

# ENSINO DE MATEMÁTICA A ALUNOS COM ALTAS HABILIDADES/SUPERDOTAÇÃO POR MEIO DA CONSTRUÇÃO DE CENÁRIOS ANIMADOS NO GEOGEBRA

**Adrielei Cristine Bueno**

**Maria Ivete Basniak**

adrielicbueno@gmail.com, basniak2000@yahoo.com.br

Universidade Estadual do Paraná, Brasil

## Resumen

*O presente trabalho objetiva apresentar contribuições do ensino de matemática a alunos com altas habilidades/superdotação por meio da construção de cenários animados no software GeoGebra. Para isto foi proposto que os alunos que frequentam a Sala de Recursos Multifuncional (SRM) de um colégio do Paraná construíssem cenários animados no GeoGebra, envolvendo conteúdos de Matemática que eles não haviam estudado formalmente em sala de aula, como lógica e funções. Por meio do projeto das animações e dos cenários os alunos puderam ter contato, discutir, argumentar e compreender o conteúdo como o de funções, neste caso, antes mesmo de serem estudados na sala de aula regular nos anos em que estão matriculados, alcançando resultados satisfatórios por meio de investigações, explorações, questionamentos e diálogos entre os próprios alunos e entre alunos e pesquisadores, para que construíssem tanto os cenários animados no software GeoGebra como o conhecimento matemático.*

**Palabras clave:** *Educação Matemática, Funções, Tecnologia.*

## Introdução

Altas Habilidades/Superdotação (AH/SD) é uma condição ou comportamento que pode ser desenvolvido. Quando uma pessoa possui AH/SD, ela demonstra desempenho superior em determinada área do conhecimento, o que não significa que ela irá se sair bem em todos os testes de inteligência ou apresente o mesmo desempenho em todas as áreas (Mendonça; Zavitoski; Capellini, 2013). Segundo Renzulli (1978) ser uma pessoa superdotada, não significa necessariamente ter Quociente de Inteligência (QI) alto. Então, há diferentes concepções sobre características de indivíduos que apresentam ou desenvolvem AH/SD. Renzulli (1978) destaca a aptidão acadêmica e o pensamento criativo; Arroyo, Martorrel e Tarragó (2006, citado por Mosquera *et al.*, 2013) destacam que existe um potencial intelectual eminente e um perfil complexo; o caderno Saberes e Práticas da Inclusão (Brasil, 2006), determina que os estudantes com AH/SD são aqueles que apresentam características como alto grau de curiosidade, persistência e autonomia.

Logo, o trabalho com os alunos com AH/SD precisa ser diferente do tradicional, para que sejam exploradas suas capacidades e desenvolvam o raciocínio lógico (Guimarães; Mello, 2006).

Delpretto e Zardo (2010, p. 23) destacam que “projetos de trabalho pela sua natureza flexível, enriquecedora e exploratória, organizados na perspectiva inclusiva, são capazes de instigar a aprendizagem por descoberta e criação”.

Nesse contexto, destacamos que o uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática tem revelado grande potencial para essa abordagem de ensino. Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (2008, p. 65) existem softwares nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, por meio de experimentações matemáticas, de forma muito natural, porque permitem os alunos realizarem experimentos, testarem hipóteses, esboçarem conjecturas e criarem estratégias para resolver problemas.

Atualmente um dos softwares que se destaca no contexto do ensino da Matemática é o GeoGebra, software livre e gratuito de matemática dinâmica que apresenta como principais características sua dinamicidade e facilidade para realizar construções. Esse software permite a construção de objetos utilizando as ferramentas nele disponíveis ou utilizando comandos inseridos na *caixa de entrada*. Assim, construir objetos matemáticos no GeoGebra, permite que os alunos reflitam sobre representações feitas, o que requer um constante processo de investigação sobre os objetos matemáticos que podem ser utilizados na construção.

Nessa perspectiva, ao realizar a construção de objetos no GeoGebra podem emergir investigações e discussões sobre as características e peculiaridades das ferramentas matemáticas envolvidas. Tais investigações e reflexões podem contribuir de maneira significativa para o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Isto foi o que motivou o presente trabalho que objetiva apresentar contribuições do ensino de matemática a alunos com altas habilidades por meio da construção de cenários animados no software GeoGebra. Para isto foi proposto que os alunos que frequentam a Sala de Recursos Multifuncional (SRM) de um colégio do Paraná construíssem cenários animados no GeoGebra, envolvendo conteúdos de Matemática que eles não haviam estudado formalmente em sala de aula, como lógica e funções, por exemplo. Detalhamos melhor o desenvolvimento do trabalho na seção que segue.

