Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares

Lilia P. **Aké**
Universidad de Colima
México
liliapatricia_ake@ucol.mx
Juan D. **Godino**
Universidad de Granada
España
jgodino@ugr.es
Walter F. **Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
wfcastro82@gmail.com

Resumen

Aunque son diversas las investigaciones y propuestas curriculares que sugieren la introducción de formas de pensamiento algebraico en el nivel de Educación Primaria, las fronteras entre lo que se puede considerar claramente algebraico y lo que no es algebraico son todavía difusas. En este sentido y con el fin de facilitar el reconocimiento de los rasgos característicos del razonamiento algebraico en los niveles elementales se incluyeron, en este trabajo, ejemplos de actividades matemáticas en las que se distingue el carácter aritmético del algebraico a través de un análisis basado en los niveles de algebrización. La propuesta teórica de los niveles de algebrización permite identificar una actividad matemática que no incorpora rasgos algebraicos, de otra que se puede considerar como propiamente algebraica.

Palabras clave: pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, niveles de algebrización, actividades matemáticas.

Introducción

Diversas investigaciones (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Filloy, Puig & Rojano, 2008;

Wagner & Kieran, 1989) han reportado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria, dificultades que se centran en la manipulación de letras y en la dotación de significado, pues supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética (Kieran, 1992). Esto posiblemente obedece a que el estudio del álgebra ha sido visto como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal (Butto & Rojano, 2004), y como una herramienta para la manipulación de símbolos para resolver problemas, desprovista de significado (Kieran, 2007). Por tal motivo, diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en buscar formas más efectivas de abordar la enseñanza del álgebra; una de ellas es la introducción de aspectos de razonamiento algebraico en la educación primaria (Davis, 1985; Kaput, 2000; Vergnaud, 1988).

La propuesta de introducir formas de pensamiento algebraico en el currículo de la educación primaria ha propiciado la existencia de diferentes puntos de vista sobre la naturaleza del álgebra en la escuela elemental (Bednarz et al., 1996; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2000; Kieran, 2007; Usiskin, 1989). Esto refleja la complejidad que implica la introducción del pensamiento algebraico y la necesidad de un marco de referencia sobre la naturaleza del álgebra que permita identificar qué es lo que se puede considerar como algebraico en los niveles elementales. Al respecto, Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, (2014) plantean una concepción del álgebra basada en la distinción de niveles de algebrización en la actividad matemática. Esta propuesta surge de las investigaciones realizadas entorno a la inclusión del álgebra en la escuela primaria y la algebrización del currículo, así como de la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007).

En este trabajo, se desarrollan ejemplos de actividades matemáticas en las que se distingue el carácter aritmético del algebraico utilizando la propuesta de los niveles de algebrización de Godino et al, (2014). Nos centramos particularmente en evidenciar cómo la actividad matemática puesta en juego en una tarea puede estar situada en el plano aritmético y cómo la manifestación de determinados rasgos algebraicos la puede situar como una actividad con un nivel incipiente de algebrización.

El álgebra escolar y los niveles de algebrización

Ser competente en álgebra escolar implica, entre otras cosas, el ejercicio de esa transición bidireccional y flexible entre el uso de acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos), la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados (Arcavi, 2007). Sin embargo, las competencias algebraicas también son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo (Santrock, 2001), por lo que se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). En este sentido, el pensamiento algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando progresivamente la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico. Para promover dicho desarrollo es necesario que los maestros sean conscientes de los diferentes rasgos del razonamiento algebraico que podrían promoverse en la escuela primaria.

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como "algebra temprana" (Cai & Knuth, 2011; Carraher & Schliemann, 2007), los trabajos de Aké, Godino, Gonzato & Wilhelmi, (2013) y Godino et al, (2014) proponen un modelo del pensamiento algebraico en el que plantean distinguir una actividad matemática que no incorpora rasgos algebraicos (nivel cero de algebrización) de otra que se puede considerar como propiamente algebraica (nivel 3 de algebrización); así como también enmarcar aquellas actividades con niveles incipientes e intermedios de algebrización (nivel 1 y 2 de algebrización). Dicha propuesta se define en términos de la presencia gradual, en la actividad matemática, de objetos y procesos algebraicos, así como el desarrollo progresivo de las formas del lenguaje y de los procesos de generalización. Específicamente, estos autores proponen como rasgos característicos del pensamiento algebraico, los siguientes:

1. *Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0).* Este nivel está caracterizado por la intervención de objetos particulares expresados en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; no se reconocen relaciones y propiedades de las operaciones.
2. *Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1).* Este nivel se caracteriza por el reconocimiento de relaciones y propiedades de las operaciones expresadas en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que expresen cantidades desconocidas. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.
3. *Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2).* Este nivel se caracteriza por el uso de un lenguaje alfanumérico a través del reconocimiento y planteamiento de ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
4. *Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3).* Este nivel se caracteriza por el empleo de un lenguaje alfanumérico; los símbolos se usan de manera analítica y se opera con las indeterminadas o variables planteando ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. También se plantea la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Es importante destacar que dichos autores sostienen que el nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza. Esto indica que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la práctica matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. Para realizar dicha clasificación proponen utilizar tres criterios para distinguir los niveles de algebrización: (a) La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación), (b) tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos y (c) el tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales). Dichos criterios son congruentes con lo que otros autores proponen para definir lo algebraico (Filloy et al., 2008; Kaput, 2008; Puig & Rojano, 2004; Radford, 2011) y que se detallan en el artículo Godino et al. (2014). Toma particular interés que dicha propuesta también es interpretable en términos de “capas de generalidad” que describe Radford (2010; 2011). “Las capas de generalidad se distinguen en función de las indicaciones a que los estudiantes recurren para pensar algebraicamente” (Randford, 2011, p. 311). En este sentido, algunas características de la generalización factual y contextual que describe L. Radford se concretan en los niveles 1 y 2 respectivamente, mientras que la generalización simbólica es interpretable en el nivel 3 de algebrización.

De lo aritmético a lo algebraico en actividades matemáticas

Las fronteras entre lo que se puede considerar claramente algebraico y lo que no es algebraico son difusas, lo que puede ser una dificultad para el profesor que decide asumir el compromiso de promover el pensamiento algebraico en sus alumnos.

En esta sección incluimos el ejemplo de distintas soluciones de una tarea analizadas según los tipos de objetos y procesos que ponen en juego, y clasificadas según el nivel de razonamiento algebraico que manifiestan, particularmente se distinguen las actividades de carácter aritmético de las formas incipientes de algebrización.

El problema propuesto a una muestra de 140 estudiantes de magisterio, en el contexto de una asignatura que contempla su formación didáctico-matemática, es el siguiente:

Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de zumo de limón.

a) ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juana o la de María, o tienen el mimo sabor?
b) Si Juana quiere preparar una limonada con el mismo sabor que la anterior pero para 24 cucharadas de limón, ¿Cuántas cucharadas de azúcar debe poner?
c) ¿Cuántas cucharadas de azúcar se debe poner para un número cualquiera de cucharadas de limón?

Esta tarea fue tomada de Rivas y Godino (2009) y pretende que el estudiante generalice y asocie el concepto de proporcionalidad con la formulación de una función lineal.

La Figura 1 incluye la respuesta del estudiante 1 al inciso a) de la tarea. Se observa que el maestro en formación simplifica las razones a su expresión mínima, identificándose 0.25 como resultados de dicho procedimiento de simplificación. Llama particularmente la atención el uso de la división($3 \div 12$ y $5 \div 20$) para expresar la razón, un tratamiento que según Freudenthal (1983) priva a la razón de lo que la hace valiosa como tal.

Todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas. El estudiante pone énfasis en las operaciones y se centra en la obtención de un resultado, de este modo no se diferencian propiedades de corte algebraico por lo que la actividad queda en el plano aritmético (Nivel 0).

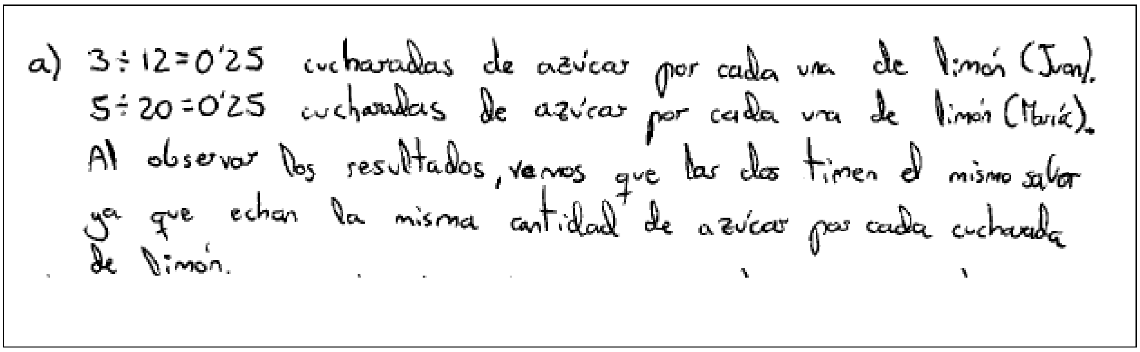

Figura 1. Respuesta del estudiante 1.

