FORMAS E EQUAÇÕES: UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SEÇÕES CÔNICAS COM O GEOGEBRA

André Lúcio Grande*
Benedito Antonio da Silva **
andreluciogrande@gmail.com, benedito@pucsp.br

Faculdade de Tecnologia de Mauá, Brasil *

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil*

Resumen

Este trabalho objetiva realizar uma breve análise sobre as diferentes abordagens relacionadas a introdução ao estudo das seções cônicas utilizando-se das tecnologias voltadas ao ensino e a aprendizagem da Matemática. A partir de situações-problema descrevemos e avaliamos as diversas modalidades, tratamentos e pontos de vista no estudo do objeto matemático em questão, destacando as implicações didáticas dessas abordagens. Utilizou-se como recurso computacional o software GeoGebra, que permite de maneira interativa e dinâmica auxiliar os estudantes na elaboração de conjecturas, testar hipóteses e validar resultados na construção do conhecimento matemático. A pesquisa se caracteriza como sendo do tipo qualitativo, tendo como referencial teórico a questão da visualização no ensino da Matemática defendida por David Tall. Como resultados, destacamos as potencialidades do software GeoGebra no estudo das seções cônicas, sendo que por meio do mesmo podem ser evocados diversos conceitos, no sentido de permitir explorar as diversas representações do objeto matemático.

Palabras clave: *Seções Cônicas, Geometria Analítica, Visualização, GeoGebra.*

Introdução

A Geometria Analítica (GA) é um ramo da Matemática que apresenta uma relevância significativa no âmbito académico e escolar por propiciar, em grande medida, diversas aplicações em muitas áreas do conhecimento nos cursos que se utilizam de seus conceitos.

Essa disciplina aparece nos currículos escolares de Matemática nos vários níveis de ensino, em que se observa, mesmo de maneira implícita, a sua abordagem desde o ensino fundamental, em que os professores introduzem e destacam a importância da utilização de um sistema de coordenadas para a localização de pontos num plano e o cálculo de distâncias. No ensino médio ou secundário são estudadas as equações cartesianas e paramétricas de retas, circunferências e seções cônicas além das posições relativas entre as mesmas, em que se sobressaem algumas propriedades geométricas. Já no ensino superior a GA é abordada entre outras áreas na Engenharia, Física, Matemática e Computação. Nesses cursos, os objetos matemáticos como curvas e superfícies apresentam um tratamento tanto algébrico quanto geométrico e vetorial.

De um modo geral por meio do estudo da GA muitos problemas geométricos podem ser tratados de maneira algébrica e vice-versa, sendo que essa relação entre a Álgebra e a Geometria foi responsável por um importante progresso e desenvolvimento na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Esse fato foi destacado pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange ao afirmar que:

> Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, o seu progresso foi lento e o seu uso limitado; mas uma vez que estas ciências se uniram, elas deram uma à outra um apoio mútuo e rapidamente avançaram juntas para a perfeição.
> **(Lagrange,1795, p.271).**

Dentre os temas abordados num curso de GA destacam-se as seções cônicas, ou simplesmente cônicas, como a elipse, a hipérbole e a parábola. Tais elementos, que podem ser obtidos pela intersecção um cone circular reto com um plano, foram estudados desde a Antiguidade (séc. IV a.C.) por Menecmo, Apolônio, Euclides e Arquimedes de maneira sintética, com a construção dessas curvas sendo efetuada utilizando-se régua e compasso, e na solução de problemas geométricos, como a duplicação do cubo. Além disso, no século XVII, observou-se o estudo de suas propriedades geométricas e o traçado de tangentes das cônicas efetuados por Fermat e Descartes. Segundo Courant e Robbins:

> O tratamento métrico aplicado por Apolônio - as seções cônicas – elipses, hipérboles e parábolas – foi um dos grandes feitos da Antiguidade. A importância das seções cônicas para a Matemática pura e aplicada (por exemplo, as órbitas dos planetas e dos átomos de hidrogênio são seções cônicas) dificilmente é exagerada". Não constitui surpresa o fato de que a teoria grega clássica de seções cônicas ainda seja parte indispensável no ensino da Matemática. (Courant e Robbins, 2005, p.233).

