

A fração na dialética entre medida e número racional: a atividade na formação conceitual

Marisa da Silva **Dias**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

marisadias@fc.unesp.br

Resumo

O artigo focaliza a imagem conceitual no seu processo formativo, nos principais nexos conceituais que compreendem a fração no contexto da medida e do campo racional. A pesquisa-ação orientou a coleta e a organização dos dados. Os sujeitos, professores de matemática, participaram de uma atividade orientadora de ensino de matemática em que o movimento de apropriação e objetivação na atividade foi analisado na relação entre singular-particular-universal no pensamento numérico, sob o referencial do materialismo histórico e dialético. Os resultados indicaram a dialética entre pensamentos empírico e teórico e a mudança qualitativa da fração em diferentes agregados possibilitando a análise dos nexos conceituais da formação da imagem conceitual. As imagens revelaram-se sob a forma da identificação da fração com o resultado ou processo de medição e com o número racional, como também a qualidade do número racional em conjunto denso.

Palavras-chave: imagem conceitual, fração, pensamento teórico, atividade, dialética, formação de professores.

Introdução

A partir da formação da imagem conceitual desenvolvida em Dias (2007), o presente artigo propõe uma análise da dialética do pensamento (Kopnin, 1978) em uma atividade orientadora de ensino (Moura, 1996). O enfoque é no desenvolvimento do pensamento numérico, nos principais nexos conceituais que compreendem a transição da medida para o campo racional em processo de ensino e aprendizagem escolar. Essa análise refere-se a uma pesquisa realizada junto a um grupo de oitenta professores de matemática do ensino fundamental e médio, em um curso de formação contínua, com cento e vinte horas, oferecido pela Secretaria do Estado de São Paulo (Brasil).

Os procedimentos metodológicos da investigação tiveram por base características da pesquisa-ação, principalmente, a resolução de problemas, a tomada de consciência e a produção de conhecimento (Thiollent, 2003). O problema configurou-se na formação e desenvolvimento de imagens conceituais (Tall & Vinner, 1981) relacionadas à fração. A tomada de consciência durante as interações dos sujeitos no processo de desenvolvimento de uma situação-problema foi analisada sob aspectos da teoria da atividade (Leontiev, 1983) e do pensamento empírico e teórico (Davídyov, 1988). Já a produção de conhecimento para si caracterizou-se na relação entre a imagem conceitual e o movimento lógico-histórico do conhecimento (Kopnin, 1978).

A fração é tema de muitas pesquisas que envolvem processos de ensino e aprendizagem (Amorim, 2007; Behr, Lesh & Silver, 1983; Catalani, 2002; Demartini, 2009; Malaspina, 2007;

Romanatto, 1999; Silva, 2005), principalmente, devido a diversidade de dificuldades apresentadas por estudantes, desde o segundo ciclo do ensino fundamental (entre 8 e 9 anos de idade) até o ensino médio (por volta dos 17 anos), sendo que algumas destas se estendem além dessa faixa escolar. Os principais estudos relacionam-se à formação do conceito, como a identificação de significações em determinados contextos como medida; quociente; razão; operador multiplicativo e probabilidade, e às operações com a representação fracionária. Tais estudos diferem do enfoque tratado neste texto.

O objetivo da investigação consiste no estudo do movimento de apropriação e objetivação constituinte das imagens conceituais dos sujeitos na inter-relação indivíduo-coletividade. A situação desencadeadora apresentada em uma atividade orientadora de ensino possibilitou, por meio de discussões sobre fração, a análise do pensamento numérico, sob o referencial do materialismo histórico e dialético (Cheptulin, 1982; Kopnin, 1978; Rosental & Straks, 1960).

