El papel del conocimiento de matemáticas en la identificación de la comprensión de los estudiantes: el significado de razón

Àngela **Buforn**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante
angela.buforn@ua.es
Ceneida **Fernández**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es
Salvador **Llinares**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante
sllinares@ua.es

Resumen

Este estudio se centra en examinar el papel del conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro (EPM) cuando piensan en el aprendizaje de la idea de razón en estudiantes de educación primaria. 92 EPM resolvieron una tarea formada por problemas y 3 respuestas a cada problema de estudiantes de educación primaria que mostraban diferentes características de la comprensión de la idea de razón. Los EPM tuvieron que responder a 4 cuestiones profesionales considerando estas diferentes respuestas. Los resultados muestran que la manera en que los EPM comprendían el concepto de razón influía en lo que consideraban el objetivo de aprendizaje del problema planteado, en la interpretación de la comprensión de los estudiantes de primaria y en cómo sugerían modificar el problema para ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión del concepto de razón.

Palabras clave: mirada profesional, comprensión de los estudiantes, razón, conocimiento del profesor

Introducción

El desarrollo del razonamiento proporcional entendido como *la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades* (Lamon, 2005) es un objetivo en el currículo de Educación Primaria y Secundaria. Este desarrollo conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que van desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo. La razón es vista así como una función de un par de números ordenados o valores de una magnitud. La dificultad en la comprensión de esta idea radica en que al asimilarla a un cociente pierde su significado funcional y la posibilidad de considerar la equivalencia $a : b = c : d$ (Freudenthal, 1983). Además, investigaciones recientes indican que la enseñanza de la idea de razón y proporción que subyacen en el desarrollo del razonamiento proporcional no es una tarea fácil para los maestros (Livy & Vale, 2011; Rivas, Godino, & Castro, 2012; Valverde & Castro, 2009). Un factor clave en el desarrollo de una enseñanza eficaz de estos conceptos es la manera en la que el maestro dota de significado a la idea de razón (conocimiento de matemáticas del profesor). Además, este conocimiento es clave en el desarrollo de competencias docentes relativas a la organización del contenido matemático para enseñarlo, en el análisis y valoración de las tareas matemáticas como mediadoras del aprendizaje y en la interpretación de las producciones matemáticas de los alumnos (professional noticing).

Competencia profesional: Interpretar la comprensión de los estudiantes de primaria

Investigaciones recientes indican que la competencia docente *mirar profesionalmente* la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en que los maestros sean capaces de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos para poder tomar decisiones de enseñanza debidamente fundamentadas (Mason, 2002; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2010). Un aspecto particular de esta competencia es mirar profesionalmente la comprensión de los estudiantes, entendida como la competencia de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de tópicos matemáticos específicos para tomar decisiones pertinentes como maestros (Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros, & Valls, 2014; Fernández, Llinares, & Valls, 2012; Fortuny & Rodríguez, 2012; Morris, Hiebert, & Spitzer, 2009).

Los trabajos previos han mostrando que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos (conocimiento matemático) le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de su comprensión de un tópico matemático. Estos estudios subrayan, la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; Fernández et al. 2012; Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2014; Yesildere-Imre & Akkoç, 2012). Por lo tanto un elemento clave en la competencia docente *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes es la capacidad del maestro de desempaquetar los elementos matemáticos y los mecanismos cognitivos que definen la comprensión conceptual del tópico particular key developmental understanding (KDU), Simon, 2006). El objetivo de este estudio es caracterizar la manera en la que los estudiantes para maestro “desenpaquetan” los significados de la idea de razón cuando intentan reconocer evidencias de diferentes niveles de comprensión en los estudiantes de primaria.

El razonamiento proporcional y sus componentes

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente.) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento *up and down* y *unitizing*). A partir de esta caracterización, Pitta-Pantazi y Christou (2011) han añadido: la capacidad de resolver problemas proporcionales de valor perdido y la capacidad de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales. Estos autores indican que las tareas de determinar si los contextos son proporcionales o no y las tareas proporcionales de valor perdido pueden proporcionar información relevante sobre el conocimiento de matemáticas relativo al razonamiento proporcional puesto de manifiesto por los resolutores (Tjoe & de la Torre, 2014). Esta conceptualización del razonamiento proporcional define 12 elementos que los maestros deben considerar cuando intentan reconocer evidencias de la comprensión en sus estudiantes.

