Perfiles de futuros maestros cuando interpretan las respuestas de los estudiantes a problemas de identificación de patrones

Alberto **Zapatera**
Universidad CEU Cardenal Herrera, Elche
España
alberto.zapatera@uch.ceu.es
María Luz **Callejo**
Universidad de Alicante
España
luz.callejo@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar distintos perfiles de la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes" en el contexto del proceso de generalización. Los participantes fueron 40 estudiantes para maestro que analizaron las respuestas de tres alumnos de primaria a tres problemas de generalización de patrones. Se identificaron cinco perfiles de futuros maestros que muestran una gradación de la competencia docente "interpretar las características de la comprensión del proceso de generalización de los estudiantes"; esta gradación va desde los que no fueron capaces de caracterizar la comprensión de ninguno de los alumnos de Primaria (Perfil 1), a los ue fueron capaces de caracterizar la comprensión de todos ellos (Perfil 5). Los resultados proporcionan descriptores de esta competencia docente caracterizados por la manera en la que los futuros maestros identificaban distintos aspectos de la comprensión del proceso de generalización.

Palabras clave: mirada profesional, proceso de generalización, identificación de patrones.

Introducción

Un aspecto importante en la investigación en educación matemática es identificar los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas y cómo se relacionan entre sí. La caracterización de estos conocimientos emerge de identificar las tareas profesionales del profesor de matemáticas (Ball, Thames & Phelps, G., 2008; Llinares, 2009) como son: (a) planificar y organizar el contenido matemático para enseñar; (b) gestionar el contenido matemático en el aula; y (c) analizar, interpretar y valorar las producciones matemáticas de los alumnos.

Para analizar, interpretar y evaluar las respuestas de los estudiantes, investigaciones recientes han mostrado la importancia de la competencia docente "desarrollo de una mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes". Esta competencia implica la puesta en práctica de tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar las estrategias y métodos usados por los estudiantes; (b) interpretar la comprensión de los estudiantes teniendo en cuenta las estrategias usadas; (c) tomar decisiones de acción (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010).

Algunas investigaciones han puesto el énfasis en identificar características de esta competencia en dominios matemáticos específicos como por ejemplo la introducción a la numeración (Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassell & Yoder, 2013), la estructura multiplicativa (Callejo, Fernández & Márquez, 2013), la proporcionalidad (Fernández, Llinares, & Valls, 2011; Son, 2013), la derivada (Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2014), el pensamiento algebraico (Magiera, van der Kieboom, & Moyer, 2013) o los números racionales (Wilson, Mojica, & Confrey, 2013) y apoyan la idea de que los profesores deben conocer cómo los estudiantes comprenden los contenidos matemáticos para poder tomar decisiones adecuadas para la enseñanza.

Nuestro estudio se centra en la competencia de futuros maestros de educación primaria en interpretar la comprensión matemática de los estudiantes cuando éstos resuelven tareas de generalización de patrones. El objetivo de nuestra investigación es caracterizar perfiles de la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes" en el contexto específico del proceso de generalización.

Marco teórico

En nuestra investigación convergen dos líneas de estudio: el desarrollo de una mirada profesional del profesor de matemáticas y el proceso de generalización de patrones.

Una mirada profesional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Diversos autores han puesto de relieve la importancia de que los profesores tengan una mirada profesional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para Mason (2002) un aspecto que diferencia la mirada del profesor de la de otros profesionales es la "intencionalidad". Este autor sostiene que incrementar la intencionalidad es un reflejo de la experiencia profesional y que las personas con experiencia pueden ir más allá de las reacciones rutinarias y responder así de forma más profesional ante diversos aspectos de una situación. J. Mason contempla dos aspectos de esta mirada profesional: (1) dar cuenta de ("account of") y (2) dar cuenta sobre ("account for") lo que sucede en el aula. El primer aspecto tiene por objetivo informar sobre los fenómenos lo más objetivamente posible, evitando interpretaciones, juicios o evaluaciones, mientras que el segundo tiene como objetivo explicar e interpretar lo que se percibe.