Quanto aos ramos da Matemática em que o tema pode ser abordado, podemos destacar, além da própria Geometria Analítica o Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vetorial, Álgebra Linear, Geometria Descritiva e Geometria Diferencial.

Este tema, ao ser abordado em sala de aula pelos professores nos mais diferentes níveis de ensino, apresenta algumas particularidades, como a questão de uma abordagem sintética ou analítica do tema e um tratamento unificado ou fragmentado do mesmo. Destacamos também a grande variedade de conceitos que podem ser evocados tais como: transformações geométricas, equações cartesianas, paramétricas, vetoriais, lugares geométricos, transformações lineares, autovalores e autovetores, mudança de coordenadas, matrizes ortogonais e semelhantes, diagonalização de matrizes, invariantes algébricos e geométricos.

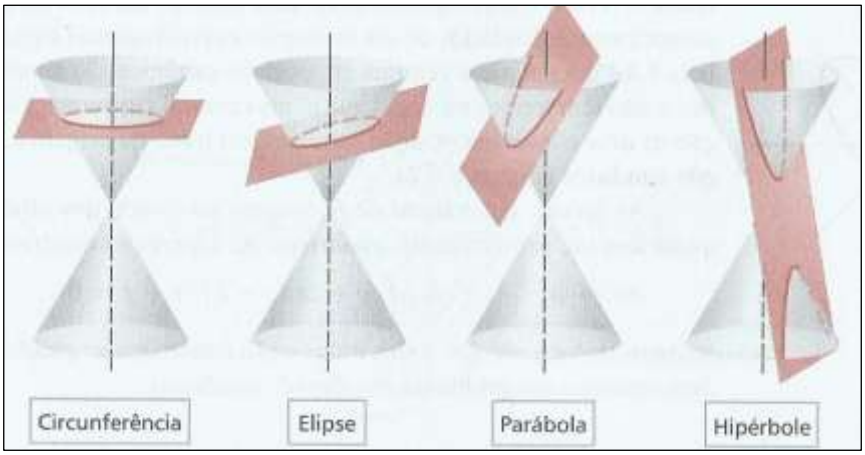

Figura 1. Seções Cônicas

Além da grande gama de conceitos elencados, cabe ressaltar que o ensino e a aprendizagem das seções cônicas devem contemplar questões que envolvam e potencializem nos estudantes o pensamento geométrico e a visualização das propriedades dos objetos matemáticos por meio de suas mais diversas representações, contribuindo-se assim para a compreensão e a generalização de alguns resultados.

Dessa forma, essa pesquisa objetiva realizar uma análise sobre as diferentes abordagens relacionadas a uma introdução ao estudo das seções cônicas, procurando descrever os diversos tratamentos e conceitos envolvidos sob as diversas representações utilizadas, como a algébrica, geométrica e numérica, utilizando-se como recurso tecnológico o software GeoGebra, que de maneira dinâmica e interativa, potencializa e contribui sobremaneira na visualização das propriedades dos objetos matemáticos, possibilitando a elaboração de conjecturas, teste e validação de hipóteses, no sentido de auxiliar na construção do conhecimento matemático.

A importância da visualização no ensino da Matemática

O papel da visualização no ensino e na aprendizagem em Matemática é um tema que vem sendo discutido por um número cada vez maior de educadores e pesquisadores. A visualização, em linhas gerais, no ensino e aprendizagem do Cálculo permite interpretar informações por meio da construção de representações visuais, de softwares, entre outros recursos didáticos.

David Tall (2002) considera a visualização não só relevante à Matemática como à Educação Matemática. Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que se pensou. Sobre a visualização o autor afirma que:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo

> intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (TALL, 2002, p.20 – tradução nossa).

O autor ressalta ainda que o uso do computador constitui uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados às explorações sensoriais por meio de percepções, visualizações e intuições. Para o autor, o computador se torna um "organizador genérico" de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente (ou micromundo) em que os alunos podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos. Por meio de um software, portanto, os alunos entram em contato com o objeto matemático.

