RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Ángel Homero Flores Samaniego*
Isabel Torres Céspedes**
ahfs@unam.mx, isabeltz50@hotmail.com

Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM, México*
Universidad de Lima, Perú**

Resumen

En el presente taller, mediante la resolución de problemas aritméticos, se hará una reflexión sobre la matemática y su naturaleza, al tiempo que se ejemplificará de manera práctica cómo instrumentar en el aula el modelo de intervención didáctica conocido como, Aprender Matemática, Haciendo Matemática. Dicho modelo se centra en establecer las condiciones necesarias para que el estudiante aprenda, en vez de enfocarse en la depuración de las estrategias de enseñanza del profesor, con la esperanza de que el estudiante aprenda. El taller está dirigido, principalmente a profesores de Secundario, pero puede ser interesante para profesores de nivel superior. Se espera que el taller sirva de vehículo para arribar a una docencia más efectiva en la que no se considere la matemática como un cuerpo de conocimiento terminado al que se accede siguiendo instrucciones.

Palabras clave: Resolución de problema, matemática, argumentación.

Introducción

¿Qué es la matemática? ¿Cómo se aprende? ¿Cómo sabemos que un estudiante ha aprendido matemática? Son preguntas básicas que todo docente en la materia debería hacerse y tener una respuesta más o menos consistente.

Un primer acercamiento a la definición de matemática (y que usaremos en el presente taller) es considerarla como el cuerpo de conocimiento sobre números y formas, y las relaciones que hay entre ellos. La matemática ha sido utilizada como como herramienta para resolver problemas; como teoría para explicar (o ayudarnos a entender) fenómenos naturales y sociales; como ciencia que se estudia a sí misma; y como lenguaje para comunicar ideas.

Tradicionalmente, la matemática en la escuela se ha visto, en el mejor de los casos, como una herramienta para resolver problemas; en este contexto, el estudiante, sobre todo en los niveles básicos, aprende una serie de instrucciones o algoritmos que le llevarán a usar correctamente la herramienta, aunque los problemas que se resuelven con ella no tengan mucho que ver con la realidad o con cuestiones prácticas, un ejemplo es el caso de los problemas de planteo como el siguiente: las edades de Pedro y Raquel suman 65 años; dentro de cuatro años, la edad de Pedro será el doble de la edad actual de Raquel; ¿qué edad tienen Pedro y Raquel?

Nuestra hipótesis es que si el estudiante, sobre todo en los niveles básicos (primario y secundario) tiene contacto con la matemática de una manera más integral (como herramienta y teoría principalmente) su entendimiento de la materia se hará más fácil.

La matemática, y cualquier otra disciplina, se aprende haciéndola y reflexionando sobre lo que se hace. El aprendizaje se facilita si este hacer se lleva a cabo en equipo, en el seno de una comunidad de aprendizaje. En el aula, el docente no es quien "enseña" la matemática y después examina a sus estudiantes para "medir" el grado de adquisición de su conocimiento, dando una nota o una calificación que indique qué tanto han aprendido. En un ambiente en el que se aprende haciendo, el docente pone las condiciones necesarias para que se dé el conocimiento; y coordina las acciones de sus estudiantes, aclara dudas, fomenta discusiones entre ellos, y los guía, de modo tal, que adquieren el conocimiento pretendido. El docente es un catalizador que acelera el aprendizaje; y el estudiante, al sentirse parte de una comunidad, trabaja con más seguridad y aumenta su autoestima.

Cuando una persona aprende algo o adquiere un cierto conocimiento, se da un cambio en su discurso y en su proceder; lo anterior se advierte con más claridad cuando hace tareas en las que debe utilizar dicho conocimiento. Por consiguiente, en un aula de matemática que se ha constituido en una comunidad de aprendizaje, el docente no examina a sus estudiantes para determinar el grado de adquisición del conocimiento: son los mismos estudiantes quienes aportan evidencias de su aprendizaje. Las evidencias surgen cuando el estudiante trabaja en una cierta actividad, cuando entabla una discusión con sus compañeros acerca de algún concepto a alguna estrategia a seguir, y en sus producciones escritas. El docente diseña mecanismos para recabar dichas evidencias y utiliza la información obtenida para mejor su propia docencia, rediseñar las actividades que lo requieran y retroalimentar el conocimiento del estudiante.