Para Van Es y Sherin (2002) esta mirada profesional implica: (1) identificar lo que es importante o significativo en una situación de aula; (2) utilizar el conocimiento sobre el contexto para decidir sobre las interacciones en el aula; (3) conectar los aspectos específicos de interacciones en el aula con principios generales de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, Jacobs, et al. (2010) han dirigido su atención a un aspecto particular de la mirada profesional: el pensamiento matemático de los estudiantes, y afirman que una mirada profesional supone algo más que atender a las ideas de los estudiantes en las situaciones que se plantean en cada momento en el aula. Caracterizan esta competencia docente mediante tres destrezas: (1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes; (2) interpretar la comprensión de los estudiantes y (3) decidir las acciones a desarrollar en la clase.

Generalización de patrones

Las investigaciones sobre cómo resuelven alumnos de Primaria problemas de generalización, en los que se dan los primeros términos de una sucesión en forma gráfica y se pide identificar el patrón de la sucesión, han puesto de relieve:

Por una parte el papel relevante en el desarrollo del proceso de generalización de los siguientes elementos matemáticos:

- *la coordinación entre la estructura espacial y la numérica*: Para continuar una sucesión los estudiantes necesitan identificar una regularidad que relacione dos estructuras diferentes: una espacial (distribución espacial de los elementos que componen las figuras) y otra numérica (número de elementos que forman cada figura) (Radford, 2011; Rivera, 2010).
- *la relación funcional*: Para identificar un término lejano (o no especificado), es preciso establecer la relación entre la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005).
- *el proceso inverso*: Para identificar la posición de una figura conociendo el número de elementos que la forman, es preciso establecer una relación funcional inversa de la anterior (Warren, 2015).

Por otra parte cómo evoluciona el pensamiento algebraico de los estudiantes: Las investigaciones de Radford (2011, 2012) han mostrado que algunos alumnos no llegaban a coordinar la estructura espacial y numérica de una sucesión formada por figuras, otros sí eran capaces de coordinar las dos estructuras y expresar verbalmente la relación funcional, y en grados posteriores algunos estudiantes llegaban a escribir pseudo-fórmulas para expresar la regla general. Los trabajos de Warren (2005) han mostrado que estudiantes de 9 años de edad fueron capaces de establecer la relación funcional entre la posición de una figura y el número de elementos, y sin embargo algunos tuvieron dificultades para invertir el proceso.

A partir de estos resultados hemos definido una posible trayectoria de desarrollo del proceso de generalización (Figura 1) considerando tres “momentos” que las investigaciones han identificado como relevantes en el desarrollo del proceso de generalización.

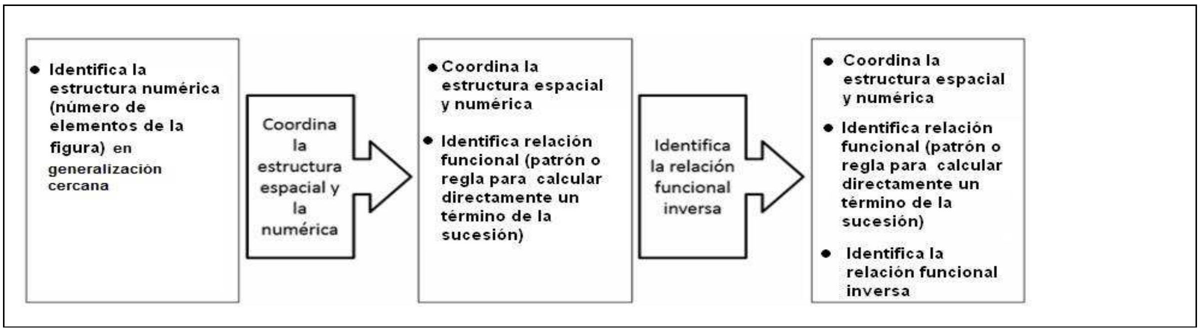


Figura 1. Una posible trayectoria del desarrollo de la comprensión del proceso de generalización.

Desde esta trayectoria de aprendizaje podemos definir tres grados de comprensión del proceso de generalización:

- Grado 1. *Generalización cercana*. El estudiante es capaz de continuar la sucesión para términos próximos respetando el patrón de crecimiento cuantitativo pero no la estructura espacial de las figuras.
- Grado 2. *Generalización lejana*. El estudiante es capaz de coordinar el esquema espacial y numérico y de reconocer la relación funcional en casos particulares.
- Grado 3. *Generalización lejana con proceso inverso*. El estudiante es capaz de coordinar el esquema espacial y numérico, reconocer la relación funcional en casos particulares, expresar la regla general de forma verbal como una relación funcional y de invertir la relación funcional en casos particulares.

