VISUALIZACIÓN DE CUADRILÁTEROS: MEDIACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Cecilia Gómez Mendoza*
Flor Isabel Carrillo Lara**
Rocío Figueroa Vera**
Gustavo Rodríguez T.***
cegomez@villacaritas.edu.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, rfigueroa@villacaritas.edu.pe, gustavo.rodriguez@stgeorges.edu.pe

Colegio Villa Caritas, Perú*
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú**
Saint George College, Perú***

Resumen

El taller tiene como objetivo desarrollar el proceso de visualización a partir del estudio de cuadriláteros en el registro figural dinámico, en la formación de profesores del nivel secundario y superior. Como marco teórico utilizamos la Teoría de Registros de Representación Semiótica, focalizando nuestro interés en los tratamientos en el registro figural. El desarrollo del taller seguirá la siguiente metodología de trabajo: construyen cuadriláteros empleando GeoGebra, mediante el uso de la función "arrastre" observan y analizan su configuración y propiedades, y lo expresan empleando el lenguaje verbal y/o simbólico. Se espera que los participantes desarrollen y coordinen su aprehensión perceptiva y operatoria empleando para ello, diferentes tratamientos en el registro figural dinámico, con ayuda del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra.

Palabras clave: Visualización, cuadriláteros, reconfiguración, GeoGebra.

Introducción

A partir de las dificultades y errores que observamos en los estudiantes cuando desarrollan problemas de Geometría, surge nuestro interés en diseñar actividades con el fin de desarrollar el proceso de visualización, en el estudio de cuadriláteros, cuando se utiliza el registro figural dinámico en un grupo de profesores de educación secundaria, ya que son ellos los que van a trabajar directamente con los estudiantes, presentar el contenido y diseñar sus estrategias de enseñanza. Nos basamos en la Teoría de Registro de Representación Semiótica y su ampliación a la visualización de Duval (2011). En ese sentido, el autor afirma que la deconstrucción dimensional constituye el proceso central de la visualización en geometría que se da con el desarrollo de la aprehensión perceptiva y operatoria, en el registro figural en coordinación con la aprehensión discursiva.

En esa misma línea de pensamiento, las investigaciones realizadas en el área de Educación Matemática en Geometría por Almeida (2007), Flores y Moretti (2006) y Salazar (2018) muestran que existe la necesidad de desarrollar en los sujetos habilidades visuales que les permitan ver en una representación la forma y posición, a fin de que pueda descomponer una figura en subfiguras para luego asociarlas. Según los autores, la falta de estas habilidades origina errores en la resolución de problemas de geometría; además, propician interferencias entre el objeto matemático y su representación; es decir, se da mayor importancia a lo visual que a lo conceptual. Con respecto a la influencia de los ambientes de geometría dinámica (AGD), Laborde (1994) y Larios (2006) señalan que su empleo influye en la lectura espacial del objeto geométrico representado; es decir, facilita la identificación de todas las propiedades del objeto. Además, Salazar (2009), Vara y Salazar (2018) afirman que una de las funciones que caracteriza a estos ambientes es la función "arrastre", cuyo uso proporciona diferentes posiciones y configuraciones de una misma figura, además de permitir realizar tratamientos de manera diferente a los que se efectúan en ambientes no dinámicos, a partir de ello, la autora define el registro figural dinámico.

Por todo lo expuesto, en este taller proponemos dos actividades: la primera sobre paralelogramos y la segunda sobre configuraciones y reconfiguraciones.

Diseño e Implementación del taller: Visualización de cuadriláteros

Para el diseño de nuestro taller se consideran las actividades 1 y 2 de Gómez (2015), que procedemos a describir. Dichas actividades se realizan en un laboratorio de informática que cuente con el software Geogebra, con un tiempo de duración de 1 hora y 30 minutos horas cada una.

En la primera sesión, organizamos la sesión de la siguiente manera:

- Inducción: 20 minutos
- Explicación y desarrollo de la actividad 1: 40 minutos
- Reflexiones matemática, didáctica y tecnológica: 20 minutos

En la segunda sesión, organizamos la sesión de la siguiente manera:

- Introducción y explicación de la actividad 2: 20 minutos
- Desarrollo de la actividad 2: 40 minutos
- Reflexiones matemática, didáctica y tecnológica: 20 minutos

En la siguiente tabla se presentan la descripción de las actividades.