En un contexto como el descrito en párrafos anteriores, la asignación de una nota o de una calificación con fines de acreditación adquiere un papel secundario, pues el objetivo principal de la participación de los estudiantes en las actividades es el aprendizaje. Esta asignación puede hacerse siguiendo algunas reglas (como asignación de porcentajes por tipo de actividad) cuyo diseño estaría a cargo de todos los integrantes de la comunidad: la definición de la forma de calificar no sería un acto exclusivo del profesor. De este modo, el proceso de asignar una nota o una calificación no tendría posibilidades de verse como un acto punitivo injusto por parte de loas estudiantes.

Ahora bien, tomando en cuenta que la aritmética es la puerta de entrada al estudio de la matemática, creemos necesario que los docentes tengan una idea más clara de su objeto de estudio y el grado de dificultad que puede tener. Como menciona en esta introducción, la matemática es un cuerpo de conocimiento sobre números y figuras en el espacio, para su estudio se le divide en ramas, de las cuales la aritmética es una de ellas. En la práctica, es difícil determinar el dominio específico de una rama de la matemática, por ejemplo, si hacemos aritmética o resolvemos problemas relacionados con ella, ¿podemos hacerlo sin utilizar el álgebra o de algunas generalizaciones que podríamos considerar propias de esa rama de la matemática? ¿Dónde está la frontera entre la geometría y el álgebra? ¿Podemos hablar de la teoría de funciones sin recurrir a conceptos geométricos o al cálculo? ¿Qué diferencia hay entre la aritmética y la teoría de números?

Tomando en cuenta lo anterior, el objetivo de nuestro taller es, mediante la resolución de problemas que se pueden resolver de manera aritmética, hacer una reflexión sobre esta rama de la matemática y su aprendizaje en un contexto escolar.

Diseño metodológico y desarrollo del taller

El taller está dirigido a docentes de Secundario, en particular de Bachillerato (los últimos tres años antes de ingresar a la universidad). Se espera que el docente tenga un buen dominio del álgebra de ese nivel.

Para su desarrollo utilizaremos la metodología del modelo de intervención didáctica, Aprender Matemática, Haciendo Matemática (Flores, 2007) en la que se privilegia el trabajo en equipos pequeños (se recomienda formar parejas) y se fomenta la reflexión mediante el análisis y las discusiones grupales.

Iniciaremos el taller con una breve descripción de la metodología y sus objetivos, y la organización de los equipos.

A continuación, se planteará un problema o una situación a abordar y se dará un tiempo razonable para que los participantes analicen la situación y propongan soluciones. Las propuestas de solución se analizarán de manera grupal. No siempre se llega a una propuesta o a una solución en un tiempo razonable, por lo que, si éste lo permite, también se verán las soluciones o las conclusiones a las que se llegaron con respecto al problema o a la situación dada.

Con este procedimiento es posible hacer la reflexión que se plantea en el objetivo del taller y, en consecuencia, aumentar probabilidad de que los docentes participantes en el taller vean la didáctica de manera distinta.

Presentamos, a continuación, una lista de los problemas que se proponen para el taller.

1. En una clase de bachillerato, la maestra planteó el siguiente problema*:*

   En mi tribu, cuando se colocan de dos en fondo sobra uno, cuando se colocan de tres en fondo sobra uno, cuando se colocan de cuatro en fondo sobra uno, cuando se colocan de cinco en fondo sobra uno, cuando se colocan de seis en fondo sobra uno, y, por fin, cuando se colocan de siete en fondo quedan distribuidos exactamente. ¿Cuántos tribunos hay en mi tribu?

