ERRORES Y DIFICULTADES RELATIVOS AL CONCEPTO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES

Aldrin Peña Lizano
Francisco Ugarte Guerra
pena.ae@pucp.edu.pe , fugarte@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo proponer una lista de los errores y dificultades presentes en el proceso de construcción del concepto de solución y conjunto solución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones lineales. Este trabajo forma parte de un trabajo de investigación más amplio en el que se utilizará la lista para analizar las concepciones de solución y conjunto solución que tienen estudiantes universitarios, en un primer curso de matemáticas. Para la elaboración de esta clasificación de errores y dificultades nos basamos en el trabajo de Soccas sobre errores y dificultades y lo adaptamos a nuestro objeto matemático. Luego aplicamos nuestra propuesta para clasificar los errores y dificultades reportados en otras investigaciones y concluimos con algunas sugerencias a tener en cuenta para la enseñanza del concepto de solución para ecuaciones lineales.

Palabras clave: conjunto solución, ecuaciones, dificultades

Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales nos proporcionan un medio para poder modelar situaciones problemáticas en particular, en algunas de las ingenierías. Para ello, en primer lugar, se traduce el problema al lenguaje algebraico, después, se obtienen las soluciones del sistema y, por último, se comprueba si la solución matemática obtenida es válida como respuesta al problema de partida. Nosotros los enfocaremos en nuestro trabajo de investigación en los errores y dificultades del concepto solución en un sistema de ecuaciones lineales, para ello nos basaremos en numerosas referencias respecto a este tema como Oktac, Asumen, Betancourt, Ochoviet, Paniza, Sadosky, etc. Luego, se creará una prueba diagnóstica, basada en las dificultades encontradas en dicho tema por los investigadores mencionados, que será aplicada a los alumnos de matemática básica para ingeniería de una universidad de Lima. Después, se analizarán sus respuestas contrastándolas con las dificultades y errores encontrados en los antecedentes.

Nuestra misión será encontrar evidencias sobre la comprensión del concepto de solución y conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, esperamos que el estudiante, después de determinar los valores de las variables del sistema, los pueda reemplazar en las ecuaciones para luego llamar a este par de valores solución del sistema. La rigurosidad de la simbología matemática no será parte de nuestro objetivo. Estas son dificultades de los estudiantes que se muestran al denotar el conjunto solución, según Socas (1997).

Antecedentes

Luego de revisar las investigaciones sobre solución de un sistema de ecuaciones lineales, mostraremos evidencias de los errores y dificultades acerca del concepto de solución

Según Ochoviet (2009), como afirma en su tesis de maestría, los alumnos pensaban que las únicas variables que se usaban en ecuaciones eran ***x*** y ***y***, por lo que sugiere que, para corregir estas dificultades, debemos enseñar a los alumnos los sistemas de ecuaciones lineales no solo usando las variables *x* e *y*. También observó que los alumnos no muestran el conjunto solución del sistema, sino que brindan la respuesta proporcionando los valores de *x* e *y*. Esto conlleva a que el estudiante piense que encontró dos soluciones y no una. Ochoviet sugiere, para evitar estos errores, enseñar y hacer hincapié en que los alumnos muestren siempre el conjunto solución del sistema. Otra observación de la investigadora fue que los estudiantes piensan que los sistemas de ecuaciones solo son compatibles determinados, por lo que, para evitar estos errores, la investigadora sugiere realizar ejercicios que incluyan sistema compatible indeterminado e incompatible. Finalmente, Ochoviet recomienda trabajar con los estudiantes ejercicios con un número de ecuaciones diferentes al número de incógnitas, pues ellos solo piensan en sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas como son el 2x2 y 3x3. Debido a estos resultados, consideraremos investigaremos ejercicios y problemas referidos al sistema de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones es menor al número de variables, pues los estudiantes tienen dificultades en este tipo de ejercicios. Otros investigadores como Panizza, Sadovosky y Sessa (1999) detectaron las dificultades que tienen los estudiantes de cuarto y quinto de secundaria de un colegio de Argentina, al resolver una ecuación con dos variables en forma adecuada. En sus resoluciones los estudiantes agregaban una ecuación para poder resolverlo o lo dejaban sin responder, esto hecho coincide con las conclusiones de Ochoviet (2009), donde afirma que los estudiantes tienen dificultad en resolver sistema de ecuaciones, con número de variables distintos al número de ecuaciones. Esta información de los investigadores brinda futuras pautas que servirán para diseñar nuestra prueba diagnóstica**.** Estas observaciones identificadas por Ochoviet, Panizza, Sadovsky y Sessa, quienes aportarán información para alimentar de manera adecuada nuestras actividades y secuencia didáctica. Podemos inferir que en los estudiantes que fueron evaluados por los investigadores predomina el pensamiento analítico aritmético, pues no llegan a tener capacidad de análisis para estar en el pensamiento analítico estructural.