Considerando estas referencias previas nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué perfiles podemos identificar en los estudiantes para maestro cuando interpretan la comprensión del proceso de generalización de patrones en los alumnos de Educación Primaria?

Método

Participantes y contexto

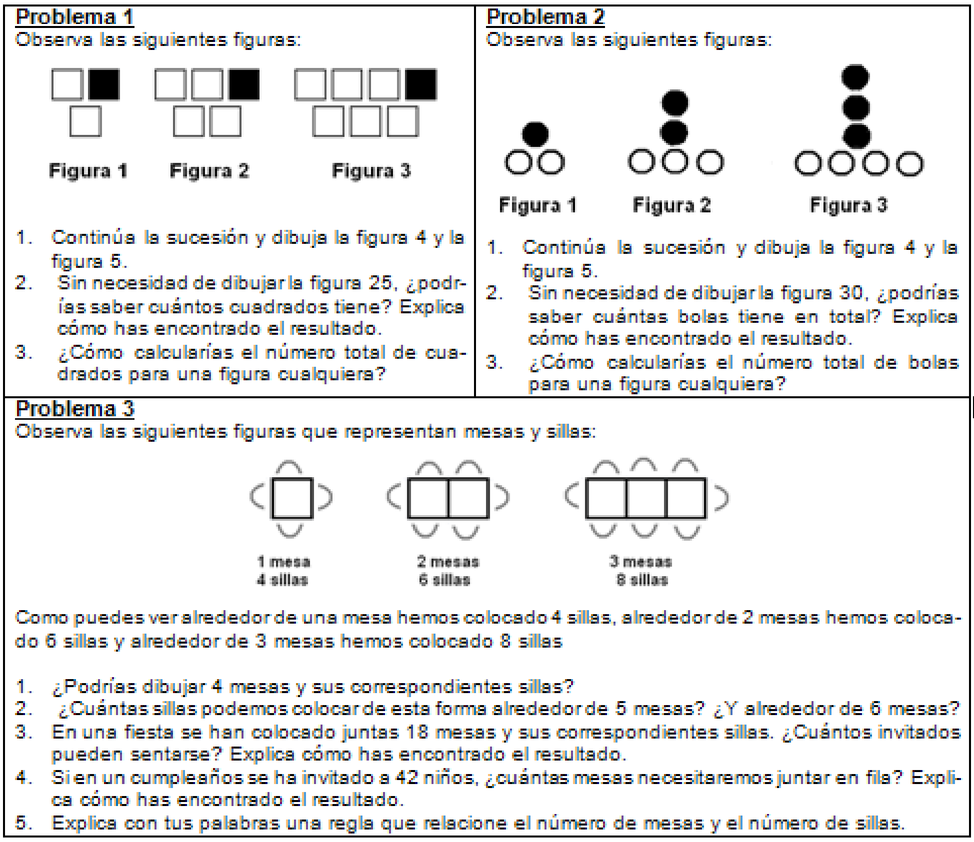
Los participantes fueron 40 estudiantes para maestro (EPM) de educación primaria, en el segundo semestre de su programa de formación, que estaban cursando una materia centrada en el desarrollo del sentido numérico en alumnos de Primaria.

Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario creado a partir de las investigaciones previas sobre el desarrollo del proceso de generalización en alumnos de Primaria (Radford, 2010; Carraher, Martínez & Schliemann, 2007). El cuestionario está formado por las respuestas dadas por tres alumnos de Primaria a los tres problemas que previamente habían resuelto los EPM (Figura 2). Los EPM debían analizar estas respuestas y contestar a las siguientes preguntas:

1. *Qué aspectos destacarías de las respuestas del estudiante X en relación a cada uno de los problemas, indicando a qué problema te refieres.*
2. *A partir de los aspectos que has destacado, identifica algunas características del proceso de generalización del estudiante X en los tres problemas.*

Las respuestas de los tres alumnos de educación primaria (que denominamos A, B y C) a cada uno de los tres problemas se seleccionaron atendiendo a los diferentes grados de comprensión del proceso de generalización (Figura 1) que hemos establecido: alumno A, grado 1 (Figura 3), alumno B, grado 2 y alumno C, grado 3.



Problema 1
Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 25, ¿podrías saber cuántos cuadrados tiene? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de cuadrados para una figura cualquiera?

