VIGILANCIA EPISTEMOLÓGICA DE FORMA Y MEDIDA EN GEOMETRÍA

Victor Barrial Sandoval
vbarrialsandoval@gmail.com

Universidad Nacional del Callao, Perú

Resumen

El presente taller tiene como objetivo analizar las dificultades que presentan los docentes del nivel escolar cuando realizan actividades de aprendizaje sobre la semejanza en la geometría euclidiana, abordaremos dos conceptos importantes de fundamentos matemáticos: Las figuras semejantes y las figuras congruentes aplicadas a triángulos, curvas, polígonos y algunos sólidos. Los docentes participantes podrán generalizar formalmente la definición de semejanza y congruencia la cual en forma tradicional solo la tenemos definida para triángulos. Esta forma tradicional es la que se emplea del Libro VI de los Elementos de Euclides. En el taller partimos de la demostración de la semejanza de segmentos, de cuadrados, de circunferencias y de algunos sólidos. Tomando algunas actividades del libro de Lages (2001) y resolveremos ejercicios de olimpiadas ONEM e Internacionales. Al concluir esperamos que la noción de Semejanza y Congruencia se aplicada de una forma más universal en las aulas de matemática.

Palabras clave: semejanza, congruencia, demostración, didáctica.

Introducción

En experiencias anteriores durante el desarrollo de los cursos de capacitación que se desarrolló en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática (FCNM) de la Universidad Nacional del Callao (UNAC) en Convenio con la Dirección Regional de Educación del Callao (DREC), se ha podido constatar que no siempre los docentes participantes son conscientes que entre la matemática y la versión didáctica de la matemática hay una distancia, muchas veces enorme, y que inclusive, la evolución vertiginosa de la matemática académica, frecuentemente, no se toma en cuenta en su versión didáctica, entonces frente a esta situación se propone realizar un trabajo basado en demostraciones y definiciones formales en el tema de semejanza y congruencia de figuras planas, partiendo de esta experiencia vamos a realizar una "Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría", el cual es el título de nuestro taller. Analizando esta situación, vamos a comparar la diferencia entre la definición de Euclides que data desde hace más de 2300 años en su obra los Elementos de Euclides, en su libro VI, donde comienza con la siguiente definición:

> *"Figuras rectilíneas semejantes son aquellas cuyos ángulos son iguales y los lados que comprenden ángulos iguales son proporcionales".*

En el libro XI, donde comienza a ser estudiada la geometría del espacio ocurre una nueva definición: *"se llaman figuras sólidas semejantes a las figuras limitadas por un número igual de figuras planas semejantes". (Lages, 2001).*

En virtud del desarrollo de la matemática presentaremos una definición más formal y adecuada del tópico de semejanza del libro de Verástegui (2012).

Objetivos del taller

El presente taller denominado: "Vigilancia Epistemológica de Forma y Medida en Geometría" es una capacitación docente para la especialización de docentes en el uso de los principios matemáticos de la geometría, evidenciando el lenguaje matemático idóneo para su construcción y formulación de estrategias didácticas en los problemas de construcción.

Objetivo general:

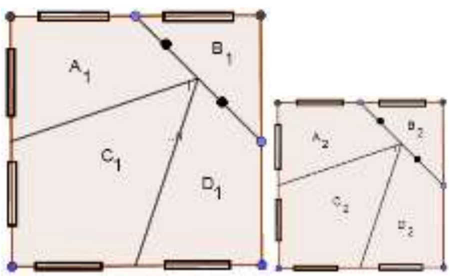
- Capacitar docentes de matemáticas en las principales herramientas matemáticas para el análisis de la semejanza y la congruencia de figuras geométricas.

Objetivos específicos:

- Analizar y comparar la definición de Euclides para la semejanza y la definición moderna.
- Dar argumento matemático a muchas ideas intuitivas de semejanza tales como: ¨Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero distinto tamaño¨.
- Demostrar teoremas fundamentales a partir de la definición de semejanza.
- Dar herramientas de construcción para la resolución de ejercicios en congruencia de triángulos.

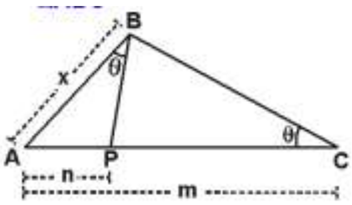
Diseño e implementación del taller:

1. A partir de dos hojas en forma de cuadrado de lados de distinta medida, vamos a generar polígonos semejantes y congruentes, además de los polígonos semejantes vamos a calcular la contante de proporcionalidad.