El conocimiento del estudiante para maestro de las diferentes interpretaciones de los números racionales y de la relación con las formas de razonar constituye el fundamento sobre el que se debería desarrollar la competencia docente de reconocer evidencias del desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. La hipótesis asumida aquí es que esta competencia docente se apoya en la intersección del conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden. D. Ball y sus colaboradores lo denominaron conocimiento de matemáticas y de los estudiantes -Knowledge of Content and Students, KCS- (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Desde la perspectiva del aprendizaje P. Sztajn y su colegas (Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012) enfatizaron que este conocimiento era relativo a conocer las formas de pensar matemáticamente más o menos sofisticadas de los estudiantes. Esto implicaba conocer los pasos cognitivos que apoyan el desarrollo conceptual de la noción razón y los diferentes niveles de comprensión puestos de manifiesto por los estudiantes al resolver problemas en relación a esta noción. Además, había que tener en cuenta el conocimiento del maestro de las maneras de apoyar formas de pensar matemáticamente cada vez más sofisticadas (desarrollo conceptual) en los estudiantes. Que el estudiante para maestro conozca diferentes maneras de apoyar el desarrollo conceptual implica conocer las características de las tareas que pueden apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Teniendo en cuenta estas referencias, en nuestro estudio nos centramos en intentar caracterizar la manera en la que estudiantes para maestro reconocen los elementos matemáticos relevantes en el desarrollo del razonamiento proporcional. Su reconocimiento podría ayudarles a identificar diferencias en la comprensión mostrada por los estudiantes al resolver los problemas y a proponer tareas que apoyen el desarrollo del razonamiento proporcional. En esta comunicación nos centraremos en el subconstructo razón entendida como la relación multiplicativa entre dos cantidades (Freudenthal, 1983; Pitta-Pantazi & Christou, 2011). Este subconstructo es de especial relevancia para el proceso que implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para comparar (después de elegir una unidad e, la clase de equivalencia del par (a,b) puede ser expresado mediante un número u (un valor de magnitud) tal que $a:b = u:e$ (Freudenthal, 1983). Por ejemplo en el problema *La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?* se podría tomar como unidad de referencia cuánto vale 1kg en cada una de las cajas o cuánto cuestan 4 kg en cada una de ellas. Comprender el papel que desempeña el significado de razón en el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes de educación primaria es un elemento relevante que debe ser conocido por los maestros al ser el fundamento del desarrollo de su competencia docente. Considerando estos aspectos, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿cómo los estudiantes para maestro comprenden el significado de razón y cómo influye dicha comprensión en identificar la comprensión de los estudiantes?
- ¿qué decisiones de acción proponen los estudiantes para maestro tras la identificación de la comprensión de los estudiantes y cómo influye su comprensión del significado de razón en estas decisiones?

Método

Participantes y contexto

Los participantes fueron 92 estudiantes para maestro (EPM) de Educación Primaria matriculados en un programa de formación inicial. Estos estudiantes habían cursado previamente una materia centrada en el desarrollo del Sentido Numérico y otra centrada en el Sentido Geométrico. En el momento de la recolección de datos, los EPM estaban cursando una asignatura sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Los contenidos de esta materia son las características del contenido matemático, del aprendizaje de los estudiantes de educación primaria y de la enseñanza en diferentes dominios matemáticos: números y operaciones, geometría, medida y tratamiento de la información. Los datos fueron recolectados después de haber estudiado el bloque de números y operaciones donde está incluido el tópico del razonamiento proporcional.

