XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

A Argumentação no Estudo da Geometria Euclidiana por Acadêmicos de Licenciatura em Matemática

Antonio **Sales**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
a.sales@terra.com.br
Luiz Carlos **Pais**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
lcpais@nin.ufms.br

Resumo

Este trabalho é o resultado parcial de uma pesquisa do tipo etnográfico, desenvolvida com acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública no interior de Mato Grosso do Sul, Brasil. A argumentação esteve presente como procedimento didático e como tecnologia na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático. Os resultados apontam para a possibilidade de evoluir da argumentação, como expressão do raciocínio lógico, para a demonstração e também para viabilidade do seu uso como recurso didático.

Palavras chave: prova, demonstração, objetos matemáticos, teoria antropológica do didático.

Em tempos recentes vem se discutindo, com razoável frequência, o papel da argumentação no estudo da matemática (ARSAC, 1992; GARNICA, 1995; BRASIL, 1998; OSORIO, 2000; ROBOTTI, 2002; PEDEMONTE, 2002; PIETROPAOLO, 2005; VIGO, 2006; LEANDRO, 2006; SALES 2010). Parece que a demonstração, como um procedimento formal que confere solidez às novas produções matemáticas, está fora de discussão tendo em vista que a sua contribuição bem como a sua forma já estão definidas sobrando pouco espaço para especulações teóricas a seu respeito (LAKATOS, 1978). É um pressuposto básico que sem demonstração não há produção matemática. A expressão "produção matemática" aqui está sendo usada com o sentido clássico do termo, logo, refere-se à produção acadêmica.

A argumentação, por pertencer a variados campos de estudo, é um termo cujo sentido ainda requer maiores esclarecimentos. Oléron (1987), Toulmin (2006) e Plantin (2008), por exemplo, situam-na no campo da lógica enquanto, Abreu (2006) e Meyer (2008) analisam-na na perspectiva da linguística. Nossa perspectiva é que a argumentação possa ser situada na interface da linguística com a lógica e, dessa forma, podemos estudar a sua contribuição para o estudo da matemática. Nessa perspectiva que estamos propondo é possível ver a argumentação como a expressão de um raciocínio, como um elemento pré-demonstrativo e, ao mesmo tempo, como um procedimento metodológico. É um recurso explicativo, justificatório e, ao mesmo tempo, uma forma de proceder a um estudo ou de conduzir uma organização didática.

Arsac et al (1992) procedeu a uma classificação dos níveis e das características do raciocínio empregado numa atividade visando estabelecer uma certeza relativa a uma afirmação matemática. A demonstração matemática, nessa perspectiva, caracteriza-se como um tipo particular de rigor, cultivado no saber acadêmico, e parte de enunciados aceitos como verdadeiros - os axiomas - deduzindo os demais de acordo com um conjunto de regras da lógica. Para o matemático um conhecimento deixa de ser processo e se torna solidificado quando, reunidos os axiomas e teoremas pertinentes puder concluir, ser aquele o único resultado possível. Segundo Fetissov, a demonstração é exigida por uma das leis fundamentais do nosso pensamento - o princípio da razão suficiente que aponta para a necessidade de fundamentar rigorosamente as nossas afirmações. Nessa atividade a inteligência é desafiada à medida que se põe a procurar a sucessão de silogismos que "permitirá ligar a afirmação a demonstrar às verdades anteriormente reconhecidas e às condições do teorema" (FETISSOV, 1985, p. 18).

A relação entre a argumentação e demonstração na matemática recebe de Arsac uma distinção clara e objetiva. Demonstração é um caso particular de prova que, por sua vez, está inserida num contexto mais amplo denominado argumentação.

A argumentação não tem, como ponto de partida, um compromisso com a verdade, se entendermos verdade como algo já construído, como é o caso da prova e da demonstração (ARSAC, 1992). A argumentação busca a verdade em potencial, uma verdade a ser estabelecida, e procura esclarecer ou também convencer. O componente racional de uma argumentação é composto pela coerência e pela articulação entre as proposições. Desenvolver a capacidade de argumentar parece ser uma necessidade cada vez mais presente na sociedade atual, cuja característica principal é a comunicação, onde o diálogo se apresenta como uma moeda de grande valor.