Problema 2
Observa las siguientes figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 30, ¿podrías saber cuántas bolas tiene en total? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de bolas para una figura cualquiera?

Problema 3
Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:

1 mesa 4 sillas
2 mesas 6 sillas
3 mesas 8 sillas

Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado juntas 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

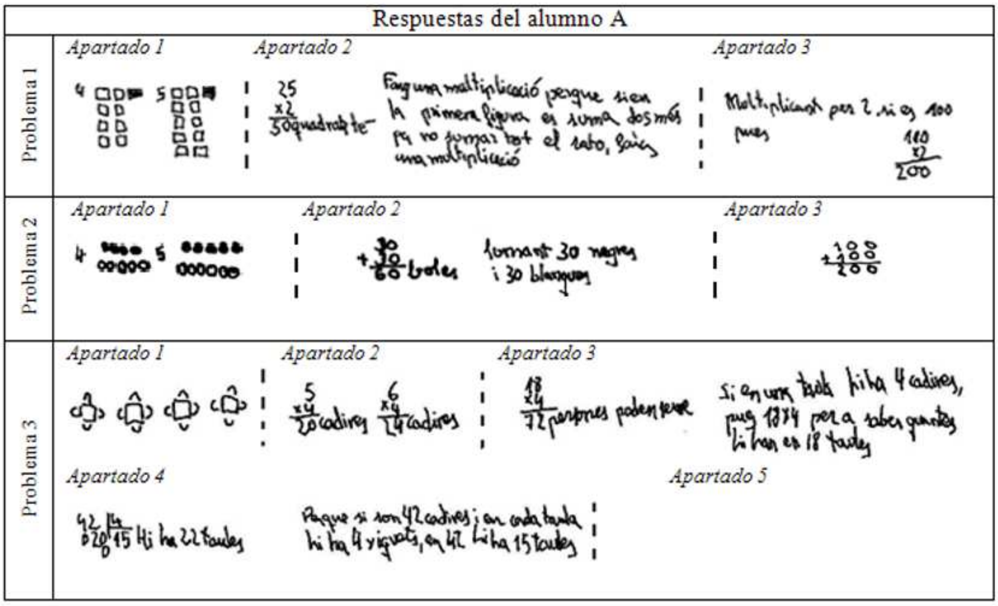
Figura 2. Problemas de generalización de patrones.

Análisis de datos

El análisis de los datos se realizó en dos fases: en la primera se analizaron por separado las respuestas de los EPM a cada una de las preguntas, estudiando la manera en la que los futuros maestros describían las respuestas de los estudiantes y las interpretaban; en la segunda, a partir del análisis realizado en la primera fase, se identificaron descriptores para caracterizar diferentes grados de desarrollo de la competencia docente.

Primera fase

En esta fase se analizaron las respuestas de los EPM a las dos preguntas del cuestionario. En las respuestas a la primera pregunta se analizó en qué medida los EPM mostraban evidencias de haber identificado los elementos matemáticos usados por los alumnos en la resolución de los problemas de generalización y cómo los EPM los utilizaban para describir las estrategias de los alumnos de Primaria. En las respuestas a la segunda pregunta se analizó en qué medida los EPM utilizaban esta descripción para interpretar las respuestas de los estudiantes de educación Primaria como evidencias del desarrollo del proceso de generalización. Codificamos las respuestas considerando distintos grados de evidencias (Tabla 1).



Las respuestas están en valenciano.
Problema 1. *Apartado 1:* Tiene 50 cuadrados
Apartado 2: Hago una multiplicación porque si a la primera columna se le suma otra más, para no sumar todo el rato se hace una multiplicación
Apartado 3: Multiplicando por 2 si es 100
Problema 2. *Apartado 2*: Lo forman 30 negras y 30 blancas
Problema 3. *Apartado 3*: Si en una mesa hay 4 sillas pues 18x4 para saber cuantas hay en 18 mesas
Apartado 4: Porque si son 42 sillas y en cada mesa hay 4 niños, en 42 hay 15 mesa

Figura 3. Respuestas del alumno A a los tres problemas.

