

Figura 9. Descripción de un profesor de secundaria.

En resumen: Todas las descripciones, incluyendo la última dejan de lado la relación entre razón y cambio y, en el mejor de los casos exhiben una encapsulación de términos relacionados con el primero. Por esta razón podemos afirmar que, a nivel de comunicación, estos profesores poseen un nivel casi nulo del concepto.

Los niveles de comprensión del concepto en las trayectorias de solución del problema.

El bajo nivel de comprensión mostrado en las descripciones por la generalidad de los profesores participantes, contrasta sorprendentemente con el nivel de comprensión, implícita o explícita y, probablemente inconsciente, presente en las trayectorias de solución diseñadas para el problema de "manzanos y coníferas". El análisis de éstas, considerando la clasificación del profesor Skemp (1976) y las ideas de Hiebert and Carpenter (1992) nos permitió descubrir que en todas está presente la idea de cambio y en la mayoría su comprensión se encuentra en un nivel instrumental, pocos son los profesores cuya comprensión se encuentran en la ruta de un nivel relacional. Por ejemplo en el caso de los profesores de preescolar, la mayoría manifiesta una clara tendencia a utilizar como recurso inicial el uso de la representación de formas y figuras (Figura 10), lo cual es evidente en los dibujos adicionales que hacen con la intencionalidad de descubrir su comportamiento y, apoyándose de la percepción visual intentan responder a las preguntas.

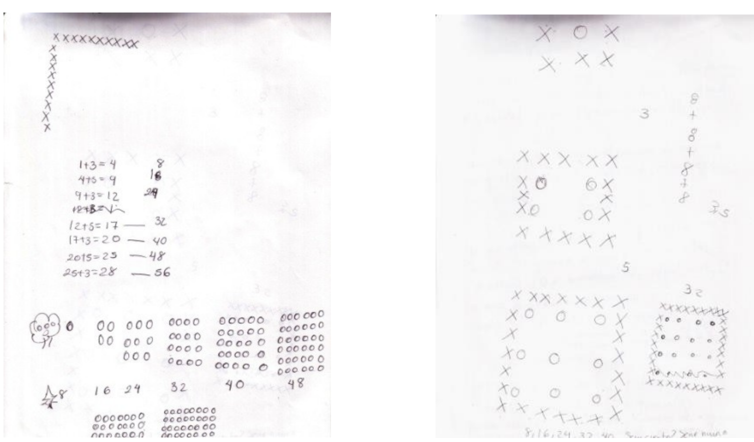


Figura 10. Nivel de comprensión instrumental pictórico.

Otros profesores transitan al registro aritmético, representando las variables con dibujos y asociando sus correspondientes cantidades con números. Esto les permite identificar y comprender, hasta cierto punto, el cambio que experimentan los valores de las variables, pero no la razón con la que cambian. Todo lo anterior es evidente en la Figura 11.

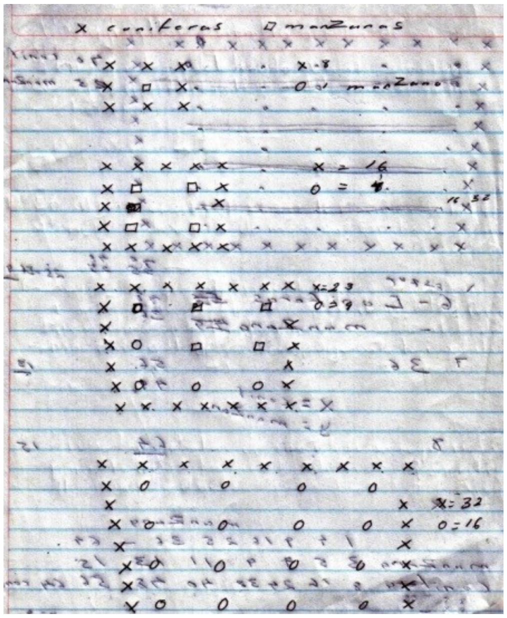


Figura 11. Nivel de comprensión instrumental pictórico-aritmético.

Vale la pena señalar que este es el nivel elemental de la comprensión de la razón de cambio que descubrimos, y se caracteriza por ir de la percepción a la aritmetización; éste, a pesar de su estatus les permitió descubrir, posteriormente, la relación: dibujo-adición de impares-cuadrado de un número, como se puede ver en la Figura 12.