Instrumento de recolección de datos

Los estudiantes para maestro respondieron a una tarea formada por 12 problemas de Educación Primaria que se correspondían con cada una de las componentes consideradas en la conceptualización del razonamiento proporcional y tres respuestas de estudiantes de primaria a cada uno de los problemas. Las respuestas de los estudiantes de primaria mostraban diferentes características del desarrollo del razonamiento proporcional. Con estos datos los estudiantes para maestro contestaron a cuatro cuestiones profesionales centradas en la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional. Las cuestiones son las siguientes:

a) ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta actividad? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas? Justifica tu respuesta.

c) Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la actividad para ayudarle a que comprendiese estos conceptos? Justifica tu respuesta.

d) Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la actividad para que aumente su comprensión de los conceptos matemáticos implicados? Justifica tu respuesta.

Las dos primeras cuestiones propuestas pedían a los estudiantes para maestro identificar los elementos matemáticos necesarios para resolver la actividad y justificar cómo consideraban que las tres respuestas de los alumnos de primaria podían reflejar diferentes niveles de comprensión de la noción de razón. En las otras dos cuestiones se les pedía proponer decisiones de acción (modificar la tarea) para que el estudiante pudiera alcanzar la comprensión de los contenidos matemáticos implicados (es decir, del objetivo de aprendizaje identificado) o afianzarlo en el caso de asumir que las respuestas dadas mostraban una comprensión adecuada.

En esta comunicación nos centraremos en la manera en la que los estudiantes para maestro usaban el conocimiento de matemáticas, sobre los estudiantes y sobre la enseñanza en relación a la componente razón. El problema usado para esta componente y las respuestas de los estudiantes de primaria se muestran en la Figura 1.

1. En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:
   a. 7.5 metros por 11.4 metros
   b. 4.55 metros por 5.08 metros
   c. 18.5 metros por 24.5 metros

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\quad \frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales

Respuesta 3

* El cuadrado se caracteriza por tener sus lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tengan menos distancia de metros, es decir:

$\begin{array}{r} 11'4 \\ -7'5 \\ \hline 03'9 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 5'08 \\ -4'55 \\ \hline 0'53 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 24'5 \\ -18'5 \\ \hline 06'0 \end{array}$

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

Figura 1. Problema relacionado con la componente razón y las tres respuestas de estudiantes de primaria que formaban la tarea.

En este problema la razón puede ser vista como una medida (cuando la razón sea más próxima a 1 el loft será más cuadrado). En relación a las respuestas de los estudiantes de primaria, la respuesta 1 es de un estudiante de primaria que usa la razón entre los lados como medida de la *cuadratura*. En esta respuesta el estudiante calcula las razones e interpreta que el loft que tiene la razón más próxima a 1 es más cuadrado. Es decir, cuantifica la idea de ser más cuadrado en *ser más próximo a 1*. En la respuesta 2 el estudiante calcula las razones entre los lados pero proporciona una justificación basada en relaciones aditivas entre los lados. La expresión *existe menor diferencia, por lo que será más cuadrado al tener lados más iguales* lleva a pensar que el estudiante está considerando la diferencia entre los lados y lo próxima que está esta diferencia a cero (…*al tener los lados más iguales*). Finalmente, en la respuesta 3 el estudiante usa relaciones aditivas identificando *ser más cuadrado* como la diferencia menor entre los lados (es decir, la que se aproxima más a 0).

Análisis de los datos

Los datos de esta investigación son las respuestas dadas por los EPM a las cuatro cuestiones planteadas. En primer lugar, identificamos los contenidos matemáticos que los EPM consideraban implicados en el problema propuesto. La identificación de estos contenidos está relacionada con la manera en la que estos EPM comprendían el significado de razón y lo que consideraban el objetivo de aprendizaje pretendido al resolver el problema.

Para el análisis de cómo los EPM interpretaban las respuestas de los estudiantes (cuestión b) se observó si los EPM proporcionaban argumentos generales (por ejemplo basados en la corrección o no de la respuesta), si los EPM basaban sus argumentos en una simple descripción de la respuesta de los estudiantes o finalmente, si interpretaban la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

Para el análisis de las cuestiones c y d (decisiones de acción), se generaron de manera inductiva categorías que se fueron refinando a medida que el análisis iba progresando (estas categorías se muestran en el apartado de resultados). Los datos fueron analizados por tres investigadores discutiéndose los acuerdos y desacuerdos hasta llegar a un consenso.