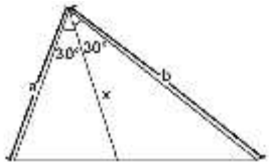
2. Vamos revisar la definición clásica de Euclides para la semejanza de figuras planas y aplicadas a triángulos.
3. Demostraremos algunos teoremas donde se usa semejanza de triángulos.

3.1. En la figura mostrada $\overline{BP}$ es ceviana interior, si la $m\measuredangle ABP = m\measuredangle ACB$.



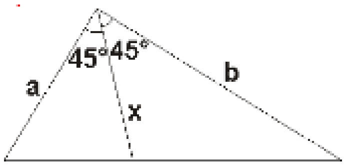
Se cumple: $x^2 = m.n$

3.2. En la figura. Mostrada



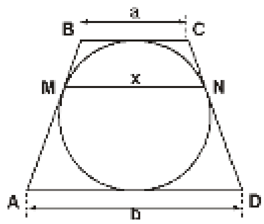
Se cumple: $\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.3. En la figura. Mostrada



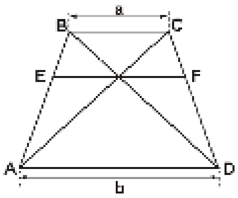
Se cumple: $\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.4. En todo trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia cuyas bases miden a y b. M, N puntos de tangencia



Se cumple: $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

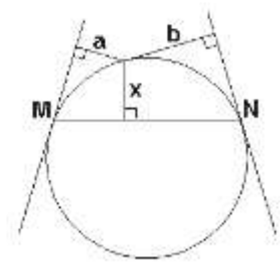
3.5. En un trapecio, si por el punto de intersección de las diagonales se traza una paralela a las bases, $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$



3.6. Se cumple: : $\frac{2}{EF} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3.7. **Teorema de PAPUSS:** El cuadrado de la distancia de un punto del arco de una circunferencia a su cuerda correspondiente es igual al producto de las distancias de dicho punto a las tangentes trazadas por los extremos de la cuerda.

Si M y N son puntos de tangencia



Se cumple: $x^2 = a.b$

4. Daremos paso a la definición matemática moderna de semejanza:

Sean F y $F^/$ figuras, del plano o del espacio, y r un número real positivo.

Se dice que F y $F^/$ son semejantes, con razón de semejanza r, cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma: F \rightarrow F^/$, entre los puntos de F y los puntos de $F^/$, con la siguiente propiedad:

Si X, Y son puntos arbitrarios de F y $X^{/} = \sigma(X), Y^{/} = \sigma(Y)$ son sus correspondientes en $F^{/}$ entonces: $(X^{/}\, Y^{/}) = r\ (XY)$

La correspondencia biyectiva de $\sigma: F \rightarrow F^{/}$, con esta propiedad de multiplicar la distancia por un factor constante r, se llama semejanza de razón r entre F y $F^{/}$. Si $X^{/} = \sigma(X)$, se dice que los puntos X y $X^{/}$ son homólogos.

5. Usando la definición de semejanza, mostraremos la definición formal de figuras congruentes:

   Una semejanza de razón 1 se llama isometría. Por lo tanto, una isometría

   $\sigma: F \rightarrow F^{/}$ Es una correspondencia biyectiva tal que, para puntos cualesquiera X, Y en F, la distancia de $X^{/} = \sigma(X)\ a\ Y^{/} = \sigma(Y)$ es igual a la distancia de X a Y.

   Cuando existe una isometría entre dos figuras F y $F^{/}$ se dicen que son congruentes.

La congruencia entre dos objetos geométricos se sustenta en la definición de la medida de segmentos, de modo que tomados dos puntos de un objeto si se toman los puntos correspondientes a estos en el otro objeto, y estos tienen la misma medida, y esto se cumple para cualquier par de puntos, entonces, los dos objetos son congruentes. (Jara, 2015)

6. Usando la definición formal de semejanza demostraremos los siguientes teoremas:

6.1. Dos segmentos de recta dados son semejantes (de la misma manera se prueba que dos semirectas cualesquiera son semejantes)

6.2. Toda semejanza transforma puntos colineales en puntos colineales.

6.3. Dado una semejanza $\sigma: F \rightarrow F^{/}$, de razón r, transforma:

   A) Todo segmento de recta contenido en F en un segmento de recta contenido en $F^{/}$

   B) Un círculo de radio a contenido en F en un círculo de radio r.a contenido en $F^{/}$

   C) Puntos interiores a F en puntos interiores a $F^{/}$

   D) Puntos de contorno de F en puntos de contorno de $F^{/}$

6.4. Mostraremos algunos criterios de construcción para resolver ejercicios de congruencia de triángulos. Formaremos grupos de 4 o 5 personas para analizar los ejercicios propuestos en las fichas.