Cutz (2005) detectó las dificultades que tienen los estudiantes con la representación geométrica del conjunto solución de un sistema de ecuaciones con dos y tres variables, además de relacionar e interpretar adecuadamente el pensamiento sintético geométrico y analítico estructural de Sierpinska (2000). La investigación consistió en entrevistar a 5 alumnos que recién estaban cursando álgebra lineal en una institución superior de México, a los cuales se les indicó que desarrollaran una serie de actividades, por ejemplo, la gráfica de ecuaciones con dos incógnitas, de manera que hubiera tres puntos de intersección. Se detectó que los alumnos dieron como las soluciones los tres puntos de corte; es decir, ellos identifican la intersección de cada par de rectas como solución cuando en realidad no hay. Nosotros podemos inferir que dichos estudiantes tienen dificultad de transitar del pensamiento sintético geométrico al pensamiento analítico estructural. El investigador también detectó que los alumnos consideran a una recta como un objeto de solución único y no de infinitas soluciones; también, observó que los estudiantes consideran las rectas como segmento y no como rectas. Esto es otra fuente de dificultad; es decir, no consideran que la recta se prolonga indefinidamente. El investigador concluyó que los estudiantes tienen distintas formas de interpretar el pensamiento geométrico y analítico; además, sugiere tener en cuenta las dificultades que encontró en los alumnos al iniciar el desarrollo del curso de álgebra lineal para poner mayor énfasis o crear actividades que ayuden a superar dicha dificultad.

Oktac, García y Ramírez (2006) consideraron realizar importantes actividades de reflexión y análisis a los alumnos para poder apreciar su nivel de comprensión del tema. En la primera actividad, consideraron indicar a los alumnos que resuelvan el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 4x + 6y = -8 \end{cases}$,para conocer las herramientas que utilizan los alumnos al resolver dicho sistema si realizan operaciones para eliminar una de las variables, se encontrarán con la siguiente expresión 0=32 y concluirán que el sistema no tiene solución. Los investigadores proponen hacerles a los estudiantes la siguiente pregunta: ¿por qué consideran que no tiene solución? Así, el docente podrá saber si aprendió el concepto y no solo el algoritmo de solución. Si la respuesta de los alumnos fuera infinitas soluciones, también se debe realizar con ellos la misma reflexión. Una segunda actividad consiste en pedir a los estudiantes que brinden ejemplos de un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con incógnitas que tenga infinitas soluciones y otro que además tenga como solución el punto (5; -3). Estos tipos de problemas representan para los estudiantes un gran desafío, porque ellos están acostumbrados a que se les brinde el sistema de ecuaciones y aplicar su algoritmo de solución. Lo que pretende esta pregunta es averiguar si el alumno tiene claro lo que significan las ecuaciones equivalentes como infinitas soluciones.