Resultados

Los resultados muestran que la manera en que los EPM comprendían el concepto de razón (conocimiento matemático) influía en lo que ellos consideraban era el objetivo de aprendizaje del problema planteado, en la interpretación de la comprensión de los estudiantes de primaria y en las modificaciones de tarea que realizaban para ayudar a los alumnos a consolidar o mejorar su comprensión del concepto de razón. Tras el análisis, se han identificado que si los EPM comprendían el significado de razón como medida, generaban como objetivo de aprendizaje que los estudiantes de primaria fueron capaces de comparar las razones y ver cuál era la más próxima a 1. Desde este punto de vista muchos de ellos eran capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes y realizar modificaciones del problema para consolidar o mejorar la comprensión de los estudiantes. En cambio cuando los EPM solo identificaban en la tarea el concepto de razón sin tener una comprensión del significado de razón como medida, interpretaban la comprensión de los estudiantes de manera general o simplemente describiendo las respuestas. El hecho de no identificar el concepto de razón también influía en las modificaciones del problema que proponían.

Los EPM que identificaron el significado de razón como medida

Los EPM (27 EPM) que identificaron como contenido matemático implicado la razón como medida establecieron como objetivo de aprendizaje que los estudiantes de primaria fueran capaces de comparar las razones (desde los decimales) y ver cuál era la más próxima a 1 (loft más cuadrado). Por ejemplo, la respuesta del EPM en la cuestión (a) de la Figura 2.

> Es un problema de proporcionalidad, especificamente de comparación de razones, donde para realizar esta tarea debe conocer diferentes aspectos como: que los lados de un cuadrado son iguales y que la razón de proporcionalidad de los lados de un cuadrado es 1, por lo tanto, el resultado de la división de los lados de un rectángulo que se asemeje a un cuadrado debe ser próximo a 1.

Figura 2. Respuesta de un EPM que identificó el significado de razón como medida.

12 de ellos solo describieron lo que había hecho el estudiante de primaria sin aportar ninguna interpretación sobre la comprensión. Una respuesta de este tipo es la del EPM de la Figura 3.

b) Ha realizado la razón de cada medida y, el se aproxima a 1 es el correcto, ya que 1 será que sus lados son iguales.

b) Ha realizado la razón de toda medida y, como 0'896 es más próximo a 1 es más cuadrado al tener sus lodo más iguales.

b) Ha realizado la digerencia entre los lados y, la opción correcta es aquella que es menor.

Figura 3. Respuesta de un EPM a la cuestión (b) en la que solo describe la respuesta del estudiante.

Lo que les llevo a tomar las siguientes decisiones de acción siguientes:

- Para disminuir la dificultad de la tarea: el uso de números enteros (5 EPM), mayor diferencia entre los datos proporcionados (2 EPM), material manipulativo (1 EPM), no cambia el nivel (2 EPM), sin sentido (1 EPM) y en blanco (2 EPM).
- Para aumentar la dificultad de la tarea: el uso de razones más próximas (3 EPM), que dos lofts tengan la misma razón (1 EPM), cambiar a un contexto menos familiar (1 EPM), variar las magnitudes (algunas en metros y otras en cm, por ejemplo) (1 EPM) y sin sentido (6 EPM).

Sin embargo, 15 de los EPM aportaron información más allá de la mera descripción en relación a la comprensión de los estudiantes (cuestión b). Un ejemplo de este tipo de respuesta se puede observar en la Figura 4.

b) Respuesta 1: El alumno lleva a cabo la ejecución del problema de forma correcta, ya que comprende que es un problema proporcional y realiza una comparación de razones escogiendo como resultado la comparación que se acerca más a 1.

Respuesta 2: El alumno entiende que debe realizar una comparación de razones, pero no comprende que el resultado correcto es el que está más cercano a 1. Éste considera que el resultado correcto es aquella razón en la cual entre el numerador y denominador hay una menor diferencia.