Prova, é uma explicação ou argumentação aceita por um grupo social. Não se trata necessariamente de algo rigoroso. É uma argumentação que possui coerência suficiente para convencer. Encaixam-se nesse status as “demonstrações” feitas por computador, onde muitos experimentos são realizados, e os vários exemplos propostos em sala de aula que culminam por convencer o aluno da veracidade do que está sendo exposto. No entanto, a prova tem caráter temporário uma vez que, mais cedo ou mais tarde, a dúvida poderá ressurgir mesmo que em outra dimensão ou por outro motivo.

Arsac classifica a demonstração como uma prova aceita pela comunidade de matemáticos. Ela é atemporal e impessoal. A demonstração, nessa perspectiva, é uma argumentação que satisfaz os requisitos exigidos por uma comunidade de especialistas. Demonstração é um caso particular de argumentação e de prova.

A demonstração nos conduz para um resultado já conhecido, portanto, seu papel é desfazer possíveis dúvidas, evidenciar ou confirmar uma verdade já conhecida. A argumentação, nessa perspectiva, é aberta ao debate e a demonstração é fechada ao debate.

Até agora a nossa discussão ficou no âmbito dos aspectos funcionais, porém, do ponto de vista da estrutura pode-se dizer, sinteticamente, que a argumentação se “desenvolve pelo encadeamento dos enunciados” e a demonstração pela “substituição dos enunciados” (FREITAS, 1993, p. 30).

Segundo os estudos feitos pelos Van Hiele the arguments as the expression of logician, a demonstração, com todo o seu rigor característico, é indício de plena maturidade no conhecimento geométrico. Para esses pesquisadores são cinco os níveis de conhecimento geométrico, sendo eles: 1) visualização; 2) análise “através da observação e da experimentação”; 3) dedução informal; 4) dedução e 5) rigor. O último deles, o da abstração e do rigor, ocorre quando o estudante consegue manejar com fluidez diversos sistemas dedutivos e analisar o grau de rigor desses sistemas, ele está apto comparar sistemas diferentes (CROWLEY apud LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 4).

No penúltimo deles, o da dedução, quando o estudante consegue perceber “a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações e não apenas de memorizá-las” (Ibid.) ocorre a demonstração. Há, sem dúvida, um grau muito elevado de abstração em cada demonstração geométrica, pois o desenho ali aparece apenas como um coadjuvante à linguagem. A argumentação, por sua vez, começaria no nível dois da escala de Van Hiele quando começam ocorrer o ordenamento lógico das propriedades e a compreensão das primeiras definições. Um aprofundamento da argumentação ocorre no nível três, quando o estudante já consegue desenvolver algumas sequências, relacionar alguns axiomas, observar regularidades.

A partir dessa perspectiva, no ensino fundamental, o trabalho deveria incluir a argumentação tendo em vista que o estudante precisa ser levado a ultrapassar o nível da visualização. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) atribuem importância fundamental ao processo de argumentação como elemento que contribui para a formação do sujeito cidadão e como um preparativo para a demonstração.

O documento chega mesmo a afirmar que a contribuição da matemática para o desenvolvimento da argumentação se constitui num dos princípios norteadores do seu ensino, visando adequar o ensino à nova realidade, justificando a sua presença (da matemática) cada vez maior nos diversos campos da atividade humana. A busca de caminhos pessoais e coletivos para o estabelecimento de relações econômicas, sociais e culturais que promovam a qualidade de vida exige que se estabeleçam profundas mudanças na relação do homem com o meio onde vive. É necessário: que sejam plenamente compreendidas as relações de interdependência dos diversos elementos e a importância dessas relações para a manutenção da vida no Planeta. O respeito à vida requer novas formas de organização e um trabalho interdisciplinar com a inserção da matemática. Nessa visão o estudo é para a vida e a argumentação é considerada um procedimento com a mesma importância de "(coleta, organização, interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, realização de cálculos, modelização, **prática da argumentação** etc.)" (BRASIL, 1998, p. 31 grifo nosso).

Perelman (apud OLÉRON, 1987), justifica o uso da argumentação tomando como base a liberdade dos indivíduos, os interesses pessoais e coletivos e o uso maciço dela pelos meios de comunicação. Já não podemos mais impor, temos que convencer. É nessa perspectiva que nos propusemos em analisar o processo de argumentação no estudo da geometria euclidiana.

Teoria de Análise

Nossa teoria de análise do processo de estudo da geometria é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001) e Chevallard (2001). Segundo a TAD toda atividade humana (e a matemática é uma atividade humana) pode ser analisada levando em conta quatro fatores interdependentes que são denominados de tarefa, técnica, tecnologia e teoria (t, τ, θ, Θ) e que compõem uma praxeologia. Praxeologia nos "remete a algo pragmático como, por exemplo, seguir um roteiro" e por isso pode também ser denominada de teoria da ação eficaz ou do "bom trabalho" (SALES, 2010, p. 37).