El estudiante 2 dio otra respuesta para el mismo inciso (Figura 2), en su solución, afirma: “Las dos limonadas tienen el mismo sabor, ya que tanto Juan como María, para 1 cucharada de azúcar han añadido 4 de zumo de limón, la única diferencia es la cantidad pero la proporción es la misma”. El estudiante utiliza la estrategia de la unidad simple (Lamon, 1993) para determinar si ambas razones tiene la misma razón unitaria. En la solución planteada se reconoce y representa a la cantidad desconocida, a saber, la cantidad de zumo de limón por cada cucharada de azúcar y la representa usando una literal. Emerge el uso de una propiedad “en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos”, lo que justifica la aplicación de la regla de 3. Esta actividad presenta un nivel incipiente de algebrización (Nivel 1).

JUAN:

$\left.\begin{matrix} 3 — 12 \\ 1 — x \end{matrix}\right\} x = \frac{12}{3} = 4$

MARIA:

$\left.\begin{matrix} 5 — 20 \\ 1 — x \end{matrix}\right\} x = \frac{20}{5} = 4.$

Figura 2. Respuesta del estudiante 2.

Para el inciso b) de la tarea, el estudiante 3 proporcionó la respuesta de la Figura 3:

24 es el doble de 12, por lo que habría que multiplicar por dos la cantidad de azúcar → $3 \times 2 = 6$ cucharadas de azúcar.

Figura 3. Respuesta del estudiante 3.

Este estudiante halla el valor que falta considerando que en las razones involucradas el numerador y denominador de una razón es el doble de la otra, es decir, se aprecia cómo toma de referencia la relación de la razón 3:12 e identifica que el doble del consecuente (12) es 24, para que se conserve así el mismo sabor, el doble del antecedente tendría que ser 6. El estudiante reconoce las condiciones de aplicación de la multiplicación y reduce la resolución del problema a una situación multiplicativa. No hay ningún rasgo propio de razonamiento algebraico por lo que esta actividad matemática queda en el plano aritmético (Nivel 0).

En la Figura 4 se ilustra la respuesta de un estudiante para el mismo inciso. En esta respuesta se identifica el reconocimiento de una propiedad en su procedimiento, el estudiante expresa que la razón entre los datos debe ser 4 para que se conserve el mismo sabor. Denota con un literal la cantidad desconocida y a continuación transpone el término para hallar el resultado. La actividad supone un nivel incipiente de algebrización (Nivel 1)

b) $24/x = 4$; $24 = 4x$; $x = 24/4 = 6$ cucharadas de azucar.

Figura 4. Respuesta del estudiante 4.

Para el inciso c) de la tarea, se muestra en la Figura 5, la solución que proporcionó el estudiante 5. En la respuesta se reconoce que por cada cucharada de azúcar se agregan cuatro cucharadas de limón; se trata de una relación que emerge del enunciado del problema y que no contesta de manera satisfactoria a la pregunta del ítem c. Se trata de una actividad de predominio aritmético (Nivel 0).

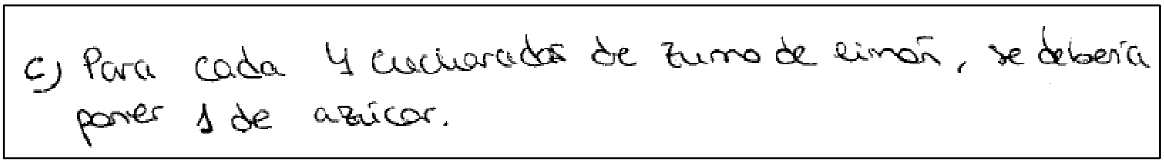

Figura 5. Respuesta del estudiante 5.

Para este mismo inciso, el estudiante 6 proporcionó una respuesta que se ilustra en la Figura 6. El estudiante reconoce la regla de dependencia de las cucharadas de azúcar respecto a las cucharadas de limón, por lo que emergen los conceptos de variable dependiente e independiente.

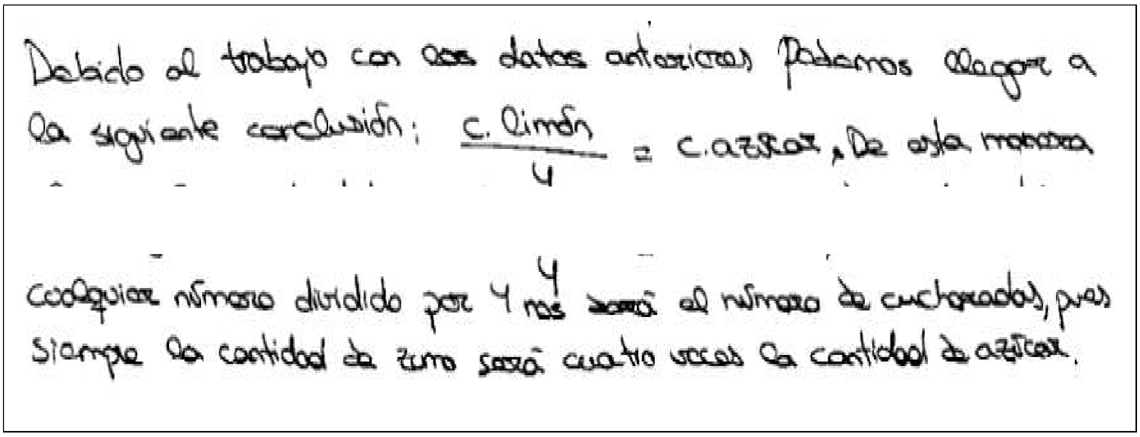

Figura 6. Respuesta del estudiante 6.