Por otro lado, en las investigaciones que realizó Mora (2001) a estudiantes de licenciatura, detectó que tenían dificultad en poder interpretar cuando, al resolver un sistema de ecuaciones lineales, se encuentran con la igualdad 0=0. Además, cuando se les muestra la gráfica de tres rectas que forman un triángulo, los estudiantes identifican los vértices del triángulo como solución del sistema. Por ello, el investigador concluye que los alumnos no pueden transitar los distintos modos de pensamiento de Sierpinska (2000).Oaxaca y De la Cruz (2009) detectaron en sus investigaciones que los estudiantes creen que la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales se encuentra en la intersección con los ejes coordenados; además, no relacionan la solución o soluciones del sistema como pares ordenados, sino que consideran como solución el valor de las variables de manera independiente.

E**rrores y dificultades según socas**

Mattos (2018) afirma que las investigaciones realizadas por Socas (1997) confirman que, en el aprendizaje de las matemáticas, surgen muchas dificultades en casi todos los alumnos. Por ello, clasifica dichas dificultades de la siguiente manera: la primera dificultad detectada por Socas es la asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Esto se debe a la precisión con que los estudiantes trabajan sus tareas asignadas, pues desarrollan el ejercicio o problema de la tarea asignada con un lenguaje habitual y no necesariamente con una precisión matemática. Un segundo tipo de dificultad, según Socas, está asociado con los procesos de los pensamientos matemáticos, donde los estudiantes pueden transitar sobre los conceptos matemáticos, pero sin el formalismo y la abstracción de este. El tercer tipo de clasificación de las dificultades, según Socas, está asociado a los procesos de enseñanza de matemáticas. Para ilustrarlo, el autor pone como ejemplo una institución escolar donde detectó que la enseñanza docente era tradicional y se limitaba a brindar los contenidos matemáticos de manera formal y rigurosa. En cuanto al currículo de las matemáticas, Socas advierte que muchos docentes se centran en un libro de texto y en su formalismo matemático correspondiente, de manera que no logran articular dicho conocimiento con los estudiantes y los métodos de enseñanza. El cuarto tipo de dificultad que clasifica Socas está asociado a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Este aparece cuando tratamos de lograr información sobre los procesos de desarrollo de aprendizaje de los estudiantes, de manera que se puedan regular los niveles de dificultad de las preguntas que se trabajan con ellos. El quinto tipo de dificultad que detectó Socas es aquel asociado a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Dicha dificultad aparece, debido a que muchos estudiantes tienen miedo o un comportamiento negativo hacia las matemáticas.

Propuesta de dificultades y errores para el conjunto solución

Nosotros detectamos en nuestra prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes de ingeniería de los primeros ciclos de una universidad de Lima, que han terminado sus estudios secundarios por lo menos hace 5 años y están empezando a estudiar su carrera profesional, los siguientes los errores y dificultades definidas por Socas (1997):

1. Tienen una dificultad de precisión según Socas (1997), al no poder escribir adecuadamente el conjunto solución en un sistema de ecuaciones lineales.
2. Tienen un error de procedimiento según Socas (1997), sólo al ser capaces de resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, y cuando se enfrentan a un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, lo agrupan de dos en dos, y muestra como la solución del sistema tres pares ordenados, además cuando se enfrentan a resolver una ecuación con dos variables, consideran que no hay solución porque falta como información otra ecuación.
3. Tienen un error del significado de la igualdad según Socas (1997), al considerar los términos independientes del sistema de ecuaciones como la solución.
4. Tienen una dificultad de pensamiento matemático y un error de procedimiento según Socas (1997) al considerar como solución todos los cortes entres graficas de las rectas y/o con los ejes coordenados, es decir si se les muestran las grafica de tres rectas de manera que se intercepten en tres puntos no colineales, algunos estudiantes responderían que el sistema tiene tres soluciones y otros indicarían que tienen 5 soluciones pues además están agregando los cortes con los ejes coordenados.
5. Los estudiantes tienen en algunos casos un pensamiento analítico aritmético y no tienen desarrollado un pensamiento sintético según Sierpinska (2 000), esto se manifiesta cuando

se enfrentan a la gráfica de un sistema de ecuaciones y en vez de interpretar la gráfica, determinan las ecuaciones del sistema para luego resolverlo, esto sería una dificultad de procedimiento.