A tarefa é a atividade proposta, a técnica é o processo, algoritmo ou qualquer recurso prático utilizado para resolver a tarefa. Para cada técnica utilizada há uma explicação lógica denominada de tecnologia e para toda tecnologia há um suporte teórico ainda que ingênuo tal como a tradição, os mitos e assim por diante. A tecnologia se manifesta através de uma argumentação justificatória e esta revela a teoria que a embasa. Admite-se ainda que em muitos contextos a teoria possa ser a própria tecnologia e vice-versa. Não é necessário, portanto, que sempre consigamos distinguir claramente uma da outra.

A TAD também concebe que ao estudar matemática, o que está em jogo não é a aprendizagem de conceitos ou apropriação das idéias abstratas (objetos não-ostensivos), mas a "manipulação" dos mesmos através dos objetos ostensivos (fala, gestos, figuras, grafia na língua materna e símbolos) (BOSCH; CHEVALLARD, 1999; CASABÓ, 2001), sabendo que não há uma correspondência biunívoca entre ostensivos e não-ostensivos e que também não há precedência no seu uso.

O desenvolvimento do processo de estudo não se desenvolve de forma linear, mas ainda assim é possível distinguir seis momentos, não necessariamente cronológicos, em que uma tarefa matemática é resolvida pelo sujeito. Embora esses momentos didáticos (pois didático na TAD é relativo ao estudo) sejam apresentados em uma sequência ordinal, dois ou mais deles podem acorrer simultaneamente sem que um substitua o outro. Os seis momentos didáticos podem ser assim sintetizados: 1) primeiro encontro; 2) exploratório; 3) tecnológico-teórico; 4) trabalho com a técnica; 5) institucionalização; 6) avaliação.

Desenvolvendo esse raciocínio Chevallard, Bosch e Gascón (2001) argumentam que, ao estudar matemática o sujeito toma contato com o problema a ser resolvido e o assume como sua tarefa. A busca por informações complementares e a preocupação em encontrar problemas similares já resolvidos constitui o momento da exploração. Reunidas as informações vive–se o momento de proceder a discussão e a análise da possibilidade de adequação das técnicas encontradas ao problema em pauta. Aplicam-se as técnicas ou a técnica e procura-se conferir a validade da técnica e a sua abrangência ou possibilidade de generalização para outros casos.

Mesmo tendo definido a nossa teoria de análise, entendemos que para analisar uma prática argumentativa ainda nos falta definir alguns elementos constituintes dessa prática. A ação de argumentar, quando cumpre plenamente o seu papel de esclarecer, convencer, estabelecer uma verdade, se constitui em um ou dois dos componentes de uma praxeologia. Essa argumentação que é uma prova ou, dependendo do grau de rigor, dos recursos e da linguagem utilizados, é uma demonstração, foi desenvolvida segundo técnicas e critérios apropriados. Ela deve ter elementos lógicos suficientes para lhe conferir forma, força e critérios. Há uma teoria definindo as suas características e seus critérios de validade. Nesse caso a praxeologia seria composta pelo quaterno: (tarefa, argumentação explicativa, argumentação justificatória, teoria). Estamos supondo ainda que a argumentação, essa tecnologia matemática, também pode ser uma técnica didática, uma forma de conduzir uma organização didática (CHEVALLARD, 2001).

O Método

Como parte de uma pesquisa mais ampla que incluiu uma tese de doutorado a atividade foi desenvolvida no próprio ambiente de trabalho e, por uma questão de coerência com a teoria de análise, é uma pesquisa descritiva. As sessões de estudo ocorreram na própria sala de aula tendo em vista que a maioria dos acadêmicos tem compromissos trabalhistas nos outros horários. Muitos deles moram em cidades vizinhas e até mesmo em assentamentos rurais vindo para a universidade com ônibus fretados para esse fim. Estavam no transcurso do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Mais especificamente a atividade se deu no primeiro semestre do ano de 2009. Toda dinâmica do trabalho envolvia trabalhos em grupos de duas ou três pessoas, formados espontaneamente, e a argumentação porque se exigia que toda técnica fosse explicada e justificada.

Foi uma pesquisa do tipo etnográfico (ANDRÉ, 2008) onde não há distanciamento entre o pesquisador e o objeto e as rupturas são intencionais.