Cuadro 1: Descripción de las actividades.

Actividad	Nombre	Descripción
1	Paralelogramo	En la primera actividad movilizan conocimientos previos como el Teorema de los puntos medios y propiedades sobre la congruencia de lados y ángulos internos opuestos, y la intersección de las diagonales en sus puntos medios, fundamentales para el desarrollo de la siguiente actividad.
2	Configuraciones	En la segunda actividad relacionaron la intersección de dos figuras es un cuadrado, triángulo y un cuadrilátero cualquiera.

Desarrollo de la Inducción del software GeoGebra

Se procederá a reconocer las herramientas básicas del Geogebra, para desarrollar las actividades programadas. A continuación, señalamos las herramientas del AGD.

Cuadro 2: Función de algunas herramientas del Geogebra (Gómez, 2015 p. 16)

Herramienta	Iconos	Construcción
Elige y mueve		Permite trasladar y seleccionar objetos incluso varios a la vez presionando la tecla de Control.
Nuevo punto		Crea un punto en el plano.
Punto de intersección.		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección.
Medio o centro		Marca dos puntos y se traza un punto que equidista y es colineal a los dos puntos.
Recta		Marca dos puntos y se traza la recta que pasa por los dos puntos.
Segmento		Selecciona dos puntos y queda definido un segmento.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto, donde quedará definida una recta que pase por el punto y perpendicular a la primera recta.
Rectas paralelas		Selecciona una recta y un punto, quedará definida una recta paralela a la primera recta.
Mediatriz		Selecciona segmento o los extremos del segmento, se definirá una recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.
Polígono		Construye polígono marcando como mínimo tres puntos, se inicia en el primer punto y termina en el primer punto.
Circunferencia (centro, punto)		Traza circunferencia en la pantalla, con punto, arrastre y punto se define el radio de la circunferencia.
Texto	ABC	Permite añadir comentarios, etiquetas y símbolos.

Desarrollo de la Sesión 1

Actividad 1: Paralelogramo

Objetivo: Construir e identificar las propiedades de un paralelogramo en el cuadrilátero inscrito EFGH.

La figura 1 muestra la Actividad 1.

ACTIVIDAD 1

Utilice las herramientas del Geogebra y construya un cuadrilátero ABCD cualquiera. Luego, marque los puntos medios E, F, G y H de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, y construya los segmentos EF, FG, GH y HE.

Ahora mueva el punto A y responda en la hoja ***¿cuál es la naturaleza del cuadrilátero EFGH?*** Justifique matemáticamente su respuesta.

Figura 1: Actividad 1 (Gómez, 2015 p. 51)

Resolución matemática esperada:

Los quince profesores construirán el cuadrilátero ABCD y el cuadrilátero inscrito EFGH, siguiendo las instrucciones y haciendo uso de las herramientas del GeoGebra como: punto, segmento, punto medio y polígono, lo que implica que estarían desarrollando su aprehensión secuencial. En la construcción se sigue un orden dimensional, lo que facilita los AGD (Ambientes de Geometría Dinámica). A continuación, arrastrarán el vértice A, que será de apoyo para identificar propiedades conocidas, conocimientos previos, como el paralelismo de sus lados opuestos del cuadrilátero EFGH, lo que significa que estarían desarrollando sus aprehensiones perceptivas. Luego trazarán las diagonales del cuadrilátero ABCD, los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, que les permitirá realizar otras exploraciones a la figura. En este caso esperamos que la figura quede divida en cuatro triángulos AOB, BOC, COD y DOA, y apliquen el teorema de los puntos medios. Los triángulos serán vistos como unidades figurales que no modifican al cuadrilátero, todas estas acciones se reconocen como modificación mereológica. (Ver Figura 2). Según Flores y Moretti (2006) las modificaciones mereológicas no solo requiere habilidades visuales, también conocimientos matemáticos. En este caso se requiere conocer el teorema de los puntos medios.