6. Tienen una dificultad de pensamiento matemático y error de procedimiento según Socas (1997), cuando los estudiantes después de resolver un sistema de ecuaciones lineales, determinan los valores de las variables ***x*** e ***y***, con lo cual consideran que el sistema tiene dos soluciones y no una, porque puedo inferir que dichos estudiantes no lo consideran como un par ordenado la solución del sistema.

Aplicación de la lista de errores y dificultades

Ahora nosotros consideraremos las definiciones y clasificaciones de errores y dificultades trabajadas por Socas (1997) para analizar los antecedentes registrados.

1. Según Ochoviet (2009), hay algunos estudiantes que sólo reconocen las variables ***x*** e ***y***, en nuestros casos algunos estudiantes sólo reconocían como variable a ***x***.
2. Según, Panizza, Sadovosky y Sessa (1999), muchos estudiantes no son capaces de resolver una ecuación con dos variables, debido a que consideran que falta una ecuación, en nuestro caso dicha respuesta coincidió con algunas resoluciones de la respuesta de la prueba diagnóstica, esto sería un error de procedimiento según Socas(1997) pero otros mostraron algunas soluciones de la ecuación, y fueron sólo 2 alumnos de 40 estudiantes que fueron capaces de resolver correctamente la ecuación, podemos inferir que dichos estudiantes han transitado por el pensamiento analítico estructural de Sierpinska(2 000)
3. Según Cutz (2005), Eslava y Villegas (1998), Oaxaca y De La Cruz (2009), cuando los estudiantes se enfrentan a la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, brinda como soluciones los tres puntos de cortes o le agregan además los cortes con los ejes coordenados,. Esto sería un error de procedimiento según Socas (1997)
4. Según Ochoviet (2009) y Valencia (2015), detectaron que los estudiantes evidenciaron problemas al resolver sistema de ecuaciones lineales que tenga el número de ecuaciones diferente al número de incógnitas~~,~~ Esto sería un error de procedimiento según Socas (1997).

Después de revisar los antecedentes y analizar los resultados de la prueba diagnóstica en base a los errores y dificultades, según Socas, consideramos las siguientes sugerencias que ayudarán a desarrollar un mejor entendimiento y comprensión de la solución o conjunto solución en un sistema de ecuaciones lineales:

1) Se debe desarrollar con los estudiantes sistemas de ecuaciones lineales del que sean compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, porque hemos detectado
2) Se debe proponer a los estudiantes ejercicios donde ellos puedan discriminar cuando es o no es solución de un sistema de ecuaciones lineales, en forma analítica y gráficamente,
3) Se debe desarrollar ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales con variables diferentes a ***x*** e ***y***, hemos detectado en algunas resoluciones de las respuestas de nuestra prueba diagnóstica, que hay dificultad por aceptar a **a** y ***b***, como variables.

4) Se debe proponer ejercicios de sistema de ecuaciones lineales que tengan como información las soluciones del sistema, de manera que el estudiante pueda construir un sistema de ecuaciones,

Referencias

Cutz, B. (2005) Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. Tesis de maestría, Cinvestav- IPN

Eslava, M., & Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar sintético y analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. (Tesina de Diplomado, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México).

González, D., & Roa, S. (2015). *Los sistemas de ecuaciones lineales: evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios.* En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 102-109). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Mattos, J. (2 018) *Un análisis de las concepciones acerca de las dificultades, los obstáculos y los errores relativo al límite* (Tesis de magister en la enseñanza de las matemáticas).

Mora, B. (2001). *Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales* (Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN. México).

Ochoviet, T. (2009) *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. (Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México).

Oaxaca, J. (2002). Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético geométrico al analítico aritmético en la solución de sistema de ecuaciones lineales.

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. Enseñanza de las Ciencias, 17 (3), 453-461.

Sierpinska, A (2000), Part II-Chapter 7 on some aspects of students thinking in linear algebra.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. La educación matemática en la enseñanza secundaria, 125-154.