### **Contexto e caracterização dos alunos com altas habilidades/superdotação**

O trabalho foi desenvolvido no Colégio Estadual José de Anchieta, no mesmo prédio do campus da UNESPAR de União da Vitória, que possui uma SRM que atende alunos com AH/SD, dentre os quais há alunos que possuem AH/SD em Matemática. Em 2016, a professora da SRM procurou a primeira autora deste trabalho para solicitar uma parceria entre a universidade e o colégio, para estimular o desenvolvimento destes alunos por meio da proposição de tarefas matemáticas que desafiassem os alunos a resolvê-las. Considerando que já desenvolvíamos animações no GeoGebra utilizando matemática, consideramos ser um meio interessante para estimular o desenvolvimento e a aprendizagem destes alunos. Então, desde agosto de 2017, temos trabalhado com os alunos com AH/SD da SRM deste colégio que estudam no período vespertino, alcançando resultados satisfatórios (Ruano Basniak, 2018).

Em 2019, ampliamos o projeto para os alunos que estudavam no período matutino e, que participavam da SRM no período vespertino. A turma de alunos que participava do projeto em 2018 teve algumas mudanças devido a mudança de ano letivo, sendo que quatro dos alunos continuaram no projeto e outros dois iniciaram sua participação, como detalhado na Tabela 1, em que também são indicados o ano em que os alunos estão matriculados e a área em que possuem AH/SD. Na Tabela 2 são indicados os alunos do período da tarde, os respectivos anos em que estão matriculados e a área em que possuem AH/SD.

Tabela 1

*Alunos do período matutino 2019.*

<b>Aluno(a)</b>	<b>Ano</b>	<b>Início no projeto</b>	<b>AH/SD</b>
Aluna 1	1º ano Ensino Médio	2017	Exatas
Aluno 2	9º ano	2017	Exatas
Aluno 3	9º ano	2018	Exatas
Aluno 4	8º ano	2019	Exatas
Aluno 5	7º ano	Agosto 2018	Exatas
Aluno 6	7º ano	2019	Exatas

Tabela 2

*Alunos do período vespertino 2019*

<b>Aluno(a)</b>	<b>Ano</b>	<b>Início no projeto</b>	<b>AH/SD</b>
Aluno 7	9º ano	2019	Exatas
Aluno 8	8º ano	Março 2019 a Abril 2019	Exatas
Aluno 9	8º ano	2019	Exatas
Aluna 10	8º ano	2019	Exatas
Aluno 11	7º ano	2019	Exatas
Aluna 12	7º ano	2019	Exatas
Aluno 13	6º ano	2019	Exatas

Os alunos do período matutino que já participaram do projeto na Iniciação Científica de 2017-2018 conseguiam construir animações com conteúdos de matemática que ainda não tinham tido contato, como sistema cartesiano e lógica com facilidade. Neste sentido, obtivemos resultados positivos quanto à aprendizagem destes conteúdos. Porém, embora os alunos utilizassem funções linear, afim e quadrática em algumas animações, não tínhamos claro se eles haviam compreendido este conteúdo. Como haviam dois alunos novos no período

matutino e todos os alunos do vespertino, resolvemos retomar alguns conteúdos, por meio da construção de cenários animados, tanto com os alunos da manhã como com os alunos da tarde, envolvendo principalmente os conteúdos de plano cartesiano, lógica, círculo, circunferência, função de primeiro grau e segundo grau, exponencial e logarítmica.

Os encontros foram registrados por meio de gravações de áudio e vídeo das telas dos computadores e fotografias de animações e respostas dos alunos em tarefas propostas. Neste relato, focamos as discussões quanto as construções realizadas pelos alunos, do período matutino e vespertino, no primeiro semestre de 2019, dos cenários animados Abelha (Figura 1), Mario Funções (Figura 2) e Skatista (Figura 3) que envolviam conceitos de funções.