A formação da imagem conceitual

A noção de imagem conceitual foi iniciada por Tall e Vinner, (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991) como sendo a associação na mente que o indivíduo realiza com certo conceito científico ou não. Essa associação, constituída na estrutura cognitiva, contém representações mentais como: imagens de representações visuais; impressões; experiências e propriedades as quais podem ser elaboradas pelo indivíduo, por intermédio de processos de pensamento sobre suas representações mentais (Tall & Vinner, 1981). Os autores concluíram que os estudantes, diante de uma tarefa cognitiva, envolvendo conceitos matemáticos, utilizam as imagens conceituais em vez de definições matemáticas e, esse processo tem como consequência a dificuldade de aprendizagem da matemática, principalmente, no nível superior de ensino.

Tall e Vinner analisaram as imagens conceituais evocadas em determinado momento. Dias (2007), argumentando a necessidade de compreendê-las, não somente em um momento, mas no seu processo formativo, como contributo aos processos de ensino e aprendizagem da matemática, fundamenta seu trabalho na teoria da atividade (Leontiev, 1983). Essa teoria, no desenvolvimento do psiquismo, tem como pressuposto que a passagem à humanidade difere o ser humano dos outros animais, pois se submete às leis do desenvolvimento sociohistórico, ou seja, para o processo de humanização, é necessário que o homem se aproprie da cultura, produto do desenvolvimento histórico humano. Essa apropriação consiste em um processo mental ativo, por meio do qual o ser humano reproduz, na mente, os traços essenciais da atividade de produção e desenvolvimento dessa cultura. Nesse processo, o indivíduo desenvolve as faculdades especificamente humanas, as funções psicológicas superiores.

Para o estudo do desenvolvimento dos conceitos pelo indivíduo pressupõe-se a análise de sua atividade externa nas condições sociais e circunstâncias objetivas nas quais estão os elementos formadores da consciência, da atividade interna. Com isso, a análise da atividade externa do indivíduo cria um campo de possibilidades de investigação no desenvolvimento das imagens conceituais.

No movimento dialético, não idêntico, entre a atividade interna e externa realizada pelo indivíduo estão presentes a apropriação e a objetivação. A apropriação está ligada ao movimento de apreensão dos objetos ou fenômenos, nas relações intrapsíquicas, a qual é dependente da objetivação, isto é, do movimento de externalização do pensamento, na produção de significados. Sendo assim, para analisar a imagem conceitual no seu processo formativo, faz-se necessário

analisar as expressões dos sujeitos não isoladamente, mas compreendidas na atividade cuja estrutura relaciona necessidade, motivo, ações e operações dirigidas ao objeto.

Na pesquisa, durante o curso de formação contínua de professores, buscou-se analisar a atividade na relação indivíduo-coletividade dirigida para a solução de uma situação-problema, envolvendo número racional.

A formação da imagem conceitual e a dialética no pensamento

A análise das imagens conceituais foi realizada na correlação singular-particular-universal, no método materialista dialético, ao considerar a atividade do indivíduo particular inserida na singularidade, que caracteriza o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Este, por sua vez, reflete a atividade humana, universal, de apropriação e objetivação como constituinte do indivíduo, ou seja, da constituição da individualidade para si (Duarte, 1993).

O objetivo de apreender o movimento das imagens conceituais dos sujeitos encontra-se na particularidade, na medida em que o particular, nesse método, é a mediação entre o singular e o universal das formas de pensamento, enquanto reflexo do mundo objetivo, ou seja, compreender “... como a singularidade se constrói na universalidade e ao mesmo tempo e do mesmo modo, como a universalidade se concretiza na singularidade tendo a particularidade como mediação” (Oliveira, 2001, p. 16). Para compreender o movimento do pensamento na formação da imagem conceitual foram analisadas as expressões manifestadas nas relações interpessoais dos sujeitos mediadas pelo objeto de conhecimento. O foco deste estudo não está em analisar como se criam e se desenvolvem os conhecimentos no sentido universal, mas no sentido para si, no movimento de apropriação. Não se afirma que são independentes, pois o movimento do conhecimento é realizado pelo indivíduo no seu processo sociohistórico. A apropriação é criação e elaboração do conceito para si, em que estão presentes a dialética na formação de singularidades do conceito desenvolvido pelas gerações.

