

# CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR DE SECUNDARIA SOBRE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**Carlos Omar Cárdenas Estrella**

**Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre**

a19960132@pucp.edu.pe , cgaita@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

## Resumen

*Este taller tiene como finalidad que los participantes reconozcan la diversidad de objetos matemáticos que se movilizan al abordar problemas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL). Propondremos a los profesores participantes situaciones en contextos intra y extra matemáticos que involucran los SEL. Para el análisis, nos apoyaremos en un significado de referencia institucional, así como algunos indicadores sobre los conocimientos del profesor de matemática, en las dimensiones Matemática (conocimiento común y ampliado) y Didáctica (faceta epistémica y ecológica), referente al objeto en estudio, basados en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Como resultado, esperamos que se reconozcan los diversos contextos en donde aparecen los SEL en la formación de un estudiante de educación secundaria y que ello brinde al docente elementos para el diseño de clases sobre este tema.*

**Palabras clave:** Conocimiento didáctico-matemático, Faceta epistémica, Faceta ecológica, Significado de referencia,

## Introducción

En un trabajo previo (Cárdenas, 2018) se realizó un estudio sobre los SEL, en el cual se propusieron indicadores acerca del conocimiento ideal que debería tener un profesor de matemática cuando aborda situaciones relacionadas a este objeto matemático. Dicho trabajo se enmarcó en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) desarrollado por Pino-Fan y Godino (2015), que organiza el conocimiento del profesor de matemática en tres dimensiones: Matemática, Didáctica y Meta didáctico-matemático y proponen subcategorías, de modo que se permita identificar mejor los conocimientos en las prácticas matemáticas y didácticas que deben desarrollar los maestros.

De otro lado, existen muchos temas en matemática con una gran riqueza que permiten establecer relaciones con otros, o problemas que admiten diversos métodos de solución o representación, los cuales luego deben ser justificados; sin embargo, son escasas las ocasiones en las que en la formación del profesor de matemáticas se discuten estos aspectos. Así, las

justificaciones de los métodos no forman parte del discurso del profesor, pese a que en su formación inicial pudo haber llevado cursos en los que se encuentran dichas argumentaciones como, por ejemplo, un curso de Álgebra Lineal. Además, muchas veces el conocimiento en el horizonte matemático no suele conectarse con el conocimiento común y se asume que ese tránsito es trivial.

Este taller buscará hacer explícito todos los objetos involucrados en las prácticas matemáticas que se desarrollan cuando se abordan problemas que involucran SEL. Esto se hará teniendo en cuenta aspectos ecológicos identificados en el Currículo Nacional en donde se describen estándares y competencias matemáticas. Será fundamental también identificar, como parte del conocimiento didáctico matemático del profesor, en la dimensión epistemológica, los problemas, conceptos, lenguajes, procedimientos, proposiciones y argumentaciones involucrados al abordar situaciones sobre SEL.

### **Objetivos**

El presente taller tiene como finalidad la identificación del conocimiento que tienen los profesores de matemática en servicio de educación secundaria, sobre los SEL, en consideración a las dimensiones Matemática y Didáctica, contempladas por el modelo del CDM. Así mismo, pretende incidir en sus prácticas cuando aborden problemas relacionados con este tema.

En la dimensión Matemática se desea reconocer el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Común Ampliado; el primero considera los conocimientos que necesita el profesor para resolver problemas propuestos en los libros o en planes de estudio de un nivel educativo; el segundo, implica los conocimientos que tiene el profesor para relacionar el objeto actual con otros que se ven posteriormente en el plan de estudio.