Sendo assim, selecionou-se o software GeoGebra para a exploração das propriedades algébricas e geométricas no estudo das cônicas, visando trabalhar com os estudantes conceitos intuitivos de maneira dinâmica das mesmas, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

O GeoGebra é um software gratuito de Geometria Dinâmica, escrito na linguagem JAVA e disponível em português, que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra. Ele possui a vantagem de dispor, ao mesmo tempo, de duas representações diferentes de um mesmo objeto matemático: a geométrica e a algébrica, por exemplo, e essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

Aportes Teóricos

Um dos problemas fundamentais da GA consiste em determinar dada uma equação o lugar geométrico correspondente, ou seja, encontrar a curva ou a reta que contém todos os pontos, e somente esses pontos, cujas coordenadas satisfazem à equação, o que significa obter sua representação gráfica ou geométrica.

As seções cônicas podem ser abordadas essencialmente sob dois aspectos: o aspecto geométrico, em que essas curvas são definidas como lugares geométricos, utilizando-se um os dois pontos distintos (focos), uma reta diretriz e um número dada pela relação entre distâncias denominado excentricidade. Utilizando-se de um tratamento algébrico, tais curvas são definidas por certas equações de segundo grau, com representação por equações cartesianas, paramétricas, polares ou vetoriais.

Inicialmente uma situação problema em que se pode introduzir as seções cônicas, envolvidas num contexto da Física e da Mecânica, pode ser enunciada da seguinte maneira:

Situação-Problema

Uma barra rígida de extremidades A e B, de comprimento l, repousa inicialmente ao longo de um muro vertical. Em um dado momento essa barra começa a deslizar sobre um plano perpendicular ao muro e ao solo, suas extremidades A e B estão em contanto permanente respectivamente com o solo e o muro, até a mesma encontrar-se totalmente na horizontal, ou seja, o ponto B percorrer o comprimento l na horizontal e o ponto A se localizar no solo. Qual é a curva descrita por um ponto $M = (x, y)$ qualquer dessa barra?