Se, por um lado, a lógica dialética orienta o pensamento, por outro, o liberta no processo criativo, não a liberdade pela liberdade, mas a liberdade que permite a criação de novos conceitos, “essa é a função das categorias da dialética materialista” (Kopnin, 1978, p. 30), por meio das quais buscou-se compreender a formação da imagem conceitual de número racional. A lógica dialética do pensamento é mais ampla que a lógica formal. Enquanto a lógica formal se interessa pela própria forma linguística de expressão de uma ideia, como, por exemplo, de uma definição matemática, a lógica dialética estuda, especialmente, o conteúdo mental expresso na forma linguística, na relação desse conteúdo com a realidade objetiva, no processo de pensamento, ou seja, no processo de aquisição do conhecimento.

A elaboração de uma proposta didática, considerando elementos constitutivos do objeto matemático, na relação singular-universal, mediada pela particularidade da atividade dos sujeitos, orienta-se pela categoria lógico-histórica como forma de pensamento no desenvolvimento do conhecimento. O histórico constitui o conteúdo do pensamento, enquanto que o lógico, reflexo desse conteúdo, reproduz “a essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações” (Kopnin, 1978, p. 183). Além disso, o movimento lógico-histórico implica a libertação das casualidades históricas, mas não da história enquanto movimento lógico do conceito em que se evidencia a criação e desenvolvimento deste, destacando seus nexos.

Ainda, nesse método, para extrair a essência do objeto estudado, é necessário colocar em evidência a passagem de um estágio de seu desenvolvimento a outro, obtido pela unidade e a luta dos contrários (Cheptulin, 1982). O contrário na construção do conhecimento impulsiona o pensamento quando da negação do estágio atual de certo conhecimento ou conceito. A negação, na lógica dialética distingue-se da negação não-dialética pelo “fato de que a primeira desempenha o papel de elo de ligação entre o inferior e o superior [...] não é uma simples destruição desse ou daquele determinismo qualitativo” (Cheptulin, 1982, p. 315). Logo, ao negar um conhecimento não significa eliminá-lo, mas criar possibilidades para superá-lo, incorporando-o como participante do processo histórico de formação no pensamento. Negar essa negação, ou seja a negação da negação, consiste no movimento de superação em que a luta dos contrários unifica-se formando novo conceito, ou mesmo, elevando o nível de complexidade do conceito por incorporação de novas dimensões, em decorrência do processo de análise e síntese.

No que se refere ao processo de formação das imagens conceituais de número racional, questiona-se como se dá o movimento dialético que compõe o pensamento numérico em que a negação vincula-se a mudanças qualitativas na constituição do objeto matemático.

A dialética entre o pensamento empírico e o pensamento teórico

Ao pensar a função da escola como propiciadora de apropriação da cultura humana e, principalmente, do conhecimento científico, faz-se necessário diferenciar o pensamento empírico do teórico. Enquanto o pensamento empírico, gerador do conceito empírico, origina-se por comparação, classificação, catalogação de objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise e síntese em um sistema de relações (Davídov, 1988). O pensamento empírico e o teórico são níveis do movimento dialético no pensamento. A essência da diferenciação está no modo em que se obtém o conteúdo do conhecimento. Por exemplo, saber a definição de número racional não significa que o indivíduo se apropriou do conceito teórico de número racional, pois depende do modo em que internalizou tal conhecimento. Se for por memorização de uma definição, caracteriza-se um modo empírico de conhecer, constituindo um conceito empírico.