Tabla 1

Categorías generadas en el análisis de las respuestas de los futuros maestros

	Describen las respuestas	**Interpretan las evidencias**
Evidencia alta	Cuando se consideran los tres elementos matemáticos significativos en el proceso de generalización.	El EPM identifica las características del proceso de generalización de los tres estudiantes.
Evidencia media	Cuando se consideran sólo dos elementos matemáticos significativos en el proceso de generalización.	El EPM identifica las características del proceso de generalización de sólo dos de los estudiantes.
Evidencia baja	Cuando se considera sólo uno de los tres elementos matemáticos significativos en el proceso de generalización.	El EPM identifica las características del proceso de generalización de sólo un estudiante.
Sin evidencias	Cuando no se identifica en las respuestas de los alumnos de Primaria ninguno de los tres elementos significativos en el proceso de generalización.	El EPM hace una descripción utilizando un lenguaje genérico, sin hacer referencia a los elementos matemáticos que caracterizan el proceso de generalización.

Segunda fase

La segunda fase del análisis generó, mediante un procedimiento inductivo descriptores de perfiles de la competencia docente “mirar profesionalmente” el desarrollo de la comprensión del proceso de generalización. Para ello, a partir del análisis realizado en la primera fase, agrupamos a los EPM en 5 perfiles que se describen en la sección de resultados

Resultados

Siguiendo el proceso de análisis descrito agrupamos a los futuros maestros en cinco perfiles según se refleja en la Tabla 2. Solo 2 EPM no pudieron ser clasificadas en ninguno de los grupos. Además, 2 de los 38 alumnos fueron capaces de caracterizar la comprensión de los tres alumnos de Primaria (perfil 5); 6 caracterizaron la compresión desde la perspectiva de un continuo de la trayectoria de aprendizaje, generalización cercana, y generalización lejana (perfil 4); otros 3 caracterizaron la comprensión de los dos alumnos de primaria que están en los extremos de la trayectoria (perfil 3) y 12 sólo caracterizaron al alumno que no coordina la estructura espacial y la numérica, mientras que 15 no mostraron evidencias de identificar a ningún estudiante de primaria (perfil 1). A continuación describimos brevemente cada uno de los perfiles.

Tabla 2

Número de EPM en cada uno de los perfiles identificados

	Perfil 1	**Perfil 2**	**Perfil 3**	**Perfil 4**	**Perfil 5**	**Total**
EPM	15	12	3	6	2	38

Perfil 1: Sin evidencias de identificar grados de comprensión del proceso de generalización

15 EPM no fueron capaces de interpretar las características de la comprensión del proceso de generalización a partir de las respuestas de los alumnos de Primaria. Estos EPM usaron un lenguaje genérico haciendo valoraciones del tipo: "*las respuestas son incorrectas*", "*no sabe generalizar*", "*están casi bien pero tiene algunos errores*", *"las respuestas son correctas"*. Sin embargo al describir las estrategias que utilizan los alumnos de Primaria si fueron capaces de usar al menos uno de los elementos matemáticos presentes en el proceso de generalización; por ejemplo: *"no ha respetado la estrategia espacial, de modo que se basa en la estrategia numérica únicamente"*. Los futuros maestros en este grupo basaron pues su argumentación en comentarios referentes a la corrección o no de sus respuestas así como al tipo de lenguaje que utilizan los alumnos de primaria.

Perfil 2: Generalización cercana cuantitativa.

12 EPM fueron capaces de identificar a aquellos estudiantes de educación Primaria que comprendían la generalización cercana, es decir, cuando el estudiante sólo continuaba una sucesión para términos próximos respetando el patrón de crecimiento cuantitativo pero no la estructura espacial de las figuras (alumno A). Los EPM en este grupo no identificaron e interpretaron las características de la comprensión del proceso de generalización cuando se coordina la estructura espacial y la numérica y se establece una relación funcional de forma verbal (alumnos B y C). Esto puede ser debido a que los futuros maestros de este grupo discriminaban únicamente las evidencias correspondientes al elemento matemático "coordinación de la estructura espacial y la numérica". Estos EPM utilizan un discurso específico en relación a la comprensión del proceso de generalización del alumno de Primaria que realiza la generalización cercana y un discurso genérico para los otros casos, con expresiones del tipo *"no ha tenido dificultades para generalizar"* o *"generaliza de forma verbal"*.