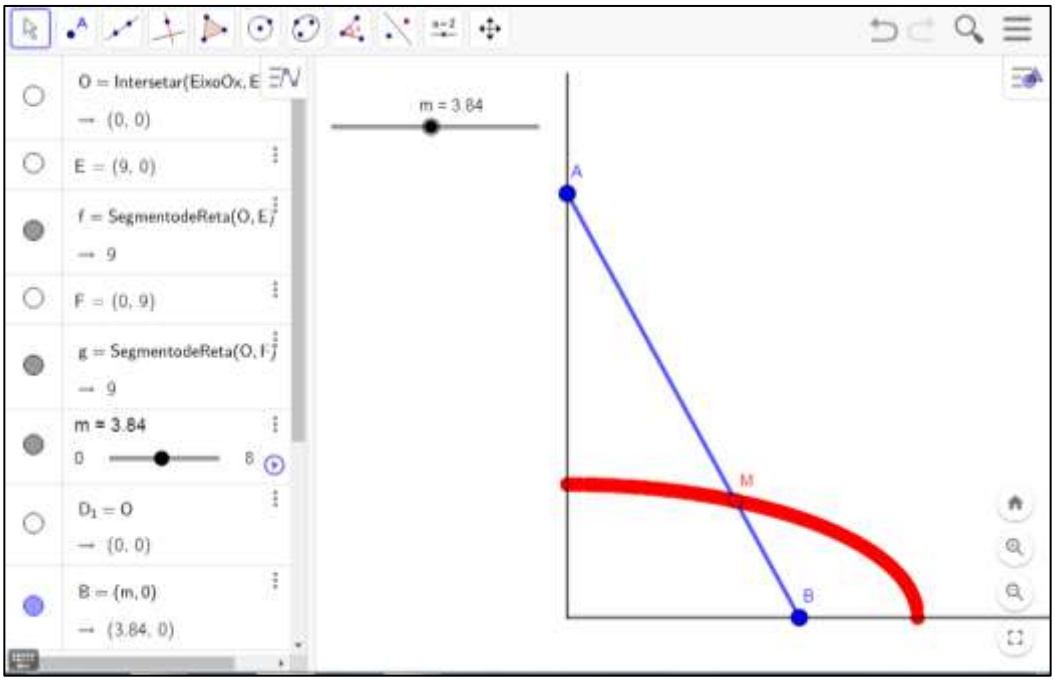

Figura 2. Situação-Problema

Essa situação sucinta uma série de conceitos que podem ser explorados de maneira dinâmica no GeoGebra. Primeiramente, pode-se abordar a questão do lugar geométrico descrito pelo ponto M com relação ao movimento simultâneo dos pontos A e B. Várias conjecturas e hipóteses podem ser elaboradas ao se movimentar com o seletor do GeoGebra sobre a trajetória descrita pelo ponto M. Demonstra-se algebricamente (não se constitui o objetivo desse trabalho), utilizando-se de relações trigonométricas no triângulo retângulo, que a curva descrita pelo ponto M é uma elipse, centrada no vértice do ângulo reto formado pelo muro e o solo. É interessante propor ainda na atividade para se determinar o lugar geométrico no caso do ponto M estar localizado no ponto médio do segmento de extremos A e B, que nesse caso é uma circunferência. Outras situações- problema podem ser elaboradas de maneira semelhante no sentido de se introduzir a hipérbole e a parábola. Nesse tratamento, destacam-se o aspecto da curva cônica ser gerada pelo movimento contínuo de um ponto e a sua abordagem ser tratada como um lugar geométrico.

Uma implicação dessa abordagem reside no fato de que a mesma serve como uma situação para a introdução ao conceito das curvas cônicas, mas que seu alcance se restringe ao aspecto motivacional para a introdução do conceito.

Outra abordagem das seções cônicas como um lugar geométrico pode ser dada de maneira sintética quando definimos uma cônica sendo uma curva plana descrita por um ponto, cujas distâncias a um ponto fixo e uma reta fixa estão entre si numa razão constante. O ponto fixo é denominado foco da cônica; a reta fixa a diretriz e a razão constante a excentricidade da cônica.

Para essa que essa abordagem possa ser construída no GeoGebra, temos a seguinte construção: Seja F um ponto fixo, D uma reta fixa ($F \notin D$) e sendo *e* um número real (*e>0)*. A curva C é o

conjunto dos pontos M do plano tal que $\frac{MF}{d(M,D)} = e$, também denominada cônica de foco F, de direção D e excentricidade e. Essas cônicas são chamadas de *elipse* no caso se *0 < e < 1*, *parábola* se *e = 1* e *hipérbole* se *e > 1.* A reta perpendicular a D passando pelo ponto F é chamada eixo focal, que se constitui como o eixo de simetria que toda seção cônica admite.

Esse tratamento destaca, de maneira sintética, propriedades das seções cônicas definidas como lugares geométricos, mas que podem ser feitas demonstrações no sentido de se obter as equações das curvas cônicas.