Se aprecia la generación de una regla en la que se identifica a la expresión “cualquier número” como un indicio de la generalidad. Sin embargo, expresa la generalidad en un lenguaje natural, por lo que el grado de algebrización se considera como incipiente (Nivel 1).

Los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes de magisterio, indican que los ítems a) y b) fueron accesibles para los maestros en formación (el índice de dificultad es 97.14 y 97.86 respectivamente). El ítem c) que demanda la formulación de una regla general, resultó claramente difícil de resolver por los estudiantes (el índice de dificultad es 33.57). Se aprecia de manera general que los maestros en formación no abordan la tarea con planteamiento funcionales, aplicando correspondencias y realizando distinciones entre la variable independiente y dependiente. Los ejemplos de soluciones planteados muestran el modo en el que la actividad puesta en juego en la tarea puede cambiar sutilmente y pasar del plano aritmético a un nivel incipiente de algebrización. Del análisis también se desprende que para que la actividad matemática adquiera un primer nivel de algebrización se debe enfatizar en las propiedades y en las relaciones, así como hacer uso de tablas para el análisis de las cantidades involucradas. Por otro lado, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico-literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. “Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual" (Filloy et al., 2008, p. 93).

Conclusiones

La introducción del álgebra en el currículo de la escuela primaria desde los primeros grados es una propuesta que se ha consolidado después de varios años de investigación, sin embargo aún no es claro cómo se puede introducir de manera sistemática y gradual de tal suerte que los profesores puedan no solo reconocer el razonamiento algebraico en tareas matemáticas escolares sino que también puedan promover dicho razonamiento en los niños. Una propuesta de sistematización, es la que propone Godino et al. (2014) con los niveles de algebrización. La propuesta de dichos autores ofrece una alternativa para atribuir el carácter algebraico gradual a la actividad matemática, la cual es la que finalmente decide el carácter algebraico.

Las tareas discutidas evidencian que es la actividad del estudiante la que devela el carácter algebraico de la tarea, y que dicho carácter puede no emerger durante la actividad matemática. El carácter algebraico gradual atribuido a las tareas y el carácter algebraico en función de la actividad matemática son dos aspectos dignos de tener en cuenta en los procesos de introducción del razonamiento algebraico en la escuela y en los procesos de formación de los maestros. En este sentido, los profesores deben ser capaces de tratar los conceptos desarrollados en la educación básica ligándolos con conceptos más avanzados con la finalidad de desarrollar el razonamiento algebraico. Por ejemplo, las tablas de multiplicar pueden ser representadas por medio de la expresión $y = mx$ donde x y y son números enteros y m puede ser la tabla del 2, del 3, del 4, y así sucesivamente hasta la tabla del 10.

Schliemann, Carraher y Brizuela (2007) argumentan que los estudiantes comienzan a entender funciones (lineales) y proporciones (constantes) mucho antes de poder comprender una expresión como $y = mx + b$, es decir, los educadores enseñan sobre las proporciones y funciones mucho antes de enseñar expresiones simbólico-literales a los estudiantes. Al respecto, nosotros señalamos que los maestros en formación deben ser capaces de abrir paso para el desarrollo gradual del simbolismo ligado a los conceptos y procesos aritméticos básicos.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Referencias y bibliografía

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (Vol. 2, pp. 1-8). Kiel, Germany: PME.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 44*, 59-75.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Davis, R. B. (1985). Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 195-208.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Cap.6. Reidel, Dordrecht. Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 1*(32), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp.707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. & NCTM.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children’s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students’ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education.* (pp. 303-320). Berlin: Springer-Verlag.

Rivas, M., & Godino, J. D. (2009). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere: Revista Venezolana de Educación, 48*(14), 189-205.

Santrock, J. W. (2001). *Educational psychology*. McGraw-Hill (Ed.), London 2001.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Usiskin, Z. (1989). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud G. (1988). Long terme et court terme dans l’apprentissage de l'algèbre. En C. Laborde, N. Balacheff (Eds.) *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l’informatique*, (pp. 189-199). La Pensée Sauvage, Grenoble, París.

Wagner, S., & Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale: Lawrence Erlbaum.