El análisis de las trayectorias nos permitió descubrir que otros profesores tanto de preescolar como de educación primaria, ante lo complicado de continuar dibujando el modelo, se ven obligados a hacer uso de otros registros aritméticos de la situación. Estos profesores además de utilizar la representación pictórica hicieron una gran cantidad de cálculos y los concentraron en tablas, en este caso horizontal, como se puede ver en la misma figura 12. En esta Figura además, son evidentes las correcciones que va realizando en sus cálculos, lo cual probablemente fue consecuencia del descubrimiento del patrón de cambio. En este caso se pueden identificar las relaciones que establece, de manera simbólica, entre varias variables: el número de filas, el número de manzanos, el número de coníferas, los números impares que va sumando obteniendo los cuadrados de los números enteros. Al final las preguntas que plantea sobre el número de coníferas que corresponde, para cantidades grandes de manzanos resultan curiosas, ya que muestran que, a pesar de que ha hecho muchos cálculos, no ha sido suficiente para comprender el comportamiento de la sucesión de las cantidades; aun con este hecho, creemos que muestra un nivel superior de comprensión del concepto, el cual sin embargo no deja de ser instrumental.

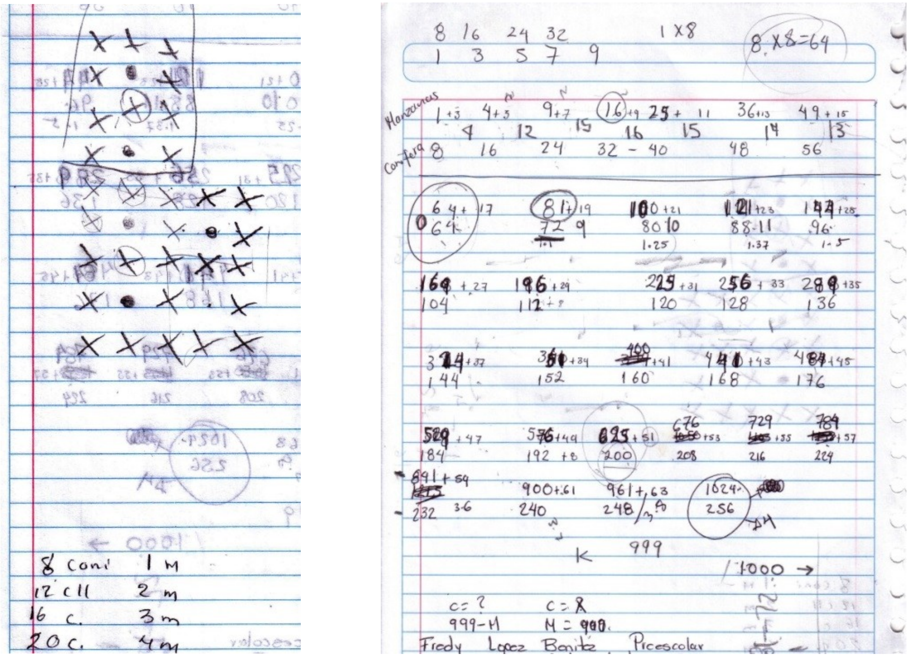


Figura 12. Nivel de comprensión instrumental aritmético del concepto.

En la Figura 13 se puede mirar un nivel más avanzado de la comprensión atendiendo a los cuatro rubros sugeridos por Hiebert y Carpenter (1992). En esta trayectoria se puede percibir la identificación de las variables, las cuales representan con las imágenes presentes en los dibujos, ● para los manzanos y **X** para las coníferas. Una vez hecho esto a cada esquema, le asocian otra variable a la cantidad de manzanos y coníferas correspondiente hasta llegar al séptimo.

En el último dibujo podemos ver la estrategia que siguen para contar los manzanos, un conteo siguiendo esta forma ⅃, una especie de letra “ele” invertida, que, como ya mencionamos, permite obtener la cantidad de puntos y corresponde a la suma de los números impares; relación que sin embargo no pueden descubrir. Esta manera de contar les posibilita construir una tabla horizontal con cantidades de manzanos y coníferas, pero sin ninguna relación entre ellas. No obstante construyen representaciones algebraicas y funcionales entre estas variables, aunque con una deficiente sintaxis, ya que denotan con el mismo símbolo, **X**, las cantidades de coníferas y manzanos: $8n$ y n^2 respectivamente.

Una nueva tabla construyen considerando tres variables: figura (*f*), manzanos (*M*) y Coníferas (*C*). En esta no corresponde a la relación funcional entre f y M descrita en el párrafo anterior, pero si corresponde a esta relación: los valores en la columna *M* corresponden a la última “ele” del dibujo, que, de acuerdo al número de figura, corresponde a la fórmula: $4n+1$, para $n \geq 0$.