Perfil 3. Generalización lejana con proceso inverso y generalización cercana

3 EPM fueron capaces de identificar la compresión de la generalización lejana con proceso inverso y la generalización cercana, que se corresponden con los extremos de la trayectoria de

aprendizaje considerada (Figura 1). Los EPM en este grupo emplean un discurso mixto: unas veces su discurso es específico utilizando los elementos matemáticos relevantes en el proceso de generalización, utilizando como nexos las conjunciones causales, por ejemplo "ya que" o consecutivas, "por tanto", que son evidencias de relación de los hechos con su interpretación, mientras que otras veces usan un discurso genérico

Los EPM de este perfil identificaron las características de la comprensión del proceso de generalización del alumno que no llegó a coordinar la estructura espacial y la numérica (alumno A) pues utilizaron el elemento matemático "coordinación de la estructura espacial y la numérica" para inferir la comprensión de este alumno. Estos EPM también fueron capaces de caracterizar la comprensión del proceso de generalización puesto de manifiesto por el alumno C utilizando los elementos matemáticos "relación funcional" y "proceso inverso" vinculando el desarrollo de una "estrategia de recuento espacial" con la expresión verbal de la regla general en la que subyace la "relación funcional". Sin embargo, no fueron capaces de caracterizar la comprensión del proceso de generalización del alumno que no es capaz de hacer el proceso inverso (alumno B).

Perfil 4. Generalización cercana y lejana.

6 EPM fueron capaces de identificar la comprensión del desarrollo del proceso de generalización correspondiente a la generalización cercana y generalización lejana que reflejan la primera parte de la trayectoria de aprendizaje (Figura 1). Estos EPM también emplean un discurso mixto: unas veces su discurso es específico al utilizar los elementos matemáticos relevantes en el proceso de generalización, a través de nexos como conjunciones adversativas, por ejemplo *"a pesar de"* o consecutivas, *"por lo que"*, que son evidencias de relación de los hechos con su interpretación; otras veces el discurso es genérico. Una evidencia de este perfil la encontramos en las respuestas del EPM-4

Este EPM describió los tres elementos matemáticos presentes en el proceso de generalización -coordinación de la estructura numérica y espacial, relación funcional y proceso inverso- al interpretar lo que hace del alumno A y el alumno B. Este futuro maestro fue consciente de que el alumno A no coordinaba las estructuras numérica y espacial cuando dijo: *"El estudiante sólo sabe interpretar las figuras que ofrece el ejercicio si son básicas, y no se fija en compararlas."* Además, en la descripción de la resolución del problema 1 dijo: "*No ha tenido en cuenta el cuadrado negro"*; y en la del problema 2: *"La falta de atención en las primeras figuras […] le ha llevado a realizar incorrectamente la operación"*

Este EPM también identificó las características del proceso de generalización del alumno B, indicando que resolvió correctamente los dos primeros problemas: *"ha sabido resolver los casos particulares y generales, dando una respuesta válida para resolver cualquier figura.*" También identificó la relación funcional presente en la respuesta de este alumno cuando constató que fue capaz de resolverlo para cualquier figura. Además de esto fue capaz de interpretar que el error en el problema 3 era debido a que *"no ha sabido revertir su proceso correctamente*", es decir, emplea el elemento matemático "proceso inverso" en sus justificaciones.

Sin embargo los futuros maestros de este grupo a pesar de identificar el elemento matemático "relación funcional", no fueron capaces de inferir que el alumno C era capaz de realizar el proceso inverso, pues apoyaron su argumentación en un discurso genérico.

Perfil 5. : Generalización cercana, generalización lejana y generalización lejana con proceso inverso.

2 EPM fueron capaces de discriminar los diferentes aspectos de la comprensión del desarrollo del proceso de generalización puestos de manifiesto en la trayectoria de aprendizaje. Al hacer esta caracterización estos futuros maestros tuvieron en cuenta: la “coordinación entre la estructura espacial y la numérica”, lo que les permitió poner de relieve si los alumnos de Primaria eran o no capaces de continuar la sucesión para términos cercanos respetando tanto la distribución espacial de las figuras como el número de elementos; la “relación funcional” que les permitió poner de manifiesto si los alumnos de Primaria eran o no capaces de calcular el número de elementos para un término lejano, sin necesidad de hacer un dibujo; y el “proceso inverso” que les permitió argumentar no sólo si los alumnos de Primaria sabían relacionar la posición de una figura con el número de elementos que la componen, sino también si sabían hacer le proceso inverso.