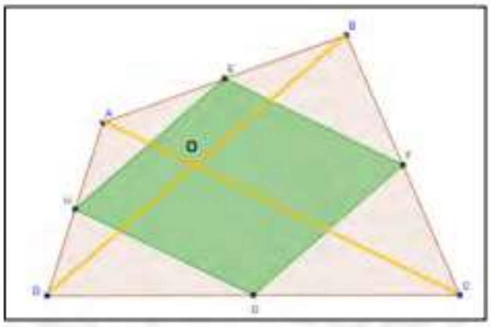

Figura 2: Aprehensión operatoria-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

Y en otra acción, pensamos que reconozcan cuatro triángulos superpuestos ABC, ACD, BCD y ABD, porque identifican 4 nuevas subconfiguraciones de la figura original, lo que implica que están desarrollando desde la perspectiva de Duval sus aprehensiones perceptivas.

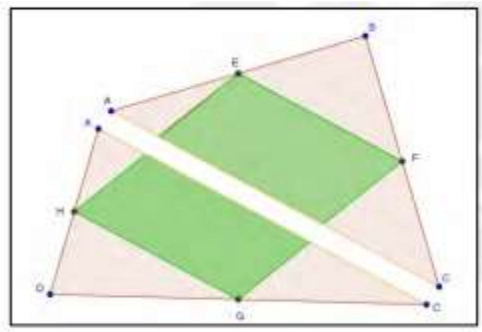

Figura 3: Descomposición mereológica 1-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

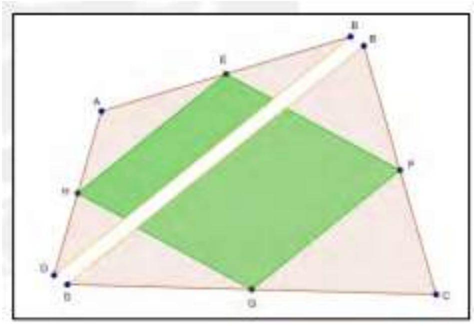

Figura 4: Descomposición mereológica 2-actividad 1 (Gómez, 2015 p. 52)

En el sentido de Duval (1999), se espera que los profesores realicen la articulación de sus aprehensiones perceptiva y operatoria (modificación mereológica de la figura inicial), y desplieguen sus conocimientos matemáticos aplicando el teorema de los puntos medios a los triángulos ABC y ACD (Figura 3), cuyo lado común es el segmento $\overline{AC}$, de tal manera que justifiquen matemáticamente que el segmento $\overline{EF}$,∥$\overline{AC}$, y el segmento $\overline{HG}$,∥ $\overline{AC}$,respectivamente, para relacionar por transitividad el paralelismo de los segmentos: $\overline{EF}$,∥ $\overline{HG}$, . En forma análoga en la figura 4, se espera verifiquen que los segmentos $\overline{EH}$,∥ $\overline{FG}$,. Todo proceso deductivo será expresado a través de la aprehensión discursiva, empleando un discurso matemático, donde se efectúe un cambio de registro, del figural al discursivo. Esperamos que, a partir de la articulación de sus aprehensiones perceptivas, operatoria (mereológica) y discursiva, justifiquen que el cuadrilátero inscrito EFGH, tiene dos pares de lados paralelos y por lo tanto concluir que es un paralelogramo. (Gómez, 2015, p.53)

Desarrollo de la Sesión 2

Actividad 2: Configuraciones

En la actividad 2 se presentan un posible caso que pueden desarrollar los profesores en el experimento.

A continuación, la actividad 2 (Ver figura 5).

ACTIVIDAD 2

Abra el archivo **Actividad_2** en la que los cuadrados ABCD y EFSH son congruentes y el cuadrado EFSH que está inscrito en una circunferencia, gira alrededor del centro del cuadrado ABCD.

Manipule el punto ***S*** de tal manera que la intersección de las figuras forme la configuración de un triángulo, un cuadrado y un cuadrilátero cualquiera.

¿Cuál es la relación del área formada por la intersección de las figuras con el área del cuadrado ABCD? Justifique su respuesta haciendo uso del Geogebra (puede hacer trazos auxiliares y usar todas las herramientas que conoce, menos la herramienta de medida de área del software).

Figura 5: Actividad 2 (Gómez, 2015 p. 58)

Se muestra a continuación la situación propuesta en la Actividad 2 representado en el software Geogebra, ver la figura 6.