En la Dimensión Didáctica se considerarán otro tipo de conocimientos relacionados con el diseño, implementación y evaluación de su propio proceso de enseñanza. De las seis facetas que contempla el modelo del CDM se pondrá especial atención a la faceta Epistémica que se relacionará con el conocimiento matemático en la educación secundaria peruana y como se presentan los objetos primarios (los problemas, los lenguajes, los procedimientos, las definiciones, las propiedades y los argumentos). La segunda faceta considerada será la ecológica, la cual será abordada cuando se indague sobre qué tanto conoce el profesor los aspectos relacionados con la organización del plan de estudio en el nivel donde se desarrolla y qué relación tienen los SEL con otros objetos matemáticos. Para ello, se tendrá en consideración el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), que organiza los temas por ciclos, niveles y grados.

Así también, se desea que el profesor tenga herramientas adecuadas cuando planifique sus sesiones de clase y de esa manera pueda relacionar objetos previos y posteriores a los SEL, motivando en el alumno el aprendizaje y activando los objetos primarios relacionados a situaciones sobre nuestro objeto, por ejemplo, distinguir diferentes representaciones (verbal, algebraica, gráfica, tabular, figural, matricial), reconocer definiciones, aplicar métodos de solución (los cuales en sí se direccionan a reducir el sistema de ecuaciones para un tratamiento más fácil de entender), aplicar y justificar propiedades (fundamentalmente para SEL de 2 o 3 variables).

## **Diseño e implementación del taller**

Para el diseño del taller nos apoyaremos de algunas cuestiones que proponen Pino-Fan y Godino (2015) y Vasco (2015), así como en situaciones e indicadores identificadas en el trabajo de Cárdenas (2018) sobre los SEL.

Para desarrollar el taller se proponen las siguientes etapas:

### **Etapas:**

**Etapas:**  
Etapa 1: Aplicación de cuestionario  
Se brindará un cuestionario introductorio para conseguir información general del profesor acerca de su formación y experiencia docente; saber sobre su conocimiento respecto a los SEL y su relación con otros temas dentro de la matemática o fuera de ella; así como cuánto conoce del Currículo Nacional (PERÚ, 2016) al abordar diversas situaciones. (Anexo 1). Deseamos analizar qué tanta relación tiene su experiencia docente con el conocimiento matemático como ecológico.

### **Etapas:**

Etapa 2: Presentación de actividades  
Se presentarán actividades sobre los SEL cuyo objetivo será que los profesores reconozcan el potencial que estas brindan en términos de aprendizajes dada la diversidad de objetos involucrados. Las preguntas están enfocadas a la utilización de su conocimiento matemático sobre situaciones en contextos intra-matemáticos, donde debe considerar cambios de lenguaje, uso de métodos, aplicación y justificación de propiedades (Anexo 2).

### **Etapas:**

Etapa 3:  
En la segunda sesión, se discutirá sobre la diversidad de contextos (extra-matemáticos) abordados en la secundaria, donde se hace necesario resolver un SEL, tanto en contextos intra-matemáticos (Aritmética, Álgebra, Geometría) y extra-matemático (Física, Química). (Anexo 3).

### **Etapas:**

Etapa 4:  
Se hará un cierre en donde se discutirá sobre la riqueza que presentan los problemas que involucran los SEL para desarrollar la competencia asociada a la resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio, así como sobre su doble rol: como instrumento y como objeto de estudio.

## **Resultados esperados**

Como ya se mencionó, el taller tiene una doble finalidad; por un lado, identificar el conocimiento didáctico matemático que poseen profesores de matemáticas de secundaria en relación a los SEL y, por otro lado, que los docentes amplíen dichos conocimientos, a partir de la identificación de los objetos primarios y del reconocimiento de los múltiples contextos de uso en donde se requiere resolver un SEL.

Para analizar dicho conocimiento, se tendrán en cuenta los indicadores propuestos por Cárdenas (2018), para identificar el conocimiento matemático común y el conocimiento matemático en el horizonte matemático o ampliado del profesor, siempre relacionado a los SEL. En la tabla 1, se describen las actuaciones que se espera muestren los profesores participantes en el desarrollo del taller.