A diferença de conteúdo entre os pensamentos empírico e teórico reflete na diferença das respectivas formas. A forma empírica caracteriza-se pela descrição de observações sensoriais, enquanto que a forma teórica reúne “os dessemelhantes, os diferentes, os multifacetados, não coincidentes” (Davídov, 1988, p. 131). Quando as transformações do objeto se referem as suas mudanças externas, tem-se, ainda, uma forma empírica do conhecimento. Quando o conhecimento de uma transformação responde o porquê ocorre, sobre que base e devido a quê possibilidade se converte no quê é e não em outra coisa, tem-se o pensamento teórico, gerador de conceitos teóricos.

Na matemática, os conceitos são essencialmente teóricos, mas a apropriação destes, sobretudo pelo ensino escolar, não é, necessariamente, de sua forma teórica. Não se deve confundir a forma teórica com a formalização da matemática, visto que esta última está ligada à organização de seus objetos na sua forma mais sintética, e não, à explicitação do surgimento e desenvolvimento de seus conceitos na atividade humana. A forma teórica apresenta a multilateralidade da constituição dos conceitos matemáticos em que a formalização é somente uma parte. Saber realizar operações aritméticas, demonstrar teoremas, resolver equações pode significar conhecer a técnica que se relaciona com o pensamento empírico e não,

necessariamente, conhecer os conceitos de número, de aritmética, de álgebra, etc. inerentes à constituição do objeto matemático que se está mobilizando por meio da linguagem.

A compreensão de que as instituições de ensino são organizações socialmente constituídas com o dever de promover o pensamento teórico, relacionado ao conhecimento científico desenvolvido pela humanidade, e não somente o pensamento empírico, motivou o desenvolvimento da atividade orientadora de ensino, qual seja, do desenvolvimento do pensamento teórico de número racional.

Atividade orientadora de ensino e a matemática como conteúdo escolar

A atividade orientadora de ensino (Moura, 1996, 2001), como mediadora para organização didática com a finalidade de desenvolver o pensamento teórico, permitiu, na pesquisa, a manifestação e o desenvolvimento das imagens conceituais de seus sujeitos, professores de Ensino Básico do Estado de São Paulo (Brasil).

Na sua estrutura, a atividade orientadora de ensino inclui a elaboração de uma situação desencadeadora de aprendizagem e um plano de ações, os quais buscam promover à coletividade a dialética de análise e síntese no pensamento. Tal atividade orienta-se pela intencionalidade daquele que elabora e organiza a situação desencadeadora e o plano de ações. Nas relações interpessoais, os resultados são produzidos pela coletividade, na inter-relação entre os motivos individuais que orientam a singularidade da produção de conhecimento. Nas condições reais, na totalidade das relações com os instrumentos – materiais e teóricos – e com as pessoas, as ações se objetivam, caracterizando o conteúdo da atividade e evidenciando o campo de possibilidades de desenvolvimento das imagens conceituais nas relações inter e intrapsíquicas.

A situação-problema, parte da situação desencadeadora de aprendizagem, foi composta de três questões com a intencionalidade de promover a manifestação de imagens conceituais dos sujeitos, permitindo a confrontação entre os pensamentos empírico e teórico relacionados ao número racional. Comumente, a abordagem de número racional no sistema de ensino ora está relacionada a experimentos de partição para explicar a fração, ora ao conjunto numérico. A associação entre fração e número racional no sistema de ensino, sem discussão sobre as limitações experimentais, pode ser um dos motivos pelo qual se crie a concepção de campo racional como discreto (Dias, 2002).

O plano de ações da atividade orientadora de ensino teve como meta a organização da discussão do conceito de número racional na transição das relações imediatas do número no contexto da medida para outro sistema de relações, o conjuntivo. A hipótese foi a de que o movimento do pensamento, e, portanto, das imagens conceituais de número racional, potencializasse o desenvolvimento do pensamento teórico do conceito de número.

