

ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL: INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Liseth Chacón Cama

Jesús Victoria Flores Salazar

LisethChacon.kf@gmail.com, jvflores@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

En esta investigación se analizará el trabajo matemático personal de los estudiantes cuando resuelven tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada de una función. Se trabajó con estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional de Moquegua. Se fundamentó en las dificultades que presentan los alumnos al estudiar la derivada y el énfasis en los desarrollos formales y algorítmicas dejando de lado las ideas geométricas. Se desarrolla el trabajo en el contexto de la Ingeniería Didáctica y con base teórica en la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático, se elaboró y aplicó una tarea diagnóstica y una tarea uno para identificar los paradigmas del análisis y estudiar la activación de las génesis en el plano semiótico-instrumental en el trabajo matemático de los estudiantes.

Palabras clave: *Derivada, interpretación geométrica, espacio de trabajo matemático personal, paradigmas del análisis.*

Introducción

En las últimas décadas se desarrolló un número considerable de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con la derivada, entre ellas las investigaciones de Rodríguez, Pochulu y Ceccarini. (2011), Vega, Carrillo y Soto (2014), Vrancken y Engler (2014), Gómez (2017) que afirman que observaron dificultad de los estudiantes al estudiar la derivada de una función real de variable real en su primer año de universidad. Estos hallazgos en sus estudios permitieron a los autores inferir que uno de los motivos es el exceso de definiciones formales en su enseñanza y uso de algoritmos en la resolución de problemas.

Estas investigaciones apotran al proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción derivada de una función real de variable real en las universidades, en bienestar de los estudiantes, ya que los estudiantes tienen la posibilidad de observar en estas investigaciones algunas dificultades que presentan los alumnos y sobre todo propuestas para superarlas.

Así también Artigue (1998) menciona que los estudiantes encuentran notorias dificultades al inicio de la etapa universitaria en el desarrollo de los cursos de análisis, relacionadas con la complejidad matemática de los objetos matemáticos básicos de este campo conceptual.

Igualmente, Tall (2011), infiere que estas dificultades se presentan particularmente de la idea que tenemos de tangente en geometría, y su transición a la definición en cálculo, en ese sentido refiere que la concepción de la tangente a un círculo en geometría no es necesariamente la definición en cálculo cuando nos referimos de tangente a una curva. Los estudiantes que inician un curso de cálculo tienen saberes previos de la recta tangente y para hablar de la derivada definida como la pendiente de la tangente a la curva en un punto; todo ello genera dificultades, pues no siempre ambas definiciones concuerdan lo que genera un obstáculo en el desarrollo de su aprendizaje. En ese sentido Vrancken y Engler (2014) y Montoya y Vivier (2015) concuerdan que para construir conceptos y procesos matemáticos es necesario analizar las ejecuciones de los alumnos.

En este sentido nos interesa estudiar ¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan estudiantes de ingeniería al resolver tareas que promueven la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real? Para poder dar respuesta a esta pregunta desarrollamos la presente investigación de corte cualitativa tiene que por objetivo identificar en los estudiantes de la activación de las génesis semiótica e instrumental, en el plano semiótico instrumental al desarrollar tareas sobre la interpretación geométrica de la derivada y analizar qué paradigmas del análisis utilizan.

Todo este análisis y desarrolla en el marco de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que fue desarrollado por Houdement y Kuzniak (2006), en el contexto de la Ingeniería Didáctica de Artigue Para alcanzar este propósito se diseñó y se aplicó dos tareas a los estudiantes para luego analizar sus producciones en base a la teoría

Material y métodos

La presente investigación descriptiva del tipo cualitativa según Hernández, Fernández y Baptista (2010) ya que le interesa analizar que conocimientos movilizan los estudiantes en tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función real de variable real, en este sentido utilizamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y se desarrolló las cuatro fases que considera la autora:

FASE I: Análisis preliminares

Realizamos un análisis histórico el objeto matemático la derivada, un análisis de las concepciones de los estudiantes y un análisis didáctico de los textos de Espinoza (2004) y Mitacc (2009).

FASE II: Análisis a priori

En nuestra investigación la docente actúa de investigadora y observadora al mismo tiempo. En esta fase diseñamos dos tareas que favorecen la interpretación geométrica de la derivada de una función de variable real, y utilizamos como medio el software GeoGebra, estas tareas se fundamentaron en ETM de Referencia en el dominio del Análisis Matemático, para ello consideramos variables micro didácticas. A continuación, la descripción de las tareas diseñadas.

Nombre	Finalidad	Tiempo	Fecha
Tarea <i>Exploratoria</i>	Reunir información sobre los conocimientos de los estudiantes participantes en relación a: recta y sus representaciones, recta secante y tangente, pendiente de una curva, existencia del límite de una función.	45 minutos	Del 07-13 de Octubre
Tarea: <i>Interpretación Geométrica</i>	Conjeturar lo que ocurre con la pendiente de una recta secante a medida que se va reducido el intervalo dado. Diremos que una función es derivable en un punto si gráficamente es localmente indistinguible de una recta. Es decir, si al elegir un punto e ir ampliando sucesivamente, llegase un momento que no pudiéramos distinguirlas.	150 minutos	Del 28 al 31 de octubre

Estas tareas fueron propuestas al estudiante en fechas mostradas y desarrollamos análisis a priori de las posibles soluciones de parte de los estudiantes, las estrategias que podrían utilizar para su resolución, así como prever los errores que puedan tener durante su desarrollo.