Tabla 1

Indicadores del conocimiento del profesor sobre sistemas de ecuaciones lineales

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
1. Reconoce si un problema requiere de sistemas de ecuaciones lineales.	Identifica si la situación requiere necesariamente del planteamiento de un SEL para su solución.
2. A partir de un enunciado, plantea un sistema de ecuaciones lineales.	Plantea correctamente un sistema de ecuaciones lineales, definiendo incógnitas y coeficientes. Reconoce que ese proceso implica cambiar de una representación no algebraica a una que sí lo es.
3. Resuelve un sistema de ecuaciones lineales, usando algún método.	Emplea un método de solución adecuado para resolver el SEL.
4. Interpreta la solución del sistema de ecuaciones lineales como solución del problema inicial.	Retoma el enunciado inicial e interpreta la respuesta en ese contexto, reconociendo los casos en los que la solución del sistema, no satisface el problema inicial.
5. Identifica diversos temas en los que se requiere resolver un SEL.	Relaciona los SEL con otros temas. Por ejemplo, reconoce que problemas en los siguientes contextos pueden dar origen a un SEL: Conjuntos, Divisibilidad, Proporcionalidad, Regla de Interés, Sucesiones, Polinomios, Fracciones algebraicas, Binomio de Newton, Funciones, Programación Lineal, ángulos, triángulos, Cuadriláteros, Polígonos, Geometría Analítica. También reconoce que pueden ser necesarios en contextos extra-matemáticos tales como Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica y Reacciones químicas.
6. Identifica conocimientos de otros temas que usan sistemas de ecuaciones lineales.	Conoce definiciones y propiedades de otros temas intra o extra-matemáticos que necesitan de los sistemas de ecuaciones lineales cuando resuelve situaciones en dichos temas. Por ejemplo, conceptos de programación lineal o geometría analítica.
7. Identifica lenguajes empleados al resolver SEL.	Reconoce los distintos lenguajes involucrados en la solución de un SEL: verbal, algebraico, gráfico, tabular, figural, matricial, etc.
8. Identifica definiciones sobre a SEL.	Reconoce definiciones de temas previos tales como ecuación lineal, intercepto, conjunto solución, así como definiciones

relacionadas con los SEL y con temas que son posteriores a este objeto.

9. Reconoce qué variables didácticas pueden ser modificadas y generar cambios de estrategias en la solución de problemas sobre SEL. Identifica elementos necesarios al resolver sistemas de ecuaciones lineales, que, al ser modificados, propician situaciones que generen nuevos desafíos. Por ejemplo, los parámetros del sistema (coeficientes de las incógnitas o términos independientes); la cantidad de ecuaciones e incógnitas, para analizar el tipo de sistema mostrado.
10. Reconoce similitudes y diferencias de los métodos de solución de los SEL. Distingue entre los diversos métodos, como el método de sustitución, igualación, eliminación gaussiana y otros, reconociendo la conveniencia de usar uno de ellos.
11. Justifica los métodos empleados en la solución de problemas sobre SEL. Justifica los métodos empleados en la solución, a partir de propiedades del álgebra lineal, reconociendo condiciones para la existencia de soluciones del SEL.

Fuente: Cárdenas (2018, p.134)

### **Consideraciones finales**

El trabajo desarrollado pretende mostrar que es indispensable que un profesor de matemáticas posea conocimientos comunes para la resolución de los problemas, en particular para los SEL, pero que además debe tener otros conocimientos propios de su profesión, los cuales están asociados a los conocimientos didáctico-matemáticos.

Finalmente, para complementar este trabajo, sería interesante realizar un trabajo en aula en el que se exploren las facetas cognitiva y afectiva, para ello, se deben elaborar sesiones de aprendizaje con situaciones que requieren de los SEL, en las cuales se identifiquen las dificultades y errores que presentan los estudiantes y de qué manera las interacciones con el profesor permiten afrontarlas. Así, para el desarrollo de las facetas mediacional e interaccional sobre los SEL, se pueden establecer cuáles deben ser las funciones del profesor e identificar recursos que podrían emplearse para el estudio de los SEL.