A lo anterior añade la representación gráfica de la relación entre las variables coníferas y manzanos, esta representación si bien es cierto es novedosa entre todas las trayectorias de solución, no se potencializa hacia la comprensión de la razón de cambio debido a las variables que hace intervenir. Cierto, existe una variación directamente proporcional, pero no entre manzanos y coníferas, sino entre el número de figura y la cantidad de manzanos; es decir, una relación de la forma: $x = 8n$ como lo ha escrito.

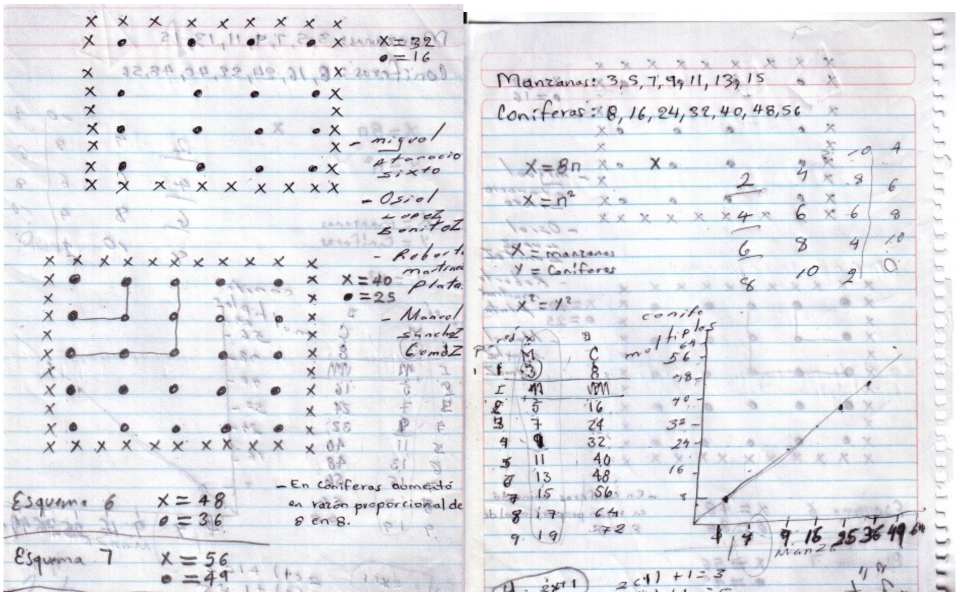


Figura 13. Nivel de comprensión instrumental aritmético-algebraico

En esta trayectoria descubren la razón de cambio de la variable conífera, lo cual comunican en los siguientes términos, ver Figura 14:

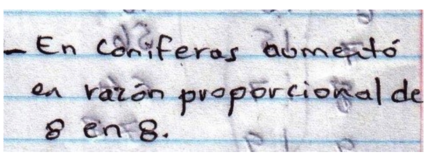
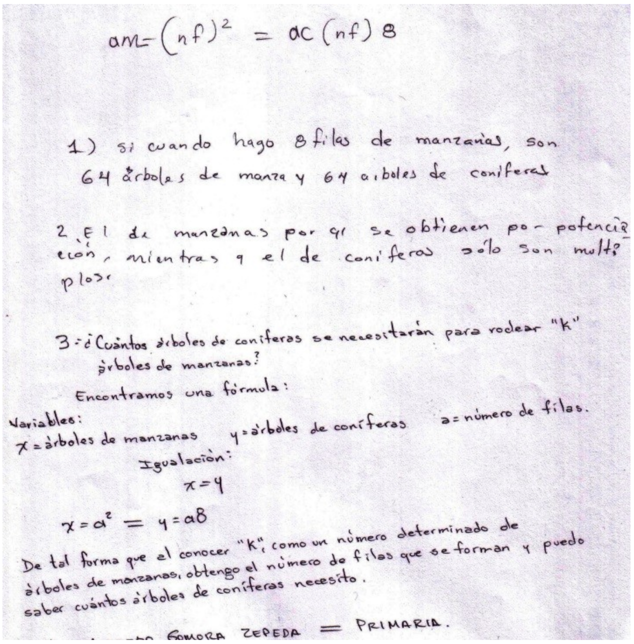


Figura 14. Comprensión de la razón de cambio en el problema de coníferas.

