

DIFICULTADES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Alejandro M. Ecos Espino*

Joffré Huamán Núñez**

Zoraida R. Manrique Chávez***

alejandroe2013@hotmail.com, joffrehn13@hotmail.com, zoramanrique@hotmail.com

Universidad Nacional de Moquegua, Perú*

Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, Perú**

Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía, Perú***

Resumen

El estudio tuvo como objetivo identificar las dificultades en estudiantes de ingeniería en relación al pensamiento variacional. Se tomó como referencia la Teoría de los Registros Semióticos de Duval. El trabajo fue de tipo no experimental, con diseño descriptivo comparativo. La valoración de las respuestas fue bajo la perspectiva cualitativa, desde una óptica exploratoria y descriptiva. Participaron 100 estudiantes de ingeniería civil de las universidades nacionales y privadas de la provincia de Abancay. Se elaboró un cuestionario con 3 preguntas diseñadas dentro del marco del comportamiento variacional de las funciones. Los resultados indican la escasa reflexión de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de las funciones. Presentan dificultades para discriminar entre ceros y puntos estacionarios de una función, intervalos de variación de la variable dependiente, intervalos de positividad, negatividad y monotonía de una función. Las dificultades encontradas son tipo cognitivo debido a la inadecuada conversión de un registro a otro.

Palabras clave: Dificultades, funciones, comportamiento variacional.

Introducción

En el ambiente universitario, el aprendizaje de la matemática constituye un problema crítico que se manifiesta a través del número elevado de estudiantes desaprobados y una limitada comprensión de los distintos conceptos que se abordan dentro de la matemática a nivel superior. Esta problemática se ve favorecida por la preferencia de los docentes a la enseñanza tradicional, así como la forma pasiva en que los estudiantes hacen frente a su aprendizaje de carácter matemático.

Dentro del desarrollo del pensamiento matemático avanzado, el modelo de enseñanza tradicional no ha sido efectivo y centra su actuar en la comprensión de algoritmos de resolución mecánica de ciertos ejercicios tipo, generando dificultades en la comprensión adecuada de

conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. (Artigue, 1995). Se puede lograr que los estudiantes calculen, límites, derivadas o integrales sin que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión. (Cantoral y Mirón, 2000)

El desarrollo del pensamiento variacional constituye un elemento importante en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior, sobretodo en carreras de ingeniería, ya que, a través de él, los estudiantes tendrán la capacidad de reconocer, percibir, identificar y caracterizar los procesos de variación y cambio de variables en distintos escenarios, permitiendo de esta manera su descripción, modelación y representación en diferentes registros como el verbal, tabular, gráfico o algebraico. En tal sentido, en este trabajo nos planteamos el siguiente problema de investigación: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes de ingeniería en relación al desarrollo del pensamiento variacional?

Aspectos Teóricos

La teoría de los registros semióticos

Duval (1998) considera que las representaciones semióticas de un objeto son absolutamente necesarias para poder representar una idea o un objeto matemático. Juegan un papel esencial en el desarrollo de representaciones mentales, en el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimiento, aumentando la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo.

El manejo de diferentes representaciones para un mismo objeto aumenta la capacidad de pensamiento del sujeto sobre ese objeto y por lo tanto su conocimiento del mismo. Cada representación proporciona un aspecto diferente del objeto dependiendo del sistema utilizado para su producción, pero siempre el objeto representado se mantiene invariante (Duval, 2004).

En este sentido, aprender matemáticas se concibe como el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación, así como la discriminación y coordinación de sistemas semióticos de representación para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación. (Duval, 2000)

Ver los conceptos en múltiples registros y desde múltiples perspectivas permite a los estudiantes organizar mejor su conocimiento. Esto se considera una condición cognitiva necesaria para el aprendizaje (Robert & Speer, 2001, en González, 2006, p. 50).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se adopta la premisa teórica de los sistemas semióticos de representación en el sentido que no sólo son necesarios para fines de comunicación, sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento.

Dificultades y errores en el aprendizaje de la Matemática

Socas (1999) organiza las dificultades en el aprendizaje de la matemática en cinco categorías:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de la matemática.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de la matemática.
4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes.
5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

Las dos primeras dificultades están relacionadas a los objetos matemáticos y procesos de pensamiento, la tercera a los procesos de enseñanza, la cuarta al desarrollo cognitivo de los alumnos y la última a la falta de una actitud racional hacia la matemática. Todas estas dificultades se conectan y se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas.

Duval (2004) sostiene que muchas de las dificultades de los estudiantes se pueden describir y explicar debido a la falta de coordinación entre registros de representación. Las dificultades cognitivas para la conversión se determinan principalmente por la no congruencia entre dos contenidos de representación del mismo objeto y por la no reversibilidad de la conversión. Con sólo invertir la dirección del cambio de registro, los que aprenden dejan de reconocer los objetos representados.