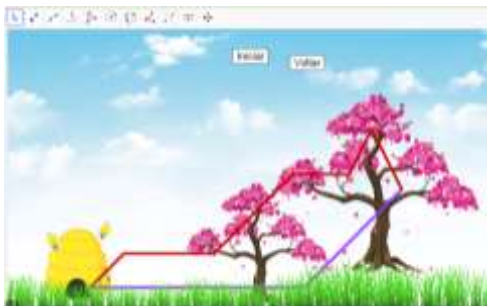


Figura 1. Animação da Abelha

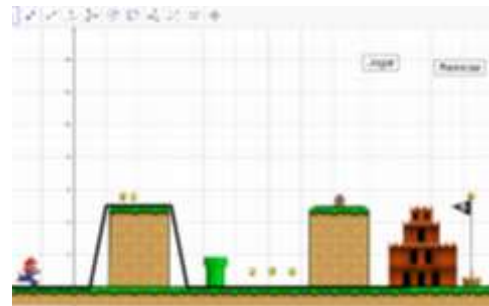


Figura 2. Animação do Mario Funções

## Resultados e Discussão

Com os alunos do período vespertino, durante a discussão e sistematização dos conteúdos trabalhados na animação Abelha, solicitamos que a explicassem as ideias e conteúdos empregados na construção. Durante suas explicações, os questionávamos sobre suas estratégias, para que pudéssemos identificar suas compreensões do conteúdo. Depois das discussões sobre cada tópico da construção relacionávamos o que haviam construído no cenário animado com as definições formais relacionadas o conteúdo funções do primeiro grau.

No excerto a seguir os alunos destacam as características das funções crescente, decrescente e constante na animação Abelha, atentando para os valores que podem ser assumidos em ambos os casos para o coeficiente angular, mesmo que não o nomeiem corretamente:

**P1:** *Como vocês construíram o caminho da Abelha?*

**Aluno 5:** *Nós fizemos com funções, depois limitamos e unimos. A função constante, crescente e decrescente.*

**P1:** *Qual a característica da função crescente?*

**Aluna 1:** *Positiva. Um número positivo multiplicando o x.*

**Aluno 5:**  $f(x) = 4x$  por exemplo. A cada uma unidade no eixo x são quatro no eixo y.

**P1:** *E a função decrescente é a mesma coisa?*

**Aluno 5:** *Não.*

**P1:** Por que?

**Aluno 5:** Porque na função decrescente a cada uma unidade no eixo  $x$  ele diminui unidades no eixo  $y$ . Por exemplo a função  $g(x) = -3x$ .

**P1:** Como é uma função genérica de primeiro grau?

**Aluna 1:**  $f(x) = ax + b$ .

**P1:** E como é a função crescente de primeiro grau genérica?

**Aluno 5:**  $f(x) = ax$ , com "a" sendo maior que zero.

**P1:** O "a" não pode ser igual?

**Aluna 1:** Não, porque vai dar zero o resultado.

**Aluno 5:** Se torna uma função constante.

**P1:** E a função decrescente?

**Aluno 4:**  $f(x) = ax$ , com o "a" é menor que zero.

Quanto a definição de função, que era objeto da animação da Abelha, no excerto a seguir, os alunos explicam porque tiveram que utilizar duas funções para construir o caminho da abelha, discutindo a relação entre as variáveis da função.

**P1:** E para a Abelha voltar a colmeia, o que vocês fizeram?

**Aluno 5:** Nós fizemos duas funções porque uma só não deu...

**Aluno 2:** Eu não consegui fazer todo o caminho em uma função só. Até fiz uma, mas a Abelha ia até o final e não retornava. Então tive que fazer duas funções, porque quando fiz tudo em uma só não deu certo.

**P1:** Alguém tentou juntar todas as funções em uma só?

**Aluno 5:** Eu tentei, mas não deu certo, a Abelha só foi até metade. Então tive que fazer outra função.

**Aluno 6:** Então não posso juntar todas as funções do caminho em uma só?

**Aluna 1:** Não, porque na coordenada só pode ter um valor para  $x$  e outro para  $y$  ao mesmo tempo, não pode ter dois.