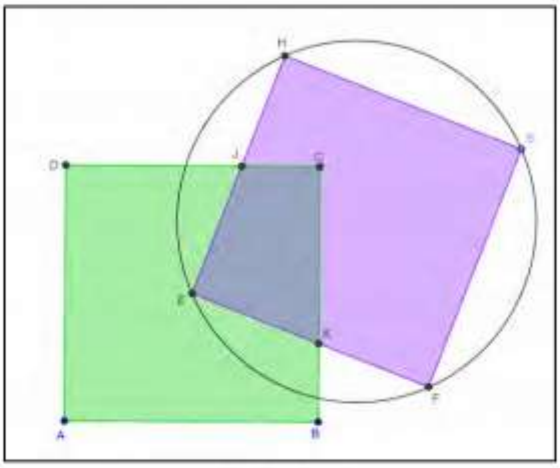

Figura 6: Gráfica de Actividad 2 (Gómez, 2015 p. 59)

Caso 1:

Objetivo: Relacionar el área de intersección de las figuras ABCD y EFSH, cuando forman un cuadrado, con el área del cuadrado ABCD.

Se espera que por medio de los datos de la actividad propuesta y por el planteamiento de la pregunta, los profesores establezcan una figura de partida y una de llegada. Cuando estas figuras se identifican, como afirma Duval, es posible que identifiquen la secuencia de sub-figuras que permitan llegar a la figura final. En este caso los profesores conocen que la figura final de la intersección de las figuras es un cuadrado, es posible que hagan uso del arrastre para acercarse a la configuración de la figura y desarrollen su aprehensión operatoria para realizar modificaciones mereológicas en el cuadrado ABCD. Pensamos que, a partir de sus conocimientos previos de mediatriz de un segmento, recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento, empleen la herramienta mediatriz, realicen modificaciones mereológicas sobre el cuadrado ABCD, trazando las mediatrices L1 y L2 con el uso de las herramientas del Geogebra de los segmentos $\overline{DC}$, y $\overline{BC}$, respectivamente, dividiendo al cuadrado en cuatro regiones.

Es posible a través de la articulación de su aprehensión percepción identifiquen cuatro regiones cuadradas, que será sustentado con la siguiente propiedad "si una recta es perpendicular a una segunda recta, también es perpendicular a cualquier recta paralela a la segunda recta" con el siguiente discurso, en primer lugar la perpendicularidad de las prolongaciones de las mediatrices, L1 es paralela al segmento $\overline{BC}$ y L2 es perpendicular al segmento $\overline{DC}$ entonces L2 es perpendicular a la recta L1, y luego la intercepción de las prolongaciones de las mediatrices L1 y L2 con los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{AD}$ pasan por su punto medio respectivamente. Por lo tanto, concluirán que el cuadrado ABCD queda dividido en cuatro regiones cuadrangulares. Pensamos que aplicando el arrastre a la figura EFSH desde el vértice S hasta que sus lados $\overline{EH}$ $y\ \overline{EF}$se superpongan con las mediatrices L1 y L2 comprobarán que la intersección de las figuras coincide con una región cuadrangular, por lo tanto, es un cuadrado que representa la cuarta parte del área del cuadrado ABCD.

En este caso esperamos que la articulación sea global, donde se realice un encadenamiento de pasos deductivos y se establezca una articulación entre las aprehensiones perceptivas, mereológicas y empleando un discurso deductivo.

Resultados esperados

Sesión 1: con respecto a la actividad 1

En la actividad 1-paralelogramo, se espera que los profesores justifiquen matemáticamente que el cuadrilátero formado por los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo, recurriendo a sus conocimientos previos de la figura, describiendo sus lados figurales: lados opuestos congruentes y paralelos, y la congruencia de lados opuestos. En otros casos, que recurran a realizar mediciones para confirmar la congruencia de lados y ángulos.

Sesión 2: con respecto a la actividad 2

Con respecto al caso 1, se espera que el profesor haga uso del GeoGebra, específicamente que empleen el arrastre de la figura hasta que según su percepción sea un cuadrado, para luego con el trazo de rectas paralelas confirmar su percepción. En el caso 2, se espera que los profesores coordinen su aprehensión perceptiva, operatoria y discursiva, y en el caso 3, también se espera que coordinen sus aprehensiones perceptivas y operatorios empleando un lenguaje descriptivo en su justificación, el uso de la función "arrastre" les facilitara la reconfiguración de la figura.

Consideraciones finales

Con respecto a las consideraciones finales de las actividades 1 y 2, las agrupamos de la siguiente manera: Reflexión matemática, Reflexión tecnológica y Reflexión didáctica.