A Tarefa

Prove que, num triângulo ABC, se a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ *é também bissetriz do angulo Â, então o triângulo ABC é isósceles.*

Demonstração canônica (fig.1), isto é, aquela que frequentemente é encontrada nos livros didáticos.

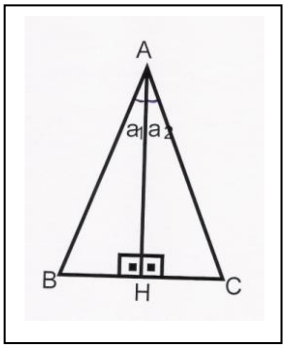

Figura 1. Demonstração do teorema.

Hipótese: $\overline{AH}$ é bissetriz e altura

Implicações: $a_1=a_2$ e $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

Consequência: $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e ΔABH ~ΔACH

Como $\overline{AH}$ é comum então ΔABH $\equiv$ ΔACH

Logo: AB=AC e ΔABC é isósceles.

Ou

Hipótese: $\overline{AH}$ é bissetriz e altura

Implicações: $a_1 = a_2$ e $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

Como AH é lado comum aos triângulos ABH e ΔACH, pelo caso ALA tem-se que ΔABH $\equiv$ ΔACH, AB=AC e ΔABC é isósceles.

Resolução da Tarefa Pelos Acadêmicos

Este é mais um exemplo de uma tarefa levada a cabo coletivamente. Após um período de debate nos grupos uma acadêmica foi ao quadro para apresentar a técnica utilizada pelo seu grupo. Enquanto ia descrevendo a turma como um todo ia interferindo com perguntas e sugestões. A foto (fig.2) foi obtida em dois momentos, procurando captar a dinamicidade do processo. Dito em outras palavras: a segunda foto capta os registros da primeira foto após sofrer correções feitas pela própria acadêmica. Essas correções ocorriam na medida em que a turma ia opinando.

Esclarecemos que o quadro de giz possui algumas ranhuras que, às vezes, sugerem que foram colocados determinados sinais distintivos nos registros algébricos. Essas marcas não foram colocadas, elas apareceram e devem ser desconsideradas.

Figura 2. Primeira foto relativa à tarefa.

Figura 3. Segunda foto relativa à tarefa.

Descrição da técnica matemática

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Esboçar uma figura.	Um enunciado, em geometria, evoca uma figura.
Passo 2. Definir a hipótese.	Um teorema é composto de hipótese e tese.
Passo 3. Definir a tese.	
Passo 4. Identificar ângulos e lados congruentes em ambos os triângulos resultantes.	Bissetriz e altura definem ângulos congruentes e ângulos retos respectivamente. A coincidência delas define um lado comum para os dois triângulos resultantes.
Passo 5. Identificar um caso	Casos de congruência.

de congruência de triângulos.	
Passo 6. Definir outros dois lados congruentes.	Triângulos congruentes têm lados congruentes.
Passo 7. Afirmar que o triângulo é isósceles.	Triângulos isósceles têm dois lados congruentes.

Detalhamento do processo

Ocorreu uma argumentação que resultou em uma demonstração dedutiva.

Foi uma atividade que privilegiou a participação coletiva. A acadêmica aprecia expor no quadro o que pensa, ir esboçando e contando com o apoio dos colegas. Havia informações complementares, perguntas, revisões e correções, nos grupos trabalhando em paralelo para conferir os resultados.

Os registros ostensivos não se diferenciam muito dos utilizados em outras tarefas. De alguma forma há uma padronização. Especialmente na etapa final do processo todos têm os mesmos registros. Há predominância do verbal, em segundo lugar o geométrico e o registro na língua materna. O registro algébrico apareceu também e houve um titubear no registro da hipótese, equívocos na anotação e imprecisões conceituais. Equívocos parcialmente sanados com a participação da turma.

Nem sempre é fácil separar a organização didática da organização matemática. Embora sejam distintas, na maioria das vezes, as duas estão imbricadas de tal forma que a tentativa de separação torna-se infrutífera. Neste caso, porém tentaremos explicitá-la.

Desenvolvimento didático

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Vislumbrar a solução.	Interpretação do enunciado.
Passo 2. Definir uma estratégia matemática.	Para cada tarefa há uma estratégia que melhor resolve.
Passo 3. Expor em público.	O debate produziu um conflito cognitivo que induziu à solução.
Passo 4. Ir esboçando a solução	
Passo 5. Definir uma possível hipótese.	
Passo 6. Corrigir a hipótese.	
Passo 7.Afirmar que um caso de congruência resolve o problema.	