Respuesta 3: El alumno no comprende que debe realizar una comparación entre las razones y lleva a cabo la realización de restas. En este caso considera que el resultado correcto es aquel en el cual los lados son más similares, es decir 5.08 y 4.55 ya que en el cuadrado todos los lados son iguales.

Figura 4. Respuesta de un EPM a la cuestión (b) en la que interpreta la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

Esto les llevó a tomar como decisiones de acción:

- Para disminuir la dificultad de la tarea: el uso de números enteros (5 EPM), razones enteras (1 EPM), soporte visual mediante la representación de los lofts (7 EPM), mayor diferencia entre los datos proporcionados (2 EPM), explicar el significado de razón y la aproximación a 1 para ser más cuadrado (3 EPM), contexto más familiar (1 EPM) y más cuestiones para reforzar (1 EPM).
- Para aumentar la dificultad de la tarea: el uso de números más altos (2 EPM), uso de porcentajes (1 EPM), que las razones sean mayores que 1 (1 EPM), el uso de razones más próximas (2 EPM), el uso de un contexto menos familiar (1 EPM), variar las magnitudes (1 EPM), propuestas que no amplían el nivel de dificultad (3 EPM), sin sentido (3 EPM) y en blanco (1 EPM).

De los EPM que identificaron como contenido matemático la razón como medida, más de la mitad de ellos fueron capaces de interpretar la comprensión de los estudiantes aportando evidencias y tomando decisiones de acción como el uso de número enteros, razones enteras o mayor diferencia entre los datos proporcionados para disminuir la dificultad de la tarea y el uso de números más altos, razones mayores que 1, o razones más próximas para aumentar la dificultad de la tarea. Los EPM que describieron (sin aportar evidencias de la comprensión de los estudiantes) tomaron más decisiones de acción sin sentido o en blanco.

Los EPM que no identificaron el significado de razón como medida

64 EPM solamente comentaron como contenidos matemáticos la idea de razón, comparación de razones o aspectos geométricos, sin hacer referencia a la razón como medida (los lados de los cuadrados son iguales por lo que la razón es 1, y hay que buscar la que más se aproxime a 1). La mayoría de los EPM pertenecen a este grupo. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.

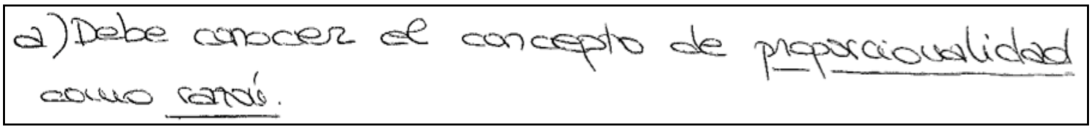
a) Debe conocer el concepto de proporcionalidad como razón.

Figura 5. Respuesta de un EPM a la cuestión (a) que no identificó el significado de razón como medida.

40 de los 64 EPM en la identificación de la comprensión de los estudiantes de primaria no justificaron o justificaron de manera general sin aportar ninguna información sobre la comprensión (Figura 6):

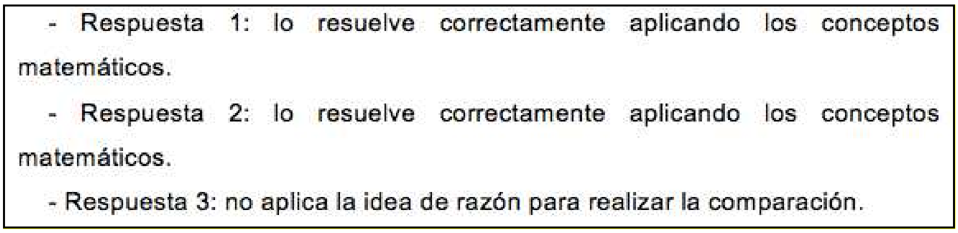
- Respuesta 1: lo resuelve correctamente aplicando los conceptos matemáticos.
- Respuesta 2: lo resuelve correctamente aplicando los conceptos matemáticos.
- Respuesta 3: no aplica la idea de razón para realizar la comparación.

Figura 6. Respuesta de un EPM a la cuestión (b) en la que justifica de manera general.