6.5. Mostraremos a los profesores asistentes ejercicios de congruencia de triángulos y de semejanza de triángulos que se hallan evaluado en olimpiadas matemáticas de ONEM u olimpiadas internacionales. Formaremos grupos de 4 o 5 personas para analizar los problemas de olimpiadas matemáticas:

La primera sesión del taller abordará los partes 1, 2 y 3; la segunda sesión abordará la parte 4, 5 y 6.

Resultados esperados: En el presente taller, se espera que los docentes participantes logren utilizar las técnicas de construcción para resolver problemas complejos de congruencia de triángulos y le sirva como un apoyo en sus clases de matemáticas porque

Razonar en geometría es razonar con figuras mal hechas (Hilbert, 1899)

La geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal (Poincare, 1879)

Esperamos que, al culminar el taller, los docentes:

- Logren comprender la naturaleza matemática de la semejanza y congruencia de figuras geométricas.
- Comprendan la diferencia entre postulados, definiciones y teoremas.
- Reconozcan los criterios de construcción para la resolución de ejercicios en triángulos congruentes.
- Que noten con naturaleza la diferencia entre congruencia e igualdad de las figuras geométricas.
- Se motiven a investigar mayor cantidad de ejercicios de olimpiadas matemáticas y puedan mostrarlo a sus estudiantes en su práctica docente.

Consideraciones finales

El Ministerio de Educación (Minedu, 2016) de nuestro país nos propone como guía de nuestras actividades educativas al Currículo Nacional de la Educación Básica, en los estándares de aprendizaje, competencias, capacidades y desempeños del área de matemática para quinto de secundaria, en el cual la competencia resuelve problemas de forma, movimiento y localización en una de sus capacidades: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones, propone que el estudiante debe ser capaz de:

> Construir un modelo que reproduzca las características de los objetos (Semejanza de figuras), su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y transformaciones en el plano.

Ante esta propuesta, los docentes deben capacitarse para cumplir de forma efectiva esta competencia y para lograr ser docente especialista en el área, un requisito fundamental para ser docente del siglo XXI.

Referencias

Verástegui T. I. (2012). *Geometría básica* (2a ed.), MOSHERA S.R.L. 2012.

Lages E. (2001). *Medida y Forma en Geometría*, HOZLO S. R. L. 2001.

Minedu (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf

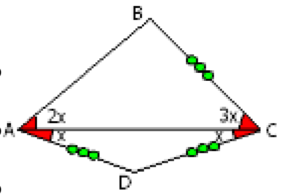
Jara, R. (2015). Análisis de los diferentes significados de la igualdad en el contexto de la geometría euclidiana en el nivel secundaria – 2015 (Tesis de maestría). Pontificia universidad católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/6752/JARA_SANCHEZ_RUBEN_ANALISIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Anexos

- ✓ **Recursos:** Proyector, Ecran, Pizarra, Tizas de colores, Mota, Hojas de colores, Hojas blancas, Reglas, Fichas de ejercicios.

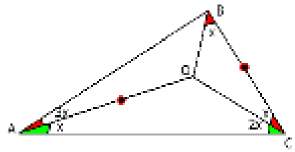
A continuación, se presenta una ficha de ejercicios de gran importancia para el tratado de los problemas.