A discussão dessa transição para o professor de matemática teve como pressuposto que a matemática escolar não se caracteriza somente a aspectos práticos – empíricos –, nem aos aspectos estritamente teóricos, mas nessa dialética, constituinte da cultura matemática, que permeia a evolução do conhecimento na qual estão presentes ambos os aspectos.

Número racional: formação da imagem conceitual na dialética do pensamento

Antes de se formular a proposta com três questões mencionada, os professores haviam discutido uma situação-problema nomeada *Laboratório de Medida* a qual se constituiu na medição de grandezas de objetos sem a utilização de mensuradores de aferição convencionais como régua, balança, termômetro, etc. Para a solução da situação os sujeitos criaram

instrumentos e realizaram as medições. Após discussões sobre a relação entre grandeza, processo de medição e o resultado de uma medida apresentou-se lhes as seguintes questões:

1. No que a proposta Laboratório de Medida se relaciona com o conceito de número?
2. Qual a qualidade dos números 1, 2 e $5/4$ considerando o contexto de medida? E considerando o campo racional?
3. Um alfaiate mediu a altura de um freguês que resultou em 1 metro e 67 centímetros. É possível que o próximo freguês tenha como altura um número racional imediatamente seguinte ao do primeiro freguês? Por quê? (Lima; Moisés, 1998) (Dias, 2007, p. 110)

Essas questões relacionam os conceitos de medida e número racional, com o objetivo de apreender o movimento das imagens conceituais manifestadas que envolvem a fração.

A qualidade mencionada na questão 2 tem o sentido de “conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado” (Carça, 1989, p. 98). O agregado é definido pelas próprias relações entre os elementos e não é estático, fixo; por esse motivo existem mudanças na qualidade, chamadas também de saltos qualitativos. O salto não significa que uma qualidade anterior foi substituída por outra, mas agregada a esta, na qual se manifesta – no sentido da existência de uma relação – quando necessária. Com isso, há uma qualidade da fração no agregado da medida e outra no conjuntivo, compondo a unidade dos contrários. É nessa dialética proveniente do percurso lógico-histórico do número que a situação-problema se inseriu.

As três questões que contemplam a situação desencadeadora proposta caracterizam uma relação entre o particular e o singular na construção do conhecimento. Na primeira questão, a particularidade está na qualidade numérica no agregado da medida e, nesse fenômeno, o modo singular de representatividade da quantificação de grandezas. A segunda apresenta alguns números particulares nos quais se questiona a função em cada sistema de relações, em cada agregado (contexto da medida e contexto conjuntivo), com o propósito de evidenciar a mudança de qualidade do número. A terceira questão foi elaborada no contexto da medida em uma situação particular com uma indagação que o contrapõe, ou seja, que remete ao agregado conjuntivo do número.

Os resultados das manifestações dos sujeitos (Dias, 2007) foram organizados em três nexos conceituais característicos de imagem conceitual de número racional na relação entre medida e conjunto numérico: identificação do número racional com o resultado ou processo de uma medição, identificação da fração com o número racional e qualidade da fração em conjunto numérico denso.

Identificação do número racional com o resultado ou processo de uma medição

A identificação do número racional com o resultado ou processo de medição foi caracterizada com base nas respostas provenientes, principalmente, das duas primeiras questões. O processo refere-se ao movimento quantitativo que compreende a quantidade de vezes que se repete a mesma ação, ou seja, a comparação da unidade de medida com a grandeza a ser medida, como também de sua subunidade. A fração foi gerada pela síntese da quantidade de vezes que *cabe* uma subunidade na grandeza medida e a quantidade de subdivisões desta unidade, que indica dois movimentos de contagem, representados por números inteiros.

Outro processo de pensamento desse nexos conceitual foi caracterizado pela associação da unidade de medida que os sujeitos haviam criado para diferentes grandezas na proposta anterior, do Laboratório de Medidas, com a unidade numérica, o número um. Assim como para medida foi observado o significado da unidade, foi analisado o significado do número um para compor o sistema de números inteiros, associado à contagem e ao conceito de sucessor.