Estos EPM emplearon un discurso específico utilizando los elementos matemáticos y como nexos las conjunciones causales “ya que”, “quizá porque”, o consecutivas, “por lo que”, que son evidencias de la relación entre los hechos y su interpretación.

Por ejemplo, EPM-18 identificó los elementos matemáticos que caracterizan el proceso de generalización de los tres alumnos y usó estos elementos para inferir su interpretación de la comprensión de cada uno de ellos. En la caracterización de dos de los alumnos de Primaria (A y B) distinguió entre la resolución de los dos primeros problemas y la del tercero; por otra parte diferenció entre la generalización cercana que denomina *“pequeña generalización”*, que es capaz de hacer el alumno A, de *“una generalización de forma global”* que realizan los alumnos B y C.

Este EPM indicó que el alumno A no coordinaba la estructura espacial y la numérica al constatar que en los dos primeros problemas *“ha llevado a cabo una pequeña generalización, es decir, ha sido capaz de seguir de manera correcta el patrón de las figuras”*, en alusión a las figuras 4 y 5, como se observa en su respuesta:

> *El alumno* (A) *en los dos primeros problemas ha llevado a cabo una pequeña generalización, es decir, ha sido capaz de seguir de manera correcta el patrón de las figuras del enunciado en las figuras que les seguían, es decir, en el enunciado aparecen la 1, 2 y 3 y ha sido capaz de hacer la 4 y la 5. El resto de apartados de estos problemas no ha sabido llevarlos a cabo ya que no ha sabido seguir el patrón general.*
> *En el tercer problema el estudiante empezó sin respetar la distribución espacial y numérica de las figuras y no pudo obtener el patrón general, por lo que no realizó ninguna generalización.*

En cuanto a la caracterización del alumno B reconoció en la resolución de los dos primeros problemas su habilidad para *“realizar una generalización de forma global”* tal como observamos en su respuesta a la pregunta 2:

> *En el primer y segundo ejercicio el alumno* (B) *demuestra que es capaz de realizar una generalización de forma global, ya que resuelve todos los apartados sin ningún tipo de problema. En el tercer ejercicio, también consigue encontrar el patrón general del problema, pero no consigue aplicarlo al contrario, quizá porque sigue el dibujo para llevar a cabo la generalización*

Se puede interpretar que entiende la generalización de forma global como “relación funcional”, ya que en la descripción de la estrategia del problema 1 dijo: *“se da cuenta de que* *arriba hay siempre un cuadradito más que en la fila de abajo, cuyo número de cuadraditos se corresponde con el de la figura”*. Por otra parte constata que aunque en los tres problemas ha encontrado el “patrón general” (relación funcional), en el tercero no fue capaz de *“aplicarlo al contrario”* (proceso inverso) que entiende como *“operación contraria a la realizada anteriormente”* (descripción problema 3)

En relación al alumno C reconoció su capacidad de hacer una generalización cercana *“generalización del apartado a”*, de una *“generalización más lejana”* y de una *“generalización global”*, que justifica diciendo *“ya que encuentra el patrón que siguen todas las figuras”*, como puso de manifiesto en la respuesta de la pregunta 2:

> *El alumno (C) realiza bien la generalización del apartado a, siguiendo el patrón de las figuras del enunciado respetando la distribución espacial y numérica de las mismas. Además, es capaz de hacer una generalización más lejana, ya que puede, usando una estrategia de recuento espacial, resolver sin dificultades problemas con figuras mayores. Por último es capaz de llevar a cabo una generalización global, ya que encuentra el patrón que siguen todas las figuras.*

Los futuros maestros en este perfil identificaron en las tareas propuestas los distintos grados de comprensión que presentaban los tres alumnos de Primaria a través de sus respuestas a los tres problemas de generalización.

Conclusión

El objetivo de esta investigación es caracterizar distintos perfiles de la competencia docente “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes” en el contexto del proceso de generalización. Los resultados proporcionan descriptores de esta competencia docente caracterizados por la manera en la que los futuros maestros identificaban distintos aspectos de la comprensión del proceso de generalización. Estos resultados también aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de maestros que tengan como uno de sus objetivos apoyar el reconocimiento de las evidencias de la comprensión matemática en los estudiantes.