Reflexión matemática

En la actividad 1, cuyo objetivo fue justificar matemáticamente que el cuadrilátero formado por los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo, los profesores podrán recurrir a sus conocimientos previos de la figura, describiendo sus unidades figurales: lados opuestos congruentes y paralelos, y la congruencia de ángulos opuestos. En otros casos que realicen mediciones para confirmar la congruencia de lados y ángulos.

En la segunda actividad, que consta de tres casos se observó lo siguiente: en el primer caso, los profesores para verificar su percepción, recurren a las herramientas del Geogebra para relacionar las unidades figurales de dimensión 0 y 1 para luego realizar trazos sobre la figura e identificar la relación de unidades figurales de dimensión 2, lo que implica una articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, o tal vez solo se apoyen en su percepción; en el segundo caso, a partir de las modificaciones mereológicas realizadas en la figura, relacionen las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, estableciendo una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aquí se podría evidenciar claramente una visualización con respecto a la relación de áreas; en el tercer caso, los profesores se realizan reconfiguraciones, sustentado con un discurso que lo asocia a propiedades de congruencia, en esta actividad la función arrastre ayuda a establecer relaciones entre unidades figurales de dimensión 2.

Reflexión tecnológica

Se espera que los profesores sigan las indicaciones de construcción, al emplear las herramientas del Geogebra para limitar las propiedades de la figura que representan. Así como en el análisis de las propiedades de la figura logren identificar y relacionar unidades figurales de dimensión 0, 1 y 2, al realizar trazos adicionales como rectas y segmentos, y determinar la congruencia de dos o más segmentos empleando la herramienta "compás". Finalmente, con el empleo de la función "arrastre" puedan manipular directamente sobre la construcción para relacionar unidades figurales de dimensión 2.

Reflexión didáctica

En la actividad 1, los profesores tendrán un desenvolvimiento de las aprehensiones perceptivas y operatorias, con ayuda de las herramientas y la función arrastre lograron identificar las propiedades del paralelogramo, al relacionar sus unidades figurales, para luego describirlo empleando un lenguaje discursivo y en otros casos un lenguaje formal.

En la segunda actividad, que consta de tres casos se observó lo siguiente: en el primer caso, la mayoría de los profesores para verificar su percepción, recurrieron a las herramientas del Geogebra para relacionar las unidades figurales de dimensión 0 y 1 para luego realizar trazos sobre la figura e identificar la relación de unidades figurales de dimensión 2, lo que implica que hubo una articulación de sus aprehensiones perceptivas y operatorias, otros solo se apoyaron en su percepción; en el segundo caso, todos los profesores, a partir de las modificaciones Mereológicas realizadas en la figura, relacionaron las subfiguras con propiedades de congruencia de triángulos, estableciendo una articulación entre sus aprehensiones perceptivas, operatorias y discursivas, aquí se evidencia claramente que hubo visualización con respecto a la relación de área; en el tercer caso, los profesores realizaron reconfiguraciones, sustentando con un discurso que lo asocia a propiedades de congruencia, en esta actividad la función arrastre ayudó a establecer relaciones entre unidades figurales de dimensión 2.

Referencias

Almeida, I, Santos, M. C. (2007). A visualização como factor de ruptura nos conceitos geométricos. *XVIII Simpósio Nacional de Geoemtria Descritiva e Desenho Técnico-*GRAPHICA. Artigos. Paraná.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1era ed.). Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas/organização*. Marlene Alves (Trad.). I. ed. San Paulo: PROEM, 2011.

Flores y Moretti (2006). As Figuras geométricas suporte para aprendizagem em geometría: um estudio sobre a heurística e a reconfiguração. *Revemat*, 1(1), 5-13.

Gomez, C. (2015). *Proceso de visualización de cuadriláteros: un estudio con profesores de nivel secundario*. (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Laborde, C., Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-geometre. *Em Aberto*, 14(62). Recuperado de http://embareto.inep.gov.br/index.php/emaberto/search/results

Larios, V (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime*, 9(3), 361-382. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2168369

Salazar, J. V. F. (2009). *Génesis Instrumental y Cabri 3D*. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Salazar J.V.F. (2018) Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(2), 643-655. https://doi.org/10.12973/ejmste/80628