Observou-se uma retomada no pensamento do processo de comparação na captação da variação quantitativa de grandezas discretas e contínuas, gerando números inteiros e fracionários. Se, por um lado, no campo numérico, tenha prevalecido o pensamento empírico, por outro, o processo de análise e síntese das grandezas (discretas, contínuas, mensuráveis, não mensuráveis, formas de captação quantitativa) mostrou um movimento do pensamento teórico em relação à medição.

Identificação da fração com o número racional

A identificação da fração com o número racional procedeu-se da representação fracionária proveniente da relação entre a subdivisão da unidade de medida e 'a necessidade dos números racionais', em virtude da insuficiência dos números inteiros. Essa expressão é representativa de uma justificativa do aparecimento dos números racionais no processo de ensino (Dias, 2007). Nesse sentido, o número racional vinculou-se à identidade da fração por meio da representação, da aparência, uma fração de inteiros, caracterizando um conceito empírico do número racional gerado por um pensamento empírico.

O fracionamento da unidade, a fração, está na gênese do número racional e, portanto, no movimento do pensamento teórico de número, mas não o caracteriza, pois, no conjunto dos números racionais, a qualidade numérica é outra, dada pelas relações definidas no conjunto.

A qualidade da fração em conjunto numérico denso

A densidade no conjunto dos números racionais manifestou-se por meio da terceira questão. Esse reconhecimento não foi imediato, tanto que uma das respostas dos sujeitos apontou 1,68 como sucessor de 1,67, no campo racional, a qual é indicativa de imagem conceitual de um campo discreto. Tal resposta já fora considerada na formulação de hipóteses de respostas quando da elaboração da questão mencionada, as quais tem por base a análise de resultados de pesquisas relacionadas aos conjuntos numéricos densos (Albadejo, 1997; Dias, 2002; Iglioni & Silva, 2001; Margolinas, 1988; Robinet, 1986; Santos, 1995). Esses resultados ocorrem tanto na representações decimal como na fracionária (Dias, 2002). A partir da resposta dada observou-se que o conceito empírico prevaleceu sobre o conceito teórico em relação aos números, por vezes, proveniente de práticas educacionais voltadas a experimentos com materiais didáticos concretos (Dias & Moura, 2006).

No que se diz respeito à atividade orientadora de ensino, ressalta-se que houve a intencionalidade de explicitação das imagens conceituais sobre densidade, por meio das respostas, para que o aspecto mediatório dessa atividade pudesse avaliar e realizar intervenções caso fossem necessárias. Esse é um dos papéis dessa atividade, pois, ao se basear em hipóteses na elaboração ou escolha de uma situação desencadeadora, não tem o controle assertivo das ações e sim a objetivação das imagens conceituais. Com isso, propicia-se a possibilidade de orientar discussões e procedimentos.

O encaminhamento das ações para a diferenciação entre as condições objetivas relacionadas à medição com uma fita métrica e o campo teórico conjuntivo dos números

racionais favoreceu o desenvolvimento do pensamento teórico, composto da necessidade da reunião do diverso (nos dois agregados), da mudança qualitativa da fração.

A afirmação da impossibilidade de existência de sucessor de 1,67 no campo racional foi derivada da síntese gerada pela argumentação da possibilidade de sempre existir um número racional entre dois racionais distintos, proveniente, por exemplo, do cálculo da média aritmética entre eles. Tais números gerados nem sempre se encontram em medidas concretas. Com isso, também a relação entre a medida na situação proposta e a comensurabilidade puderam ser discutidas entre os sujeitos. O movimento dialético do pensamento, e conseqüentemente das imagens conceituais, entre o particular (medida com instrumentos) e o singular (ser mensurável) foi caracterizado ao analisar a medição tomando como referência a densidade dos números racionais.