1. Del gráfico mostrado, calcula: “x”



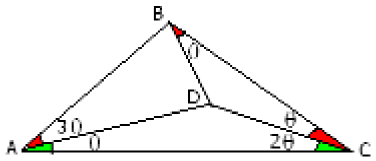
a) 10º
b) 15º
c) 12º
d) 20º
e) 25º

2. De la figura mostrada, calcula “x” si AO=BC.



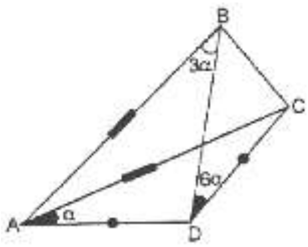
a) 5º b) 10º c) 15º
d) 20º e) 30º

3. En la figura: AD=BC. Calcular “θ”.



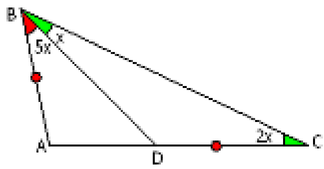
a) 10° b) 15° c) 20°
d) 30° e) 22,5°

4. De la figura, calcula: “α”, si AB=AC y AD=DC.



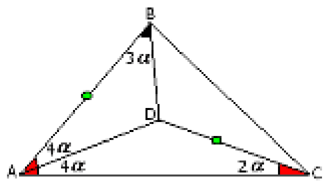
a) 10º b) 15º c) 20º
d) 30º e) 37

5. Del gráfico mostrado, calcula: “x”



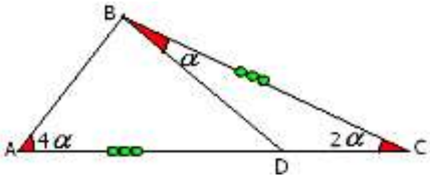
a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 5º
e) 15º

6. De la figura mostrada, calcula “α”



a) 20º
b) 10º
c) 15º
d) 18º
e) 5º

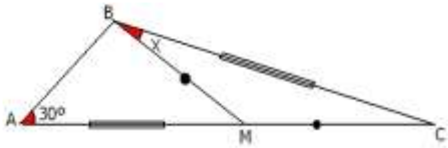
7. Del gráfico mostrado, calcula: " α "



a) 5º b) 10º c) 15º

d) 20º e) 30º

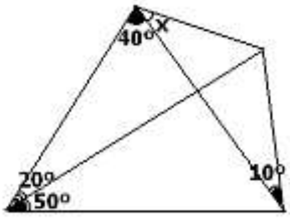
8. De la figura, calcula "x" si AM=BC y BM=MC



a) 20º b) 30º c) 50º

d) 45º e) 60º

9. Del gráfico, calcular "x"



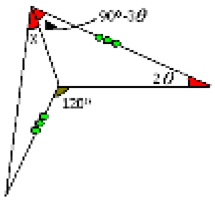
a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 30º
e) 36º

10. En un triángulo ABC isósceles (AB=BC) se traza la ceviana $\overline{AF}$ tal que BF=AC. Si la m∠ABC=20º entonces ¿cuál es la m∠BAF?

a) 5º b) 10º c) 15º

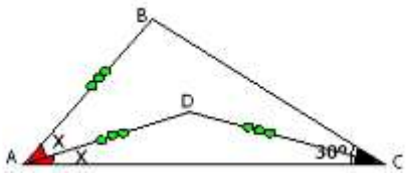
d) 20º e) 30º

11. Del gráfico, calcula: "x"



a) 10º
b) 20º
c) 30º
d) θ
e) 2θ

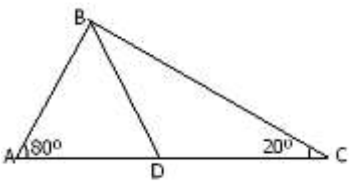
12. Del gráfico, calcula: "x"



a) 22º b) 12º c) 15º

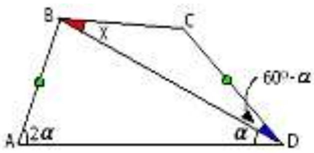
d) 20º e) 30º

13. Del gráfico, calcula la m∠CBD, si AB=CD



a) 5º
b) 10º
c) 15º
d) 20º
e) 30º

14. Del gráfico, calcula: "x"



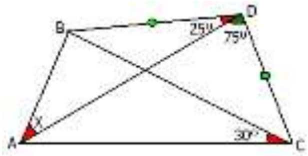
a) 18º
b) 20º
c) 30º
d) 37º
e) 45º

15. n un triángulo ABC, m∠BAC= 30º, m∠BCA=15º. Se toma un punto "P" exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que PC=AB y m∠BCP=45º. Calcula la m∠PBC.