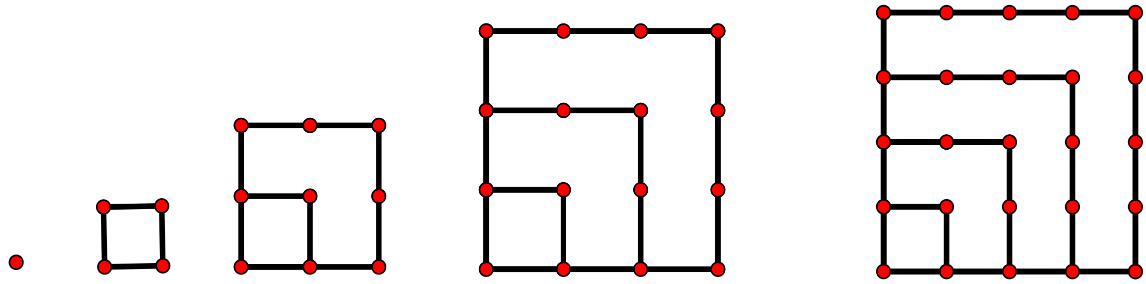
   Uno de los estudiantes obtuvo 301 como respuesta, pero la maestra dijo que había muchas más.

   ¿El resultado es correcto? ¿por qué?

   Encuentra otros resultados y explica cómo los obtuviste. ¿Es posible generalizar el resultado? En caso de que la respuesta sea afirmativa, mostrar el caso general y justificar la respuesta.

   Explica dos maneras de resolver el problema. Y explica por qué las dos son válidas.

2. Los números cuadrangulares se forman a partir de los vértices de un cuadrado. En la figura tenemos los primeros cinco números cuadrangulares.



El primero es un punto, el segundo (dos puntos en la base) contiene cuatro puntos, y así sucesivamente. ¿Cuántos puntos tendrá el sexto? ¿Cuántos puntos tendrá el *n*-ésimo número cuadrangular (C_n)? ¿Cómo justificas el resultado?

3. Las ecuaciones diofánticas deben su nombre a Diofanto de Alejandría (290-200 a.C.) y son las ecuaciones lineales de la forma $ax + by = c$ en las que tanto las constantes *a*, *b* y *c* como las incógnitas son números enteros. Explica por qué sí o por qué no las siguientes ecuaciones son diofánticas.

   a) $3x + 8y = 4$ b) $3x + 4y = 1$ c) $15x + 25y = 5$.

   ¿Hay alguna condición para que una ecuación sea diofántica? Explica tu respuesta.

4. En una pista de carreras elíptica dos atletas empiezan a correr al mismo tiempo desde el mismo lugar, uno con una rapidez promedio de 12 km/h, en un carril que tiene una longitud de 402 metros y el otro en un carril de 390, con una rapidez promedio de 12.2 km/h. Si los atletas dan 20 vueltas, ¿cuántas veces están en el mismo punto y cada cuánto tiempo?
5. Se dispone de 3 caños (A,B,C) para llenar un estanque, y un caño (D) para evacuarlo. Si se abre A y B el estanque se llenaría en 8 horas; mientras que A y C lo llenarían en 6 horas. Pero si se abriese los 3 caños, simultáneamente, el tanque sería llenado a 5 horas. Además, el caño D puede desaguarlo en 24 horas. Determinar el tiempo que tardaría el caño A en llenar el estanque si el caño D estuviese abierto .
6. El siguiente texto está encriptado: BWLMBKXWXUBYÑCIRBBYFARBERXHAUX.

   En la tabla se muestra parte de la clave para descifrar el texto.

   Descifra el texto y explica cómo lo hiciste.

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Regla	0	7	14	21	1	8	15	22	2	9	16
Letra cifrada	A	H	Ñ	U	B	I	O	V	C	J	P

7. La cruz que se muestra tiene la característica de que los números son enteros del 1 al 9 y están colocados de modo que la suma horizontal es igual a la vertical. En este caso la suma es 27.

   ¿Qué otras sumas son posibles? ¿Cómo justificas el resultado?

		6		
		4		
2	1	9	8	7
		3		
		5		

8. Se tiene una sucesión de seis cuadrados formados por cuadrados unitarios. El primero es el cuadrado unitario; el segundo tiene dos cuadrados por lado; el tercero 3 y así sucesivamente. Si, a partir del tercer cuadrado se quitan los unitarios del centro, de modo que sólo haya cuadrados en los lados, ¿cuántos cuadrados unitarios habrá en el sexto? ¿Cuántos cuadrados unitarios tendrá el cuadrado que tiene n unitarios en la base? Justifica tu respuesta.

La diferencia principal entre los problemas que se trabajarán en el taller y los de planteo como el mencionado en la Introducción, es que, en la resolución de losprimeros, no se debe seguir un método rutinario, sino que se pueden resolver de varias maneras, e implican el uso de un razonamiento matemático que dista mucho de seguir una serie de instrucciones.