A síntese do coletivo compôs a lógica dialética dos conceitos entre densidade e sucessor em conjunto numérico. Enquanto o conceito de sucessor está na essência do campo dos inteiros, a densidade está no campo racional. Essência esta entendida não como estática e única, mas na sua forma multifacetada.

O conhecimento do objeto não termina com a reprodução da essência na consciência. Ele vai ainda mais longe: por um lado, da essência ao fenômeno (as propriedades e as ligações contingentes exteriores explicam-se a partir dos aspectos e das ligações interiores), por outro lado, da essência da ordem primeira à essência da ordem segunda e assim sucessivamente até o infinito (à medida que descobrimos novas propriedades e ligações necessárias do objeto, são produzidas a elucidação teórica de sua essência e a elaboração de um sistema de conceitos por seu reflexo, que é sempre mais preciso e completo). (Cheptulin, 1982, p. 128).

Na dinâmica do conhecimento e nas imagens conceituais não poderia ser diferente, a essência não é única, pois, no movimento do pensamento, outras ligações acontecem que permitem ampliar o conhecimento.

Dias (2007) defende a necessidade da apropriação que considere o lógico-histórico do conceito para alcançar outros níveis do pensamento teórico. Continuar a desenvolver o campo numérico dos racionais na relação ensino-aprendizagem significa realizar também uma atividade orientadora de ensino fundamentada na fração de inteiros como quociente. Por exemplo, dialogando a partir dos aspectos históricos, como nos aponta Dantzig (1970), ao dizer que foi Diofanto “o primeiro matemático grego a reconhecer francamente as frações como números” (p. 81), no ano 300 d.C., e ao tratamento relacionado às proporções dado em *Os Elementos* de Euclides (Costa, 1929). Acrescentando, ainda nesse diálogo, uma análise da necessidade da chamada aritmetização da Matemática.

Considerações finais

A mediação da atividade orientadora de ensino possibilitou analisar os nexos conceituais no movimento do pensamento numérico na transição do número inteiro para o racional. Considerou-se que a formação da imagem conceitual de fração revelou-se na análise do movimento dialético dos nexos conceituais: número e quantidade, conjuntos discreto e denso, grandezas discreta e contínua, contagem e medida, unidade de medida e seu fracionamento, fração de inteiros e número racional.

Com o número inteiro foi possível, aos sujeitos, estabelecerem as contagens presentes na comparação de unidade e subunidade de duas quantidades da mesma grandeza, organizando-as na forma de fração. A nova forma de organizar números inteiros, na fração, gerou sua identificação com o número racional, uma vez que já era conhecido dos sujeitos. Porém, a prevalência da aparência sobre a essência da fração no campo racional indicou um pensamento baseado somente na lógica formal que esconde a dialética entre aparência e essência. A transição no movimento do pensamento numérico, do nível empírico ao teórico, foi desenvolvida pela qualidade da fração, no campo racional, por meio do conceito de densidade na contradição com o conceito de sucessor.

A formação da imagem conceitual proveniente da dialética entre atividade interna e externa dos sujeitos, na inter-relação indivíduo-coletividade, na atividade orientadora, possibilitou a apropriação do movimento lógico-histórico do conceito, uma vez que permitiu uma aproximação da forma de desenvolvimento do conhecimento pela humanidade. A formação – entendida como processo contínuo, não acabado – da imagem conceitual coerente com o conhecimento científico foi orientada por meio do movimento do pensamento teórico do processo de construção do conceito para si. Dialeticamente, isso quer dizer que para promover essas imagens conceituais, é necessário que o indivíduo desenvolva uma atividade externa que viabilize tal coerência.