Un resultado de este estudio es la identificación de cinco perfiles de EPM en los que se constata una gradación de la competencia docente “mirar profesionalmente la comprensión del proceso de generalización de los estudiantes”. Esta gradación va desde los EPM que no fueron capaces de caracterizar la comprensión de ninguno de los alumnos de Primaria (Perfil 1), a los EPM que fueron capaces de caracterizar la comprensión de todos los alumnos de Primaria (Perfil 5).

Nuestro estudio nos permite avanzar una trayectoria de aprendizaje de los EPM y una transición entre los perfiles (Figura 5) que puede aportar información sobre el desarrollo de esta competencia docente. El paso del perfil 1 al 2 se produce cuando los EPM son capaces de utilizar el elemento matemático “coordinación de la estructura espacial y la numérica” para caracterizar el alumno de Primaria que realiza una generalización cercana cuantitativa (alumno A). El paso del perfil 2 al 3 o al 4 se produce cuando los EPM son capaces de reconocer la relevancia del elemento matemático “relación funcional” o “proceso inverso” para caracterizar la comprensión del proceso de generalización de los alumnos. Los EPM que se encuentran en los perfiles 3 y 4 no establecen claramente las diferencias entre los alumnos de Primaria que saben establecer una relación funcional (alumnos B y C), pero que no son igualmente competentes en la aplicación del proceso inverso de esta relación. El paso de los perfiles 3 y 4 al perfil 5 se produce cuando los EPM son capaces de reconocer el “proceso inverso” como un elemento relevante del proceso de generalización, basado en la identificación de la relación funcional.

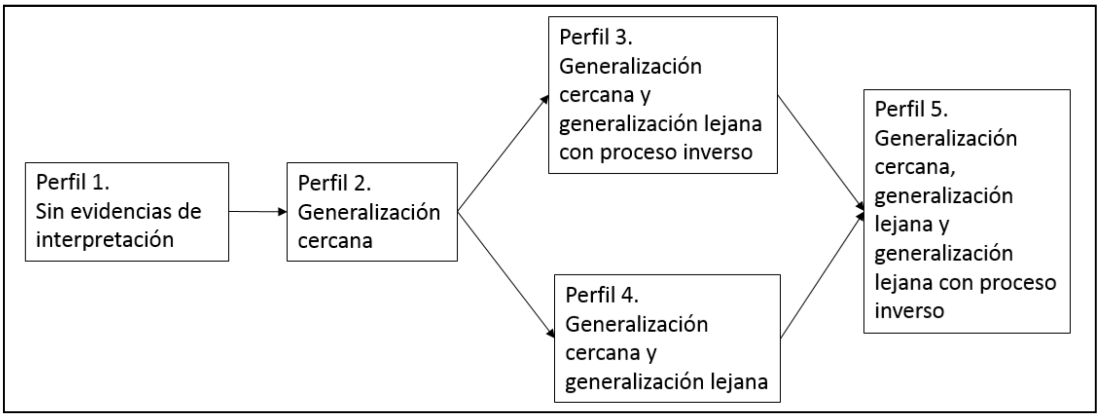


Figura 5. Transición entre los perfiles.

Estos resultados aportan información para el diseño de materiales para la formación de maestros que tengan en cuenta las características del aprendizaje de los EPM. En este sentido el instrumento diseñado puede ser un punto de partida para la elaboración de materiales docentes en los programas de formación de maestros que tengan como objetivo el desarrollo de las destrezas de identificar los elementos matemáticos relevantes en la resolución de este tipo de tareas e interpretar las producciones de los estudiantes.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes is special? *Journal of Teacher Education*, *59*, 389-407.

Callejo, M. L., Fernández, C., & Márquez, M. (2013). Pre-service primary teachers’ knowledge for teaching of quotitive division word problems. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education*, *40*, 3-22

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). Development of prospective mathematics teachers’ professional noticing in a specific domain: proportional reasoning. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 329-336). Ankara, Turkey: PME.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *51*, 92-101

Magiera, M., van der Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge-Falmer.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. En M. F. Pinto, & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Belo Horizonte, Brasil: PME

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and development issues. En *12th International Congress on Mathematical Education*, 8-12 julio, COEX, Seul, Corea.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' pre-instructional competence in patterning activity. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2014). Developing Pre-service Teachers' Noticing of Students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI 10. 1007/s10763-014-9544-y

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 379-397.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 49-70.

Van Es, E., & Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Wilson, P. H., Mojica, G., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32,* 103-121.