### **Referencias**

- Cárdenas, C. (2018). *Identificación del conocimiento didáctico-matemático, en la faceta epistémica y ecológica, del profesor de educación secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales*. Lima: (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú. Obtenido de <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12090>
- PERÚ, Ministerio de Educación del. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú: MINEDU. Obtenido de <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVII(1), 87-109. Obtenido de <http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/2662/1274>

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario*. Huelva, España: (Tesis de doctorado). Universidad de Huelva. Obtenido de [http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/11901/Conocimiento\\_especializado\\_del\\_profesor\\_de\\_algebra.pdf?sequence=2](http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/11901/Conocimiento_especializado_del_profesor_de_algebra.pdf?sequence=2)

## ANEXO 1

### CUESTIONARIO INICIAL

1. ¿Cuál es su formación académica?
2. ¿Trabaja o trabajó en colegio, durante cuánto tiempo?
3. ¿Trabaja o trabajó en un centro de educación superior, durante cuánto tiempo?
4. ¿Ha recibido cursos de didáctica o pedagogía en matemática?
5. ¿Qué cursos suele enseñar?
6. Según su experiencia ¿en qué grados se enseña el tema de sistemas de ecuaciones lineales?
7. Según el Currículo nacional, ¿en qué grados debería enseñarse el tema de sistemas de ecuaciones lineales?
8. Sobre los SEL de  $2 \times 2$ , ¿cuántas soluciones puede presentar? ¿qué métodos se pueden emplear al resolverlo?
9. Señale qué conceptos o conocimientos previos que debería tener un estudiante para estudiar los sistemas de ecuaciones lineales.
10. ¿Considera que los sistemas de ecuaciones lineales tienen relación con otros temas de matemática o de otros cursos? De ser así, indique con cuáles.

## ANEXO 2

### SESIÓN 1: EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver, graficar e interpretar, los siguientes sistemas lineales de incógnitas  $x$  e  $y$ :

$$(a) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$$

- Un kilogramo de café de primera calidad y un kilogramo de café de segunda calidad cuesta S/. 26. Se mezcla 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda, el precio medio hubiera sido S/.2 mayor. ¿Cuáles son los precios de un kilogramo de cada calidad? Grafique, si es posible, e interprete la situación.
- Dos capitales se diferencian en S/.2 000, el primero se impone al 16% anual y el segundo al 10% semestral. Si al cabo de un año los montos son iguales. Hallar los capitales.
- Si el polinomio:  $P(x; y) = 5x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n} + x^{n+2}y^{m-3}z^{n+m}$ , el  $GR_{(x)} - GR_{(y)} = 3$ ;  $GA_{(P)} = 13$ . Hallar el valor de  $2m - n$ .
- La suma de las medidas de 4 ángulos consecutivos de un hexágono es  $500^\circ$ . Hallar el ángulo que forman las bisectrices interiores de los otros 2 ángulos.
- Dado el sistema lineal de incógnitas  $x$  e  $y$ , resolver e indicar para qué valores  $\alpha$  el sistema mostrado

$$\begin{cases} 3x + 10y = -4 \\ \alpha x + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

- Tiene solución única.
  - Tiene infinitas soluciones.
  - No tiene solución
- Resuelva el sistema lineal de incógnitas  $x$ ;  $y$  e  $z$

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 8 \\ 3x + 2y + 5z = -7 \\ 2x + 2y - 3z = 22 \end{cases}$$