Os elementos teóricos são encontrados em Chevallard quando defende que a produção da matemática é uma produção social. O elemento fundamental no estudo é o aspecto social da matemática.

Frequentemente os trabalhos em grupo, ou expostos para a participação pública, favorecem o aparecimento de conflitos sociocognitivos. Sócios por não se tratar de conflitos internos e pessoais e cognitivos por estarem relacionados com o conhecimento. Ele está presente quando dois ou mais indivíduos se defrontam com o mesmo problema e interagem entre si na busca da solução. "A cooperação ativa entre alunos, a necessidade de explicar suas escolhas e de argumentar são favoráveis a um desenvolvimento do controle do aluno sobre a sua atividade" (ARSAC, 1992, p.177-178).

A participação da classe foi captada através de uma filmadora e analisada posteriormente.

Antes da resolução no quadro os acadêmicos trabalharam em grupos e muitos resolveram a tarefa enquanto outros estavam a meio caminho da solução. A hora de ir ao quadro foi decidida voluntariamente pela acadêmica.

Quando a acadêmica desenhou o triângulo e traçou a bissetriz relativa ao ângulo marcou a intersecção dela com base com a letra M o professor perguntou:

– Por que você chama esse ponto de M? [*Ela antecipou BM=MC. O que devia ser visto como conseqüência ela viu como hipótese*].

Acadêmica:

– Por que é bissetriz. [O registro gestual indicou a ceviana. *Equívoco conceitual*].

Alguém da classe:

– Altura

A acadêmica marcou o ângulo bissectado e registrou a hipótese como sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AM}$ como altura e bissetriz. Virou-se para classe e perguntou pela tese.

Acadêmico JJ:

– A primeira hipótese [$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$] é a tese [*deve-se entender: primeira parte da hipótese*].

A opinião da classe se dividiu:

– A segunda hipótese [$\overline{AM}$ como altura e bissetriz] é a tese [*deve-se entender: segunda parte da hipótese*].

– Essa é hipótese.

A acadêmica escreveu tese na segunda parte da hipótese [$\overline{AM}$ como altura e bissetriz].

Acadêmico G

– Se ela escreveu hipótese é hipótese. Se estiver certo ou não, é hipótese [*o acadêmico percebeu que hipótese é a verdade admitida. Se estiver equivocada não* *conduzirá à tese pretendida, mas não deixa de ser a verdade admitida. Em outras palavras: se ela admitiu isso como verdade deixemos para ver aonde vai chegar*].

A classe se descontraiu e houve risos. A acadêmica também sorriu. Escreveu a tese como $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e apagou essa expressão [$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$] da hipótese. Recebeu aprovação da classe.

A acadêmica arriscou outra hipótese [em substituição a $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$]:

$\overline{CM} \equiv \overline{BM}$.

Prosseguiu e desenvolveu toda demonstração. Foi sentar-se e o registro algébrico ficou sendo:

Hipótese: $\overline{CM} \equiv \overline{BM}$ e $\overline{AM}$ é altura e bissetriz

Tese: $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$

Caso de congruência: ALA

Conclusão: ΔABM≡ΔACM, logo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e o triângulo ABC é isósceles.

Acadêmico G se dirigiu para o grupo próximo dele e para a acadêmica:

– Ela escreveu na hipótese que $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$, mas não é verdade [*deve-se entender: não é hipótese. De fato:* $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$ *é consquência da hipótese*].

A acadêmica voltou ao quadro apagou a primeira parte da hipótese e escreveu: “No triângulo ABC”.

Nova intervenção da classe:

– Escreva em símbolos: triângulo ABC.

A acadêmica escreveu ΔABC e encerrou a atividade. A classe deu-se por satisfeita.

Há que considerar aqui alguns equívocos de notação. Deve ser AB=AC e BM=CM ou $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$ e não como consta no registro da acadêmica. A parte inferior da foto é uma tentativa de corrigir o que está na parte superior. Quando o registro da parte inferior foi feito o registro da parte superior já estava apagado.

Embora titubeante, ainda com erros de notação a classe evoluiu da argumentação para a demonstração. O caminho percorrido foi o caminho da construção. A manipulação dos ostensivos foi satisfatória, carecendo de poucos reparos. A falta de registro de algumas etapas, intermediárias, que explicariam os passos deve ser considerado como natural nessa etapa do processo de aprendizagem.