Finalmente, en la Figura 15 mostramos una trayectoria en la que se aprecia, al nivel del profesor de educación básica un nivel de comprensión superior a las anteriores, aunque no deja de ser instrumental. En ésta se puede mirar, además de lo que se observó en los casos anteriores, cómo el nivel de comprensión ha evolucionado de lo instrumental hacia lo relacional. Ahí se observa el tránsito de la aritmética al algebra con una sintaxis aceptable: De los arreglos numéricos a la traducción a las expresiones algebraicas y con ello arribar a generalizaciones importantes. A esto se suma su capacidad de comunicar en palabras y símbolos aquellas ideas que muestran lo que comprende; sin embargo no podemos, aún en este caso afirmar que estos profesores están en un estadio de comprensión relacional, lo que si podemos afirmar es que están en la trayectoria que los puede conducir con menos dificultades a ello.



$am = (nf)^2 = ac(nf)8$

1) si cuando hago 8 filas de manzanas, son 64 árboles de manza y 64 aiboles de coniferas

2. El de manzanas por q se obtienen por potenciación, mientras q el de coniferas sólo son multiplos.

3: ¿Cuántos árboles de coniferas se necesitarán para rodear "k" árboles de manzanas?

Encontramos una fórmula:

Variables:

x = árboles de manzanas y = árboles de coníferas a = número de filas.

Igualación:

$x = y$

$x = a^2 = y = a8$

De tal forma que al conocer "K", como un número determinado de árboles de manzanas, obtengo el número de filas que se forman y puedo saber cuántos árboles de coníferas necesito.

GOMORA ZEPEDA = PRIMARIA.

Figura 15. Hacia un nivel de comprensión relacional.

Conclusiones

El análisis de las descripciones de los profesores descubre el bajo nivel de comprensión que tienen en general del concepto de razón de cambio, esto contrasta de manera sorprendente con el manejo que, en la resolución del problema, generan y utilizan de algunas de sus representaciones: pictóricas, aritméticas, gráficas y algebraicas (fórmulas y funciones). Este manejo, en la mayoría de los casos es encapsulado, por lo cual podemos decir que predomina la comprensión al nivel instrumental; sin embargo, esta experiencia nos ha permitido identificar al menos tres niveles de comprensión que se encuentran entre este nivel y el relacional, que hemos denominado provisionalmente: pictórico, pictórico-aritmético y aritmético-algebraico. La investigación además, aunque no es cuantitativa, nos permite afirmar que los casos estudiados reflejan el nivel de comprensión que posiblemente predomina en los profesores del nivel básico en México sobre el concepto de razón de cambio y, muy probablemente en muchos de los conceptos que el profesor debe de construir con el estudiante, lo cual es una tarea pendiente que permitirá diseñar proyectos de intervención orientados a la promoción de la comprensión en matemáticas del profesor de este nivel educativo en México sobre los mismos.

Referencias y bibliografía

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. & Suggate, J. (2007). How can We Assess Mathematical Understanding? En J.H. Woo, H. C. Lew, K.S. Park, & D.Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 41-48), Seoul, Korea.

Behr, M., Guershon, H., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. En D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: Macmillan Publishing Co.

Boas, R. (1981). Can We Make Mathematics Intelligible? *The American Mathematical Monthly*, *88*(10), 727-731.

Brownell, W. A. (1947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*, *47*(5), 256-265.

Carpenter, T. & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. In E. Fennema, & T. Romberg, (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Díaz, M. (1992). *El Curso de Cálculo en la Cultura del Profesor de Matemáticas* (Tesis de Maestría). Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

Díaz, M. & Rivera, A. (2012). Understanding of the Derivative and its Meanings. the Case of Calculus Professors. En *Proceedings of The 12th International Congress on Mathematical Education - ICME 12* (pp. 2862-2870), Seoul, Korea.

Ellis, E. (2007). *Modelling Teachers' ways of Thinking about Rate of Change* (Doctoral Thesis). Arizona State University. USA.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, USA: Macmillan Publishing Co.

Lamon, S. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning*. NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: National Council of Teachers of Mathematics.

OECD. (2002). *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment: Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. Paris, France: Organisation for Economic Co-operation and Development.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2012). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Segundo grado*. México

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London: Falmer Press.

Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students. *Educational Studies in Mathematics. 43*(3), 271-292.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Teuscher, D. & Reys, R. (2010). Slope, Rate of Change and Steepness: Do Students Understand these Concepts? *Mathematics Teacher, 103*(7), 519-524.