FASE III: Experimentación

Realizamos la aplicación de las tareas diseñadas en la fase anterior a 15 estudiantes que usan el primer ciclo de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional de Moquegua, en un laboratorio provisto de computadoras para poder hacer uso del software.

Todo este proceso fue filmado, fotografiado y la información fue recogida con fichas de observación y fichas de registro.

Analizamos las acciones de los estudiantes al enfrentarse a la secuencia de tareas, observamos de forma exhaustiva el proceso, con una ficha de observación se tomará nota de todo lo que acontece, es en este momento donde se utilizarán los instrumentos para recoger la información.

FASE IV: análisis a posteriori y validación

En esta fase realizaremos el análisis del trabajo matemático realizado por los estudiantes al resolver las tareas dadas, esto bajo el contexto del ETM y procederemos a la confrontación del análisis a priori y análisis a posteriori para realizar la validación interna de acuerdo con la ingeniería didáctica.

Algunos resultados

Tarea exploratoria: Se diseñó esta tarea con la finalidad de conocer a los estudiantes y diseñar una "Tarea 1" pertinente, lo más ajustada a la realidad del estudiante. Consta de seis 6 preguntas; y está organizada de la siguiente manera: La primera parte está compuesta de la pregunta N°1, N°2, N°3 y N°4, busca recoger las concepciones de los estudiantes con respecto al objeto la recta, para ello se les pidió que describan con sus propios saberes qué entendían por recta secante y tangente. De los quince estudiantes trece tienen una idea de la definición de la recta tangente y de la recta secante, nueve de ellos utilizaron una manera gráfica para representar las rectas con ayuda de una circunferencia. Sólo uno de los estudiantes, utilizó una curva en general para representar gráficamente sus rectas. Respecto a la pendiente la mayoría de los estudiantes la relacionó con el ángulo de inclinación de la recta, ayudándose de una representación gráfica. Solo un estudiante realizó una representación gráfica en el plano, la define como la tangente del ángulo respecto a las abscisas, y escribe la fórmula de la pendiente.

En la pregunta N°3 y N°4 el estudiante debe movilizar saberes respecto a la pendiente de una recta, ya se les presentó un gráfico para que ellos describan y se observó que 14 estudiantes utilizaron la fórmula para calcular el valor de la pendiente de manera correcta, así también identifican correctamente si la pendiente es positiva negativa o no existe, pero no fundamentan correctamente.

La segunda parte que conforman la preguntas N5 y N°6 diseñada con la intención de identificar las concepciones que tienen los estudiantes respecto al límite de una función, para ello se les pidió que calcularan un par de límites y luego que identificaran su existencia en una figura. En los resultados de los estudiantes se pudo observar que el 100% de los estudiantes utilizan correctamente los algoritmos para calcular se valor correspondiente del límite de una función; sin embargo, en la pregunta 6 se observa que sólo dos utilizan la definición de continuidad para fundamentar la existencia el mismo.

Tarea 1: Trabajemos con la Recta y analizamos su derivabilidad

El propósito de la Tarea 1 es analizar los paradigmas del dominio del análisis en el que los estudiantes se encuentran al resolver la tarea propuesta, así también identificar las génesis que se activan en el plano Semiótico Instrumental.

Agradecimientos

- A la beca Docente Universitario 2017-PRONABEC, por el apoyo brindado en el desarrollo de la investigación.
- A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto ID-694/2019, PUCP.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1, 40-55. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510104>

- Bustos, L. & Vásquez, J. (2016). *Uso del software CarMetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización*. (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. Recuperado de <http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2686>
- Gaona, Jorge (2018). *Elaboración de un Sistema de Evaluación en Línea como Proceso de Formación de Profesores de Matemáticas*. (Tesis doctoral). Université Sorbonne Paris Cité
- Gómez, M (2017). Una propuesta para la enseñanza de la derivada basada en el aprendizaje autónomo. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 4(8), 19-27. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a28>
- Gómez-Chacón, M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática*, 30(54), 1-22. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010) *Metodología de la Investigación*. Ed. Mc Graw-Hill Interamericana. 5ta ed., p. 9.
- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. RELIME, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática* (4-1), 5-39. Recuperado de <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Menares, R (2016). *Estudio del Espacio de Trabajo del Análisis de Profesores de Matemáticas en Chile: El Caso de las Funciones Continuas* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
- Montoya, E., & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito grafico Cambios de dominios y de puntos de vista. En T. Gutiérrez (Presidencia). XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM 2015. Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/753/325
- Ruiz, K., Córdova, Y., & Rendón, C., La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. En: Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación (12-14, noviembre, 2014: Buenos Aires, Argentina). Recuperado de <https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1190.pdf>
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 13(3), 461-487. Recuperado de <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/6970>
- Vega, M., Carrillo, J., & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *BOLEMA Boletín de Educación Matemática*, 28(48), 403-429. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021>

Vrancken, S., y Engler, A., Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad, *BOLEMA*, Boletín de Educación Matemática, 28(48), 449-468. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123021>