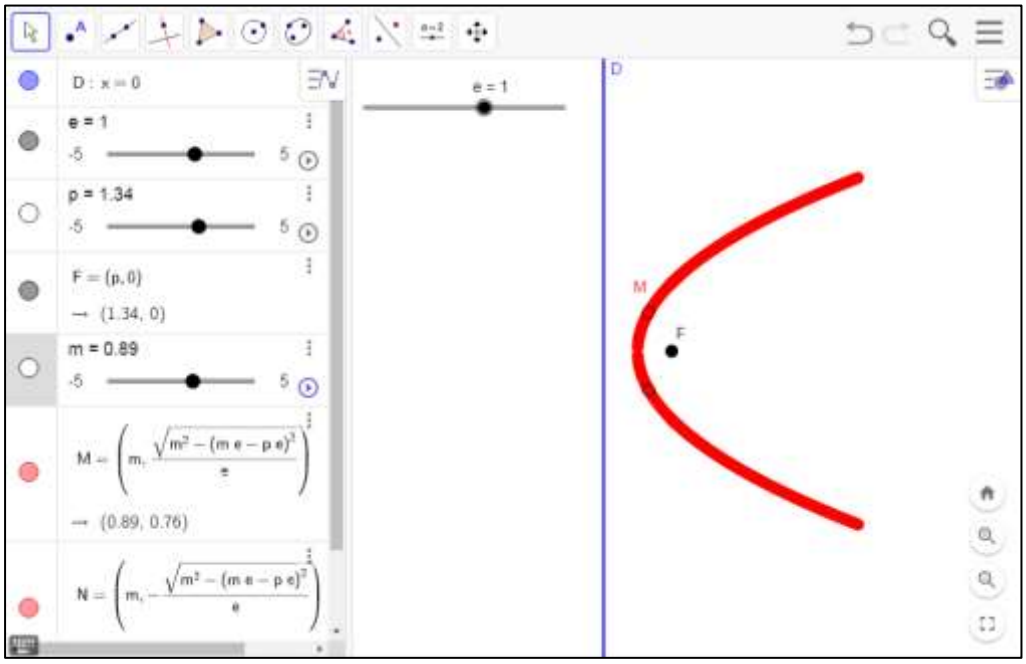

Figura 3. Seções Cônicas – Lugar Geométrico

Num curso de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, as seções cônicas são definidas como um lugar geométrico e são estudadas enfatizando-se suas equações cartesianas, paramétricas e polares, suas representações gráficas e o traçado de retas tangentes e normais a essas curvas.

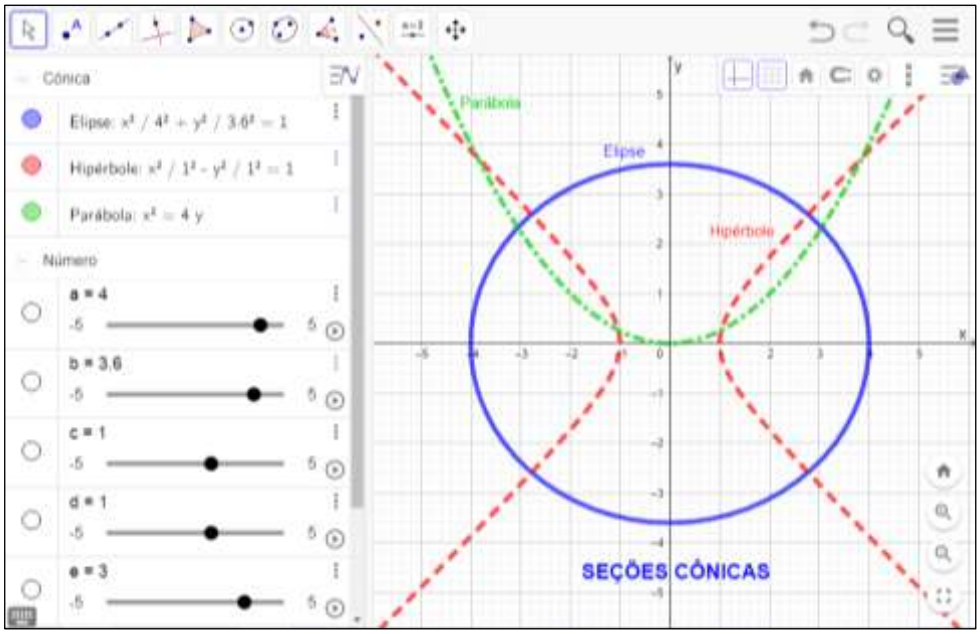

Figura 4. Equações das Seções cônicas - GeoGebra

Nessa abordagem, as cônicas são estudadas por uma equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z, em que:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

onde pelo menos um dos coeficientes a*, b, c, d, e,* ou *f* é diferente de zero, representa um superfície quádricas, ou simplesmente uma quádrica.

Se essa superfície for cortada por planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de intersecção será uma cônica. Essa curva se chama traço da superfície no plano.

Por exemplo, o traço da superfície quádrica no plano $z = 0$ é a cônica:

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0$$

contida no plano $z = 0$, ou seja, o plano xOy e pode represetar uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Em casos particulares pode representar uma reta, duas retas, um ponto, ou um conjunto vazio.