Lo que les llevó a tomar decisiones de acción como las siguientes:

- Para disminuir la dificultad: el uso de números enteros (16 EPM), el uso de números más pequeños (1 EPM), el uso de razones enteras (6 EPM), soporte visual (9 EPM), explicar el significado de razón y la aproximación a 1 para ser más cuadrado (5 EPM), contexto más familiar (2 EPM), no cambian el nivel (1EPM), sin sentido (4 EPM) y en blanco (6 EPM).

- Para aumentar la dificultad: el uso de razones más próximas (7 EPM), que los números dados tengan más decimales (centésimas o milésimas) (4 EPM), números más altos (4 EPM), uso de un contexto menos familiar (2 EPM), que las razones sean mayores que 1 (1 EPM), buscar el loft menos cuadrado (1 EPM), variar magnitudes (algunos en metros, otros en cm) (1 EPM), no cambia nivel (2 EPM), sin sentido (11 EPM) y en blanco (9 EPM).

Cabe destacar que 2 de estos EPM adoptaron una perspectiva aditiva en el sentido de que para ellos el loft más cuadrado era aquel cuya diferencia entre los lados se aproximaba más a cero. Sin embargo estos EPM justificaron sus respuestas de manera general sin aportar evidencias de la comprensión de cada uno de los estudiantes (Figura 7). En relación a las acciones que propusieron, se basaron en el uso de números enteros y soporte visual para facilitar la resolución de la actividad o el uso de números altos para aumentar la dificultad de la tarea.

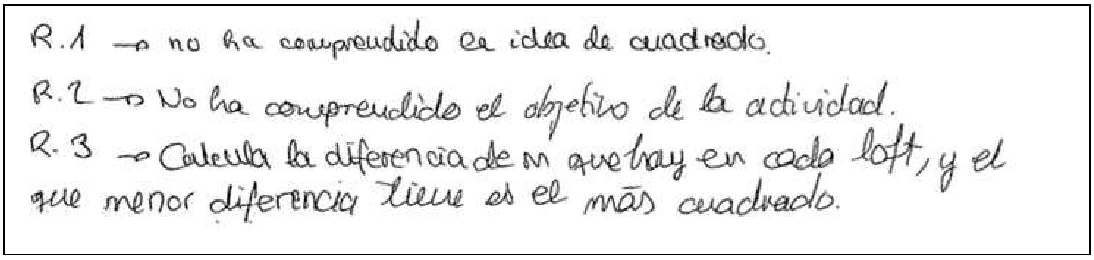
R.1 → no ha comprendido la idea de cuadrado.
R.2 → No ha comprendido el objetivo de la actividad.
R.3 → Calcula la diferencia de m que hay en cada loft, y el que menor diferencia tiene es el más cuadrado.

Figura 7. Respuesta de un EPM a la cuestión (b) en la que justifica de manera general (perspectiva aditiva)

24 EPM, a diferencia de los anteriores, dieron como justificación una descripción de las respuestas proporcionadas (Figura 8). Esto les llevó a tomar como decisiones de acción:

- Para disminuir la dificultad de la tarea: uso de números enteros (6 EPM), números más pequeños (3 EPM), razones enteras (3 EPM), soporte visual (6 EPM), explicar el significado de razón y la aproximación a 1 para ser más cuadrado (3 EPM), uso de un contexto más familiar (3 EPM), mayor diferencia entre los datos proporcionados (1 EPM), que un lado de los lofts sea igual (1 EPM), más cuestiones para reforzar (1 EPM), sin sentido (3 EPM) y en blanco (3 EPM).

- Para aumentar la dificultad de la tarea: uso de razones más próximas (4 EPM), razones impropias para ver la aproximación a 1 por arriba (1 EPM), números más altos (3 EPM), cambiar a otro contexto o figura (2 EPM), porcentajes (1 EPM), variar las magnitudes (unas en cm y otras en metros, por ejemplo) (2 EPM), propuestas que no cambian el nivel (1 EPM), sin sentido (7 EPM) y en blanco (5 EPM).

Respuesta 1: Realiza correctamente las proporciones mediante fracciones y se da cuenta que el más cuadrado será aquel que se aproxima más a 1.