**Aluno 5:** A função não pode estar em dois lugares, com duas coordenadas para  $x$ , no caso.

**Aluna 1:** Senão deixa de ser função.

**P1:** Qual a definição de função?

**Aluna 1:** Uma relação entre duas variáveis. A cada valor de  $x$  se tem apenas um valor em  $y$ .

Embora tenham usado duas funções na construção, antes das discussões nem todos os alunos compreenderam porque a primeira estratégia não havia sido aceita pelo software, e que isto era uma questão matemática.

Para iniciar funções de segundo grau foi trabalhado a animação Skatista (Figura 3), sendo entregue aos alunos instruções e questões que solicitavam que explicassem as ideias e conteúdos empregados na construção a partir do que eles realizavam no software. Um dos itens indicava aos alunos como construir um polinômio do segundo grau e na sequência, uma questão os indagava se era possível determinar uma função de primeiro grau que se assemelhasse a função polinomial de segundo grau construída. O Aluno 2 respondeu da seguinte forma:

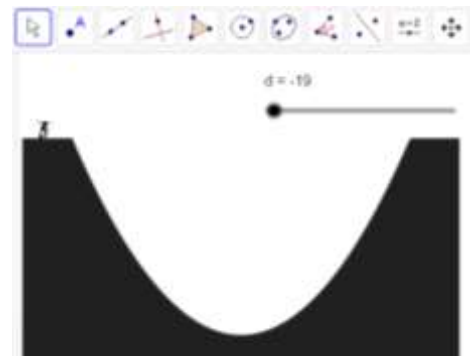


Figura 3. Animação do Skatista

*"Não. É possível fazer o percurso com a de 2º grau e com a de primeiro grau, pois as funções de 2º grau são únicas e totalmente diferentes da de primeiro grau".* Já o Aluno 5 explica que não conseguiu *"pois a função de 1º grau não é uma curva"*. O que mostra, juntamente com os gráficos construídos no software que os alunos conseguiram diferenciar as funções de primeiro grau e de segundo grau.

Uma das questões seguintes solicitava que os alunos explicassem porque a função escolhida para a rampa do skatista tem um comportamento de decrescimento e crescimento na mesma função. A Aluna 1 respondeu da seguinte maneira: *"Porque é uma função de 2º grau e possui as seguintes propriedades: para cada dois valores de  $x$ , há um mesmo valor de  $y$ , deixando a função com forma de parábola"*. A aluna já utiliza o nome específico desta curva, e elenca que dois valores do domínio possuem o mesmo valor no conjunto imagem, o que possibilita esse comportamento da função.

Para iniciarmos a função exponencial foram propostos passos para a construção de alguns pontos específicos no plano, seguido de questões que solicitavam que os alunos explicassem as estratégias empregadas na construção explicando a função usada e seus elementos. A Aluna 1 respondeu em relação a função utilizada: *"A base é constante e a variável ( $x$ ) se encontra no expoente, e conforme alteramos o valor para  $x$ , o valor da potência ( $y$ ) também muda como uma função"*. Assim, por meio da exploração e investigação sobre as coordenadas dos pontos na construção no GeoGebra os alunos conseguiram observar que era possível escrever uma função com características diferentes da função de primeiro e segundo grau e posteriormente definir suas componentes, como a base e expoente.

A próxima questão referente a esta tarefa, solicitava aos alunos que investigassem quais eram os possíveis valores para cada elemento da função. Em resposta a esta questão a Aluna 1 escreveu: *" $f(x) = a^x$ ,  $a \rightarrow R_+^*$ ,  $x \rightarrow R$ "*. Com a construção no GeoGebra os alunos testaram os valores, por meio da ferramenta controles e exploraram as possibilidades de valores, e assim foi possível observar e determinar quais deles eram aceitáveis para cada componente da função exponencial existir. Outra questão indagava os alunos se a função exponencial assumia

valor zero como resultado. Após os alunos observarem o gráfico no GeoGebra e realizarem cálculos, o Aluno 4 que não era possível porque nenhuma potência resultava em zero.