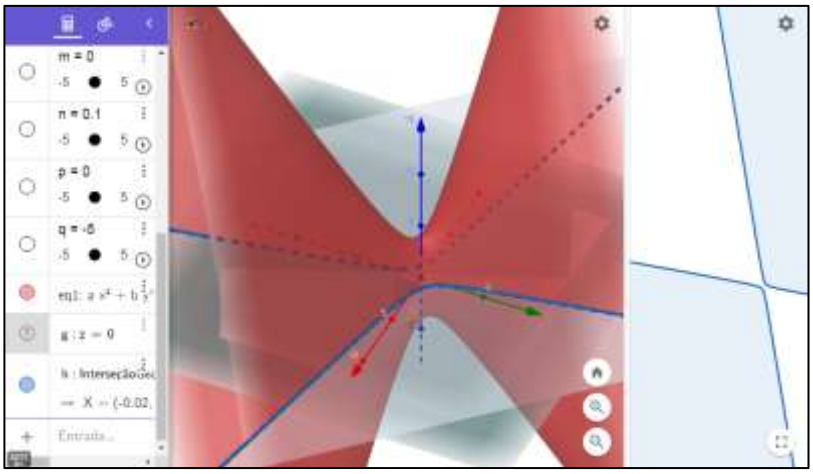

Figura 5. Equações das Seções cônicas - GeoGebra

Em Álgebra Linear, as cônicas e as quádricas apresentam um enfoque tanto algébrico e vetorial, enfatizando-se sua representação matricial por meio das formas quadráticas.

Uma abordagem pertinente que pode ser realizada ao estudarmos as cônicas e as quádricas pode ser interpretando-as algebricamente como uma forma quadrática, em que muitos conceitos podem ser evocados, tais como: equações algébricas, transformações lineares, autovalores e autovetores, mudança de coordenadas, matrizes ortogonais e semelhantes, diagonalização de matrizes, invariantes algébricos e geométricos sob endomorfismos.

Por meio das transformações lineares ortogonais (isometrias) sobre as cônicas e as quádricas, como rotações e translações, é possível efetuar-se uma mudança do sistema de coordenadas, no sentido de facilitar o reconhecimento e classificação desses objetos matemáticos.

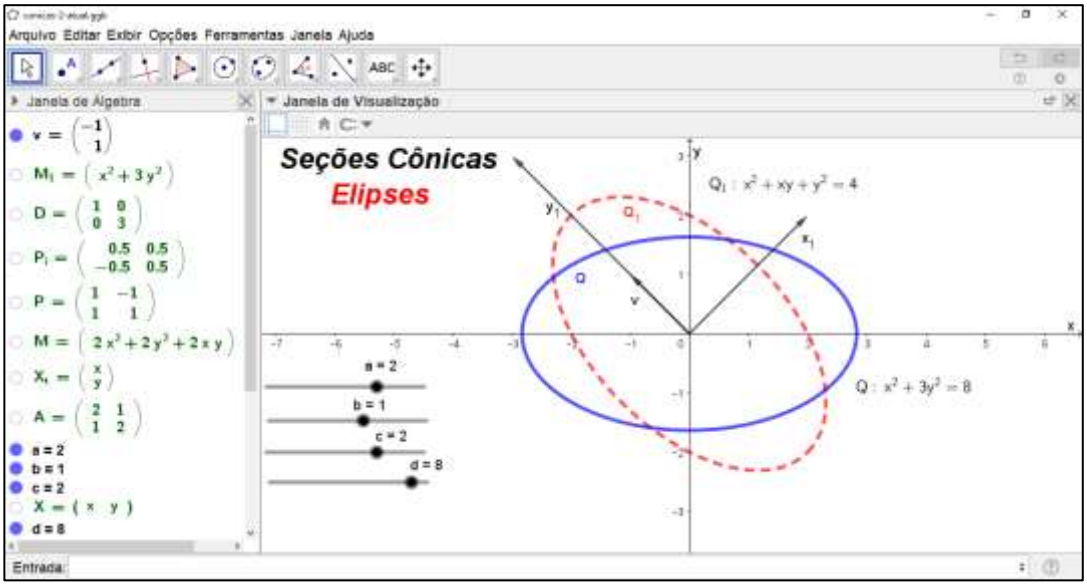

Figura 6. Rotação e Translação de eixos

Para a Geometria Diferencial, as seções cônicas e as superfícies quádricas são estudadas por meio de suas parametrizações, onde são exploradas propriedades locais e globais desses objetos matemáticos. Enfatiza-se nesse caso por exemplo a curvatura dessas curvas em cada ponto da mesma.