Respuesta 2: Realiza correctamente las proporciones mediante fracciones pero solo indica oralmente que aquel que tenga menor diferencia será el más cuadrado.

Respuesta 3: Utiliza una estrategia aditiva en un problema de proporcionalidad ya que piensa que será más cuadrado aquel cuya diferencia entre lados sea menor y para conocer el resultado, resta las medidas de los lados.

Figura 8. Respuesta de un EPM a la cuestión (b) en la que describe la respuesta del estudiante.

Solamente 1 EPM no se pudo clasificar en ninguna de estas categorías ya que dejo toda la tarea en blanco.

Por tanto, ningún EPM que no identificó el significado de razón como medida, interpretó la comprensión de los estudiantes aportando evidencias. Casi dos terceras partes de estos EPM no justificaron o aportaron justificaciones generales basadas en la corrección de las respuestas. La otra tercera parte de los EPM aportaron justificaciones basadas en una propia descripción de la respuesta del estudiante. En relación a las decisiones de acción, hay más EPM que dan decisiones de acción sin sentido o lo dejan en blanco. Por otra parte, los que dan alguna decisión pertinente, en su mayoría se basan en usar números más grandes o más pequeños, algún soporte visual o insistir en la explicación del significado de razón como medida.

Discusión

El objetivo de esta investigación es aportar información sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas de los estudiantes para maestro cuando piensan en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria. Estudios previos han aportado información en otros dominios matemáticos como el álgebra (Magiera et al., 2013) o la derivada (Sánchez-Matamoros, et al. 2013). Nuestro estudio se centra en el significado de razón.

Los resultados muestran que cuando los EPM eran capaces de comprender el significado de razón como medida (conocimiento de matemáticas), más de la mitad de ellos también eran capaces de establecer objetivos de aprendizaje, interpretar la comprensión de los estudiantes aportando evidencias y aportar decisiones de acción pertinentes para aumentar o disminuir la dificultad de la actividad. Sin embargo, cuando no eran capaces de identificar el significado de razón como medida, la mayoría de ellos describían las respuestas de los estudiantes o se basaban en aspectos generales de la respuesta como la corrección sin aportar evidencias de la comprensión de los estudiantes. Esto les llevaba a proporcionar más decisiones de acción sin sentido o en blanco, o basadas en la magnitud del número.

Estos resultados sugieren que comprender el significado de razón como medida fue un elemento clave (Simon, 2006) para llegar a reconocer las diferentes características de la comprensión de los estudiantes, y las decisiones de acción. Estos resultados están en la línea de los estudios previos que indican que la identificación del estudiante para maestro de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos (conocimiento matemático) le permite estar en mejores condiciones para reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de un tópico matemático y poder seleccionar e identificar las actividades para promover el aprendizaje de los estudiantes (Bartell et al., 2013; Fernández et al., 2012; Magiera et al., 2013; Sánchez-Matamoros, et al. 2013; Yesildere-Imre & Akkoç, 2012).

Estos resultados aportan información relevante para los programas de formación inicial en el sentido de que nuestro instrumento puede ofrecer oportunidades para incidir en los elementos clave que les permitirá desarrollar la competencia profesional.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana

Referencias y bibliografía

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389-407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., & Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747-759.

Freudenthal, H. (1983). Ratio and Proportionality. En H. Freudenthal, *Didáctical Phenomenology of Mathematical Structures* (pp. 178-209). D. Reidel Publishin Co.: Dordrecht.

Fortuny, J. M. & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Livy, S., & Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London: Routledge Falmer.

Morris, A.K., Hiebert, J., & Spitzer, S.M. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can preservice teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40(*5), 491-529.

Pitta-Pantazi,D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education.* doi: 10.1007/s10763-014-9544-y

Simon, M.A. (2006). Key Developmental Understandings in Mathematics: A Direction for Investigating and Establishing Learning Goals. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 359-371.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajetgory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching. *Educational Researcher, 41*(5), 147-156.

Tjoe, H., & de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 1-7.

Valverde, A., & Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

Yesildere-Imre, S., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.