Com isso, infere-se que o processo de ensino predominantemente instituído à base da lógica formal promove sínteses conceituais no pensamento (imagens conceituais) que dificultam a coerência com os conceitos científicos em certas situações didáticas, podendo se estender às não didáticas. Por esse motivo, defendem-se propostas didáticas para o ensino básico (anterior ao ensino universitário), com o objetivo de manifestação da contrariedade existente no desenvolvimento de conceitos matemáticos, fundamentadas no movimento lógico-histórico, com ações que permitam reconhecer o desenvolvimento do conhecimento.

Diante do exposto, considera-se que a formação da imagem conceitual de conceitos matemáticos, coerentes com o conhecimento científico, pode ser realizada na inter-relação indivíduo-coletividade, por meio da realização de atividade orientadora de ensino, fundamentada em pressupostos lógico-históricos do conceito.

Referências

- Albadalejo, I. R. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Mathema colección.
- Amorim, M. P. (2007). *Apropriação de significações do conceito de números racionais: um enfoque histórico-cultural*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. R. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press.
- Boyer, C. B. (1993). *História da Matemática* (E. F. Gomide). São Paulo: Edgar Blucher.
- Caraça, B.J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda.
- Catalani, E. M. T. (2002). *A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual de fração*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- Cheptulin, A. (1982). *A dialética materialista: categorias e leis da dialética* (L. R. C. Ferraz, trad.). São Paulo: Alfa-omega.

- Costa, M. A. (1929). *As idéias fundamentais da matemática*. Rio de Janeiro: Bibliotheca Scientifica Brasileira.
- Dantzig, T. (1970). *Número: A linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- Davídov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico* (M. Shuare, trad.). Havana: Editorial Progreso.
- Demartini, I. T. (2009). *Refletindo sobre a formação do conceito de número racional na forma fracionária*. Dissertação de mestrado. Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo.
- Dias, M. S. (2007). *Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Dias, M. S. (2002). *Reta real: conceito imagem e conceito definição*. Dissertação de Mestrado, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Dias, M. S. & Moura, M. O. (2006). A atividade de ensino e a constituição do professor de matemática como sujeito histórico. In *Anais do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 15 (CD-ROM), Monte Gordo, Portugal.
- Duarte, N. (1993). *A individualidade para si – Contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo* (Coleção educação contemporânea). Campinas, SP: Autores Associados.
- Iglori, S. B. C. & Silva, B. A. (2001). Concepções dos alunos sobre os números reais. In J. Lachini & J. B. Laudares (org). *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo* (pp. 39-67). Belo Horizonte: Fumarc.
- Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento* (P. Bezerra, trad.). Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.
- Leontiev, A. (1983). *Atividade, consciência, personalidade* (L. L. Soler, R. B. Crespo & J. C. P. Garcia). Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Lima, L. C. & Moisés, R. P. (1998). *A fração: a repartição da terra*. São Paulo: Cevec/Ciarte.
- Malaspina, M. C. O. (2007). *O início do ensino de fração: uma intervenção com alunos de 2ª. Série do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. "Petit x", 51-66.
- Moura, M. O. (2001). A atividade de ensino como ação formadora. In: A. D. Castro & A. M. P. de Carvalho (orgs.) *Ensinar a ensinar* (pp. 143-162). São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda.
- Moura, M. O. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, 12, 29-43.
- Oliveira, B. (2001). A dialética do singular-particular-universal. In: *Anais do Encontro de Psicologia Social Comunitária*, 5 (p. 16-22). Bauru: Abrapso.
- Robinet, J. (1986). Les réels: Quels modèles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.
- Romanatto, M. C. (1999). Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, 7, 12, 37-49.
- Rosental, M. M. & Straks, G. M. (1960). *Categorias del materialismo dialéctico* (4ª ed). México: Editorial Grijaldo.
- Santos, V. de M. (1995). *Infinito: concepções e conseqüências pedagógicas*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

- Silva, M. J. F. (2005). *Investigando saberes de Professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. Tese de Doutorado, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thiollent, M.(2003). *Metodologia da pesquisa-ação*. Cortez: São Paulo.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, In: D. O. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.