Com os alunos do período vespertino foi construído primeiramente a animação Abelha, e na sequência a Mario Funções. Durante a sistematização da construção da animação Abelha, ao questionar os alunos sobre porque não era possível fazer somente uma função para o caminho de ida e volta para a abelha, verificamos que compreenderam porque explicitaram partes da definição de função para justificar, alegando que não era possível. No excerto abaixo os alunos estabelecem uma relação de equivalência entre os conjuntos, para as coordenadas dos pontos que formam as funções:

**P1:** *Como foi feito o caminho para a Abelha retornar?*

**Aluno 7:** *Criando outra função.*

**P1:** *Por que tiveram que criar outra função?*

**Aluno 7:** *Uma função não pode ter dois valores [imagens] para o mesmo  $x$ .*

**Aluno 9:** *O retorno, ele "corta" da definição.*

**Aluno 7:** *Ele não aceita a segunda [função do retorno] porque já tem um  $x$  para aqueles valores. Se você coloca um valor para  $x$ , ele te responde com um em  $y$  [lei de formação]. Se coloca um valor para  $x$ , não resulta em dois valores para  $y$ .*

Após, discutimos sobre a lei de formação de uma função do primeiro grau ( $f(x) = ax + b$ ) questionando os alunos sobre o que cada coeficiente altera na função.

**P1:** *O que o coeficiente "a" altera na função?*

**Aluna 12:** *Angulação, em relação ao eixo  $x$ .*

**P1:** *E o coeficiente "b" altera o que?*

**Aluno 13:** *O eixo  $y$ .*

**Aluno 7:** *O quanto que sobe ou desce no eixo  $y$ .*

Inicialmente, durante as construções os alunos confundiram o coeficiente angular com o valor do ângulo. Somente após a sistematização este conceito foi compreendido pelos alunos como pode ser lido no excerto a seguir:

**P1:** *O valor do coeficiente angular é o valor do ângulo?*

**Aluno 7:** *Não, é o valor que multiplicado pelo valor dado de  $x$ , encontramos o de  $y$ .*

**P1:** *Não é o valor do ângulo?*

**Aluno 7:** *Não.*

O conceito de função por partes foi discutido e sistematizado na animação Balão com os alunos e pudemos verificar durante a construção da animação Mário que este conceito foi compreendido, como pode ser observado no excerto abaixo em que os alunos afirmam que somente o intervalo de uma função não é a uma função por partes:

**P1:** *Como vocês uniram o percurso da Abelha?*

**Aluno 9:** *Utilizando função por partes.*

**P1:** *Por que por partes?*

**Aluno 9:** *Pelas partes das "inteiras".*

**Aluno 7:** *A constante, a crescente e a decrescente.*

**P1:** *Somente um único intervalo da função é uma função por partes?*

**Aluno 7:** *Não.*

**P1:** *Por que?*

**Aluno 7:** *Porque não são duas funções juntas. Ela não vai ser constante mais alguma coisa, ela só vai ser constante.*

Já na animação Mario, a Aluna 10 explicitou em sua fala, como pode ser lido no excerto a seguir, ter compreendido quando a função é crescente ou decrescente, associando corretamente o valor do coeficiente angular. Por mais que ela não nomeie o coeficiente angular, mostra compreender como ele altera o gráfico e o comportamento da função.

**P3:** *Por que ficou assim?*

**Aluna 10:** *Porque tem o sinal negativo antes do  $x$  [ $g(x) = -x$ ], então temos uma função decrescente. Se fosse  $f(x) = 3x$  a função seria crescente. Quando o número com o  $x$  é positivo a função é crescente. Já quando o número é negativo a função é decrescente.*

Após toda a discussão e sistematização sobre o comportamento das funções de primeiro grau e sua definição, os alunos foram questionados novamente, para que então concluíssemos o que é função, de acordo com as questões levantadas e verificássemos o que havia sido entendido pelos alunos quanto a este conteúdo. O excerto abaixo permite concluir que os alunos, um complementando o outro, conseguem estabelecer o que é uma função:

**P1:** *Então o que é uma função?*

**Aluna 12:** *Uma regra que relaciona o conjunto  $x$  e o conjunto  $y$ .*

**Aluna 10:** *O valor de  $y$  é dependendo do valor de  $x$ .*

**Aluno 11:** *Para cada valor de  $x$  se tem um único valor em  $y$ , para ser função.*

**Aluno 9:** *Existem pontos que pertencem a função e pontos que não pertencem a função.*



Depois de construírem as animações Balão e Abelha, o conceito de domínio da função foi sistematizado e os alunos foram convidados a fazer a animação Mario. Durante as explicações dos alunos sobre como construíram essa animação, observamos que compreenderam o conceito de domínio da função, pois os valores correspondem ao intervalo desejado para os pulos do personagem Mario na montanha, como explicam:

**Aluna 10:** *Agora vamos definir as funções, de um ponto a outro, onde queremos que ela fique.*

**P1:** *Por que  $x$  na definição?*

**Aluna 12:** *Porque o  $x$  é o que "manda" na função [domínio].*

**Aluna 10:** *O  $-6$  é onde queremos que a nossa função se inicie, e em  $0$  é onde queremos que ela termine [em relação ao eixo  $x$ ]. Queremos que essa função fique restringida dentro desse intervalo [ $-6 < x < 0$ ].*

**Aluna 12:** *Para os valores de  $x$ .*

Verificamos que, tanto os alunos do período matutino quanto do vespertino, se apropriaram de conceitos matemáticos referentes a funções de primeiro grau, pois conseguiam explicar as conjecturas por meio da animação construída no software. Nesse sentido, o software possibilitou aos alunos testarem suas ideias, trocando ideias tanto com os colegas como com as pesquisadoras construindo conhecimento matemático.

Por meio dos excertos pudemos analisamos e identificamos o que foi compreendido, principalmente no que se refere a funções (constante, linear e afim) pelos alunos com a animação por meio do software, em que verificamos apropriações em relação ao domínio, coeficiente angular, linear, função por partes e a definição de função.

### **Considerações finais**

Por mais que todos os alunos que participam do projeto apresentem AH/SD em alguma área do conhecimento humano, com a ampliação da pesquisa pode-se observar a diversidade dos alunos e das turmas. Os grupos são diferentes entre si, eles apresentaram características gerais desiguais, enquanto uma turma é mais agitada e animada a outra é mais calma e silenciosa.

Com o projeto pode-se compreender características importantes dos alunos com AH/SD e que o trabalho desenvolvido com eles precisa ser diferenciado, pois, eles precisam se sentir desafiados e auxiliados no decorrer dos encontros, para que desenvolvam mais suas habilidades, sejam intelectuais ou práticas. O ambiente deve ser instigador e dinâmico, com diálogos e trocas de experiências, para proporcionar o pleno desenvolvimento tanto para os alunos como para os pesquisadores.

Por meio do projeto das animações e dos cenários os alunos puderam ter contato, discutir, argumentar e compreender o conteúdo como o de funções, neste caso, antes mesmo de serem estudados na sala de aula regular nos anos em que estão matriculados, alcançando resultados satisfatórios por meio de investigações, explorações, questionamentos e diálogos entre os

próprios alunos e entre alunos e pesquisadores, para que construíssem tanto os cenários animados no software GeoGebra como o conhecimento matemático.

## Referências

- Brasil. (2006). *Saberes e Práticas de Inclusão: desenvolvendo competências para o atendimento às necessidades educacionais especiais de alunos com altas habilidades/superdotação*. Brasília: MEC, Secretaria da Educação Especial.
- Bueno, A. C.; Basniak, M. I. (2018). *Contribuições da construção de animações no software GeoGebra para a mobilização do conhecimento matemático de alunos com Altas Habilidades/Superdotação*. In: IV Encontro Anual De Iniciação Científica. Campus Paranaguá - PR. Anais p. 119, 2018.
- Guimarães, G. R., Mello, R. M. (2006). *Grupo de trabalho sobre altas habilidades/superdotação*. Curitiba: PR.
- Mendonça, L. D.; Zavitoski, P.; Capellini, V. L. M. F. (2013). O que os professores compreendem por altas habilidades/ superdotação? *Anais do VIII Encontro da Associação Brasileira de Pesquisadores em Educação Especial*, Londrina.
- Mosquera, J. J. M.; Stobäus, C. D.; Freitas, S. N. (2013). Altas habilidades/superdotação: abordagem ao longo da vida. *Revista Educação Especial. Santa Maria*. Rio Grande do Sul, v. 26, n. 46, p. 401-420.
- Paraná, Secretaria de Estado da Educação. (2008). *Diretrizes curriculares da educação básica: matemática*. Curitiba: Secretaria do Estado da Educação.
- Renzulli, J. S. (2004). *O que é esta coisa chamada superdotação, e como a desenvolvemos? Uma retrospectiva de vinte e cinco anos*. *Educação*. Porto Alegre, n. 1, p. 75 - 121.