Considerações Finais

A análise do processo deixa evidente que é possível elaborar uma organização didática que produza uma evolução da argumentação para a demonstração. Transparece também ser possível que os discursos: explicativo e justificatório sofram um processo de ascensão do cotidiano para o científico. Nesse caso, em particular, foi possível evoluir da argumentação para a demonstração. Dessa forma a argumentação, como procedimento didático, se mostra um recurso plausível.

Bibliografia e referências

Abreu, A. S. **A** *Arte de Argumentar:* gerenciando razão e emoção. 11. Ed. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2006.

André, M. E. D.A. *Etnografia da Prática Escolar.* 14. ed. Campinas, SP: Papirus, 2008.

Arsac, G. et al. *Initiation au Raisonnement Déductif au Collège*. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

Bosch, M.,& Chevallard, Y. *Ostensifs et Sensibilité aux Ostensifs dans l'activité Mathématique.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/1, 77-124, 1999.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Casabó, M. B. *Un punto de vista antropológico*: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. Quarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. Disponível em < http://www.seiem.es/publicaciones/archivos publicaciones/ actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf > Acesso em 11 de jun de 2009.

Chevallard, Y. *Organizer L´Etude. 1. Strutures & Fonctions*. In: Dorier, J.L et al.(eds). Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques-corps 21 -30 Août 2001, p. 3-22.

Chevallard, Y., Bosch, M.,& Gascón, Josep. *Estudar Matemáticas:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

Chevallard, Y. *Aspectos problemáticos de la formación docente*. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM), Escuela de Magisterio de Huesca, Universidad de Zaragoza, 1 de abril de 2001.

Crowley, M. L. *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico***.** In:LINDQUIST, M. M., & Shulte, A. P. (orgs.). Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994.

Fetissov, A. *A Demonstração em Geometria*. Moscou: Editora Mir, 1985.

Freitas, J. L. M. *L´ativité de validation lors du passage de l´arithmétique à l´algèbre: une étude des types de preuves produites par les élèves de collège/lycée.* Université Montpelier II, 1993. Tese (doutorado).

Garnica, A. V. M. *Fascínio da técnica, declínio da crítica*: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. Rio Claro, SP: UNESP-Instituto de Geociência e Ciência Exatas, 1995. Tese (doutorado).

Lakatos, I. *A Lógica do Descobrimento Matemática*: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

Leandro, E. J. *Um panorama de argumentação de alunos de educação básica***:** o caso do fatorial. Dissertação de Mestrado Profissional. São Paulo: PUC-SP, 2006. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca /arquivo.php? codArquivo=5067 > Acesso em: 11 outubro 2007.

Meyer, B. *A arte de argumentar*. São Paulo:WMF Martins Fontes, 2008.

Oléron, P. *L´Argumentation*. 2 ed. Paris: PUF, 1987.

Osório, V. L. *"Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática"***.** Querétero, México: Universidad Autónoma de Querétaro, 2000. Tese de maestria. Disponível<http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.htm > Acesso em: 23 maio 2008.

Pedemonte, B.. *Etude didactique et cognitive des rapportes de l´argumentation et de la démosntration dans l´aprentissagem des mathetmatiques.* Grenoble,Fr:Université Joseph Fourier-Grenoble I; Gênova, It: Université de Genova, 2002.Tese (doutorado).

Pietropaolo, R. C. *(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.* São Paulo: PUC/SP, 2005. Tese (doutorado).

Plantin, C. *A argumentação*. São Paulo: Parábola Editorial, 2008.

Robotti, E. *Le Role de la Verbalization entre les Aspects Figuarux et Théorique dans le Processus de Démonstration d´un Probléme de Géometrie Plane.* Grenoble,Fr:Université Joseph Fourier-Grenoble I; Gênova, It: Université de Genova, 2002. Tese (doutorado).

Sales, A. *Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática.* Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS, 2010. (Tese de doutorado)

Toulmin, S. E. *Os usos do argumento*. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

Vigo, V. M. *Lugares Geométricos: cual es su rol en la ensenanza de la demonstración em geometria?* México, DF: IPNCICATA, 2006. Dissertação de mestrado. Disponível em < http://itzamna.bnct.ipn.mx:8080/dspace/bitstream /123456789/1567/1/1462_2006_CICATA-LEGARIA_MAESTRIA_molfino_ vigo_veronica. pdf >Acesso em: 19 jul 2009.