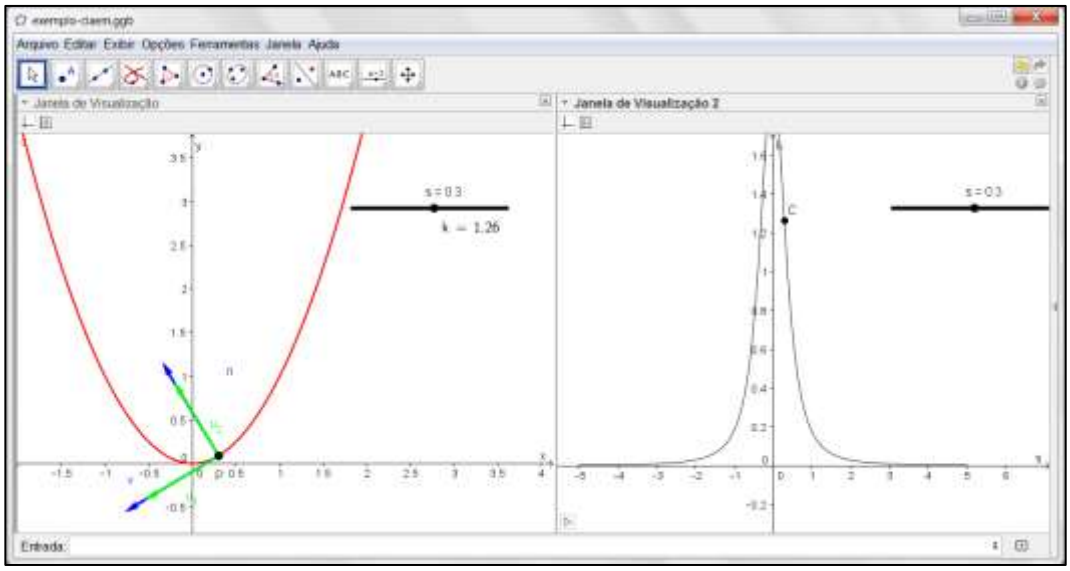

Figura 7. Curvatura de uma curva

Considerações Finais

Este trabalho descreveu e analisou as diferentes abordagens e tratamentos no estudo das seções cônicas sob o ponto de vista da visualização no ensino e aprendizagem da Matemática segundo David Tall e do uso do software GeoGebra como recurso auxiliar computacional.

Destacamos que essas múltiplas abordagens (sintética, analítica, vetorial) possibilitam evocar os mais diversos conceitos matemáticos em todos os níveis de ensino, o que permite aos professores trabalharem em sala de aula os mais variados temas.

Cabe ressaltar que essas não são as únicas abordagens e tratamentos possíveis na introdução do estudo das seções cônicas. Podemos introduzir o conceito por exemplo por meio da geometria projetiva, em que as cônicas são a projeção de um círculo sobre o plano.

O GeoGebra possibilita analisar de maneira dinâmica e não estática algumas propriedades geométricas das seções cônicas, sendo que o software permite aos estudantes, em grande medida, desenvolver intuições, gerar conjecturas e testar hipóteses, elementos essenciais para a construção do conhecimento matemático.

Dessa forma, o GeoGebra constituiu-se de uma valiosa ferramenta tecnológica que pode ser utilizada na construção do conhecimento matemático, conforme procurou-se mostrar por das diferentes abordagens voltadas a introdução ao estudo das seções cônicas.

Referências

Anton, Howard. Busby, Robert C. (2006). Álgebra linear contemporânea. Porto Alegre: Bookman.

Bogdan, R. e Biklen, S. A (1994). Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial.*3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Courant, R. & Robbins, H. (2005). O que é matemática? : uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.* Tese de Doutoramento. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Lagrange, J. L. (1795). Oeuvres de Lagrange / publ. par les soins de J.-A. Serret, sous les auspices du ministre de l'instruction publique. Paris: Gauthier-Villars.

Monteiro, A. (2001) Álgebra Linear e Geometria Analítica. Lisboa: McGraw-Hill.

Tall, D. O. (Ed.) (2002). Advanced Mathematical Thinking. Londres: Dordrecht, Kluwer Academic.