Finalmente, aunque no se profundizará en la problemática de la evaluación, es importante mencionar que, en el modelo de intervención didáctica, Aprender Matemática, Haciendo Matemática, la evaluación tiene un papel central (Flores y Gómez, 2009). Consideramos que la evaluación debe ser el proceso mediante el cual se recaba información sobre el desempeño del estudiante (aprendizaje incluido), el desempeño del docente y la efectividad de las actividades diseñadas y llevadas al cabo por los estudiantes.

La información, con fines de evaluación, recabada, se procesa con algunos instrumentos de evaluación (principalmente listas de cotejo, matrices de resultados, V heurísticas y rúbricas) y los resultados de su análisis se utilizan para retroalimentar el proceso de aprendizaje del estudiante y el diseño del curso en su totalidad con miras a ediciones posteriores. Los resultados de la evaluación y de la retroalimentación que de ella deriva, incluso, pueden utilizarse para hacer propuestas de modificación del currículo.

Resultados esperados

Esperamos que, durante el desarrollo de las actividades del taller, se origine una discusión en términos de las posibles soluciones de los problemas y en torno a la manera en que se puede instrumentar la metodología de Aprender Matemática, Haciendo Matemática en el salón de clase.

Sobre todo, esperamos que haya observaciones y críticas al modelo hechas desde la perspectiva de los docentes participantes.

Dependiendo del conocimiento disciplinar del participante y de su habilidad para resolver y plantear problemas, se espera que el taller sirva como vehículo para que los docentes amplíen su concepción de la matemática y su capacidad de resolver problemas, y en particular, su habilidad para plantear problemas que sean un reto y una motivación para sus estudiantes.

En el caso de docentes que desarrollen sus clases de una manera más expositiva y tradicional, esperamos que el taller sirva para considerar la eficacia de su sistema de dar clase y vea alternativas para mejorar el aprendizaje de sus estudiantes.

Consideraciones finales

La docencia tradicional ha privilegiado la enseñanza en detrimento del aprendizaje, en este sentido, decimos que la docencia está centrada o enfocada en la enseñanza; desde una docencia centrada en la enseñanza, resulta más fácil hacer que el estudiante siga una serie de pasos o instrucciones para llegar a ciertos resultados, éste es el sentido que le damos a una clase de matemática cuando al proceso de aprendizaje le llamamos instrucción y al docente instructor. En consecuencia, la mayoría de las estrategias didácticas han derivado en una serie de pasos a seguir para obtener un buen resultado.

La resolución de problemas matemáticos no es la excepción, el magnífico texto de Georges Polya, How to solve it, (Polya 1945, 1973) ha derivado en un algoritmo para resolver problemas, incluso se le llama Método Polya para la Resolución de Problemas; lo que la mayoría de los docentes conocen sobre el texto, de unas 250 páginas, es solamente que hay que seguir cuatro pasos: entender el problema; diseñar una estrategia; desarrollar la estrategia; revisar lo hecho.

Con ello, se pierde toda la riqueza del libro que nos habla de la naturaleza de la matemática y del conocimiento matemático.

Si, por el contrario, enfocamos la docencia desde el punto de vista del aprendizaje y de la conformación del aula en una comunidad de aprendizaje, la situación cambia radicalmente. Durante el trabajo en el aula, el estudiante no memoriza algoritmos, sino que, junto con sus compañeros (incluido el docente) analiza situaciones (muchas de ellas problemáticas), las discute y, mediante argumentos válidos, las valida; en el caso de la resolución de problemas, el estudiante se enfrasca en discusiones con sus compañeros sobre la mejor manera de resolverlos y se ve en la necesidad de justificar sus resultados, poniendo en juego su razonamiento matemático.

Es la intención del taller, ejemplificar esto último usando problemas aritméticos.

Referencias

Academia ADUNI. Colección de Aptitud Académica (2001). *Razonamiento Matemático.* Lumbreras editores.

Flores, H. (2007). Aprender Matemática Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante*. Acta Scientiae*. *9*(1). 28-40.

Flores, H y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21(2). 117-142.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspecto of mathematical method.* (2da. edición), Princenton: Princenton University Press.