a) 15º b) 18º c) 22º30´

d) 30º e) 40º

16. Del gráfico, calcula: "x"



a) 18º

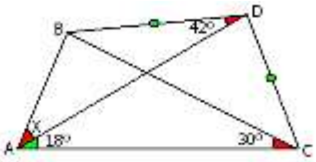
b) 20º

c) 25º

d) 30º

e) 45º

17. De la figura mostrada, calcula: "X"



a) 15º

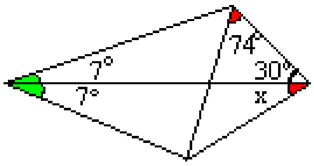
b) 22º

c) 28º

d) 30º

e) 36º

18. De la figura mostrada, calcula: "x"



a) 20º

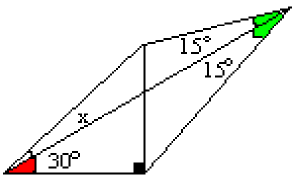
b) 23º

c) 35º

d) 45º

e) 37º

19. Del gráfico mostrado, calcula: "x"



a) 53º

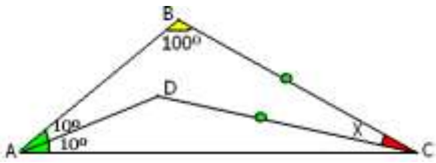
b) 23º

c) 35º

d) 15º

e) 37º

20. Del gráfico mostrado, calcula: "x"



a) 10º b) 20º c) 30º

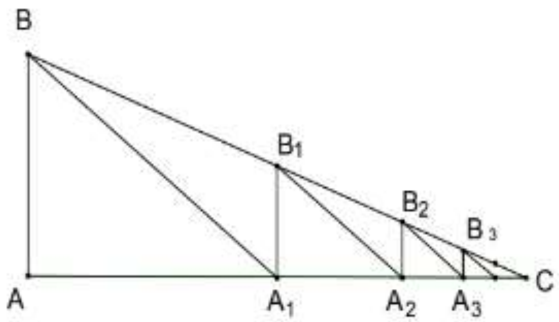
d) 40º e) 60º

Problemas de olimpiadas:

ONEN 2006 fase 2 – nivel 3

En el diagrama, ABC es un triángulo rectángulo con catetos AB=3 cm y AC=8 cm. A_1 es punto medio de AC y los segmentos $BA_1, B_1A_2, B_2A_3, \dots B_8A_9$ son paralelos entre sí. Además los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_9B_9$ son perpendiculares a AC. Encuentra el valor de:

$$2^9(BA_1 + B_1A_2 + \cdots + B_8A_9)$$



ONEN 2007 fase 1 – Nivel 2

En el interior de un triángulo ABC se toma el punto E tal que AE=BE y AB=EC. Si $m\angle ABE = x = m\angle ECA$; $m\angle EAC = 2x$ y $m\angle EBC = 5x$, calcula el valor de x.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 20°

ONEN 2007 fase 2 – nivel 3

Las longitudes de los lados de un triángulo ABC son AB= 7, BC= 9 y AC= 12. $\overleftrightarrow{L_1}$ es la bisectriz interior del ángulo A y $\overleftrightarrow{L_2}$ la bisectriz exterior del ángulo C. M y N son los pies de las perpendiculares trazadas desde B a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ respectivamente. Calcula la longitud de MN.

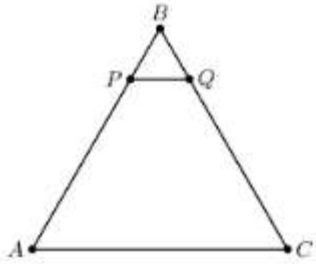
A) 2 B) 5 C) 7 D) 8 E) 14

ONEN 2017 fase 3 – nivel 2

En un cuadrilátero ABCD se cumple que $m\angle BAD = 60°, m\angle ABC = 100°$, AB=BC y AD=BC+CD. Calcule la medida del ángulo $\angle ACD$

ONEN 2018 fase 2 – nivel 2

En la figura mostrada, ABC es un triángulo equilátero de perímetro 90 cm. Además, los segmentos P Q y AC son paralelos. Calcule la suma de los perímetros de los polígonos PBQ y APQC en cm), si se sabe que estos números están en la relación de 3 a 14



Internacionales

(Canarias, 2003)	(Rumania 1968)
Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que AB = CH. Determinar el valor del ángulo BCA.	Demuestra que solo existe un triángulo cuyos lados vienen dados por tres enteros positivos consecutivos y un ángulo es dos veces otro ángulo.

Links:

1. https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria3.pdf
2. http://www.unicauca.edu.co/eventos/index.php/educoloquio/2016/paper/viewFile/396/213
3. https://onemperu.wordpress.com/pruebas/