## ANEXO 3

### SESIÓN 2: PROBLEMAS PROPUESTOS

1. A partir de los siguientes casos, exprese un enunciado (representación verbal) de dicho caso:

**a. Algebraica:**

$$3x + 4y + 5z = 25$$

$$4x + 3y + 4z = 22$$

$$2x + y + 6z = 20$$

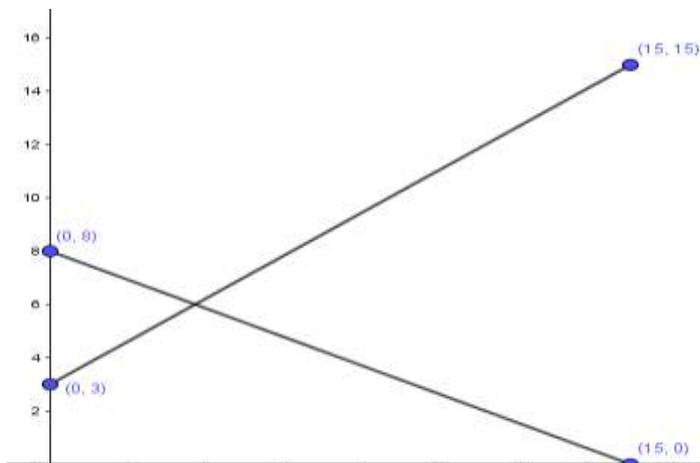
**b. Matriz aumentada**

$$\left[ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right]$$

**c. Tabla**

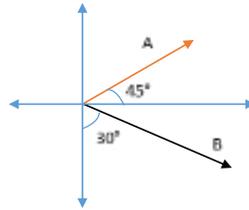
Total puntos	Nº tiros de 2	Nº tiros de 3
17	7	1

**d. Gráfico**

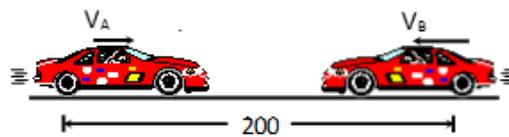


2. Si  $2a - 3b = -3$  y que además que  $z = \frac{a+b+2i}{a-b-3i}$  es un número real puro, hallar a-b
3. Encuentre la ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos (3; 1), (1; 6) y (-2; -1). Dé como respuesta la suma de las coordenadas de su centro con su radio.

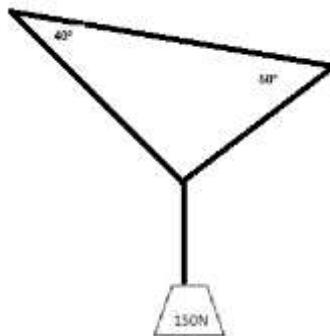
4. Dada la gráfica, encontrar los módulos de los vectores A y B, si la resultante es un vector horizontal en el semi-eje positivo "X" igual a 20 u. ( $|A| = 10$  u;  $|B| = 15$  u)



5. Dos móviles están separados inicialmente 200Km y viajan en sentidos opuestos. Si las velocidades son 8 Km/h y 17 Km/h. Hallar la distancia que recorre cada uno y el tiempo que demoran antes del encuentro



6. Un bloque de 150 N de peso se encuentra colgado según el sistema en equilibrio. Hallar la tensión de las cuerdas.



7. Hallar la tensión de la cuerda que une los bloques y la aceleración del sistema si se conoce que la masa del cuerpo A es 9kg y del bloque B es 11kg



8. Balancear con método algebraico la siguiente reacción química:



9. Si dos átomos "A" y "B" tienen igual número de neutrones, la suma de sus protones es 76 y la diferencia de sus números de masa es 4. ¿Cuántos protones tiene "A"?

10. Para cada proposición indique si es VERDADERO o FALSO. Justifique cada uno de los siguientes enunciados:

Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f' \end{cases}$$

- a. Si  $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , el sistema es compatible determinado.
- b. Si  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ , el sistema es compatible indeterminado.
- c. Si  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ , el sistema es incompatible.

Si se tiene un sistema de "n" incógnitas con "n" ecuaciones.

- d. Cuando el determinante del sistema es diferente de cero, el sistema es compatible determinado.
- e. Cuando el determinante del sistema es igual a cero, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.