Pensamiento Variacional

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que varíen conjuntamente en semejanza a los patrones de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2006, p. 138)

Cantoral (2013) manifiesta que este tipo de pensamiento comprende las matemáticas del cambio por un lado y los procesos de pensamiento por el otro; implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, conceptos de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos de cambio.

El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales, para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión.

Aspectos Metodológicos

El estudio es de tipo no experimental, con diseño descriptivo comparativo en el sentido que indican Hernández et al (1997). Se diseñó y validó un cuestionario compuesto de 3 situaciones problemáticas, relacionadas a la identificación de regiones de variabilidad tanto para "x" como para "y"; regiones de crecimiento, decrecimiento, estabilización, valores extremos, así como análisis y descripción del comportamiento de la función. La primera exigía a los estudiantes la coordinación del registro gráfico y el algebraico. La segunda, la coordinación del registro algebraico y el verbal y/o gráfico. La última situación problemática, exigía la coordinación del registro gráfico y el verbal. Fue aplicado a 100 estudiantes del primer ciclo de estudios de la

carrera de ingeniería civil de 03 universidades de la provincia de Abancay: 48 de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac (UNAMBA), 29 de la Universidad Tecnológica de los andes (UTEA) y 23 de la Universidad Alas Peruanas (UAP) sede Abancay. Se efectuaron análisis de varianza de un factor para identificar diferencias entre las medias obtenidas por los grupos. Por otro lado, el análisis de las respuestas y la determinación de las dificultades de los estudiantes se realizaron desde una óptica cualitativa, a través de un estudio de caso, en su forma exploratoria y descriptiva (Simons, 2011, p.43)

Resultados obtenidos

Tabla 1.

Medias obtenidas por los grupos

Grupos	M	DE
UNAMBA	7.4375	4.1071
UAP	5.3043	0.8757
UTEA	5.3276	1.2121

Fuente: Elaboración propia

Dentro de una escala de evaluación vigesimal, se encontró que, en todos los grupos de estudio, el rendimiento medio alcanzado por los estudiantes es deficiente. En general, este rendimiento es una característica en los estudiantes de las 2 universidades particulares donde se refleja menor dispersión. En la universidad estatal (UNAMBA), la mayor dispersión de los resultados, refleja la existencia de mejores calificaciones en algunos estudiantes.

Tabla 2. *Comparación de medias entre grupos de estudio*

Grupos	F	P
UNAMBA UAP	21.9	0.000*
UNAMBA UTEA	11.4	0.000*
UAP UTEA	0.52	0.061

Fuente: Elaboración propia

**p < 0.05*

Se encontró diferencias estadísticamente significativas en la media obtenida por los estudiantes de la universidad estatal (UNAMBA) en comparación a las otras 2 universidades ($p < 0.05$). Por otro lado, los rendimientos obtenidos por los estudiantes de las dos universidades particulares

no difieren significativamente ($p > 0.05$). En los estudiantes de las universidades privadas, es común el rendimiento deficiente, mientras que, en la universidad estatal, si bien el rendimiento no deja de ser deficiente, es mejor que en las otras 2 universidades.

Tabla 3.

Porcentaje de respuestas correctas en relación a positividad, negatividad y monotonía

Grupo	CP	CN	DP	DN	P	N
	Registro Gráfico (RG)				Registro Algebraico (RA)	
UNAMBA	50.00%	37.50%	50.00%	50.00%	35.40%	27.10%
UAP	60.90%	52.20%	60.90%	65.20%	0.00%	0.00%
UTEA	48.30%	41.40%	48.30%	65.50%	3.45%	0.00%

Fuente: Elaboración propia

En los tres grupos de estudio, el trabajo dentro del registro gráfico resultó ser más efectivo en cuanto a la determinación de las regiones de crecimiento, decrecimiento, positividad y negatividad de una función. Esto refleja que gran parte de los estudiantes hacen correctamente la lectura de la gráfica propuesta y realizan una coordinación correcta entre la gráfica y la simbología algebraica propuesta como alternativa de respuesta. En cuanto a los que contestaron de manera incorrecta, por ejemplo, en la categoría Creciente y Positiva (CP), la alternativa más elegida fue la B, lo cual refleja que la concepción que función que crece debe ser positiva o viceversa, como el caso del estudiante 21 no discrimina adecuadamente que cuando "x" varía de 0 a 1, la función es positiva pero estable, y que cuando "x" varía de 1 a 2, la función es negativa a pesar que está creciendo, poniendo de manifiesto que existe una lectura gráfica inadecuada del comportamiento de la variación de la función.

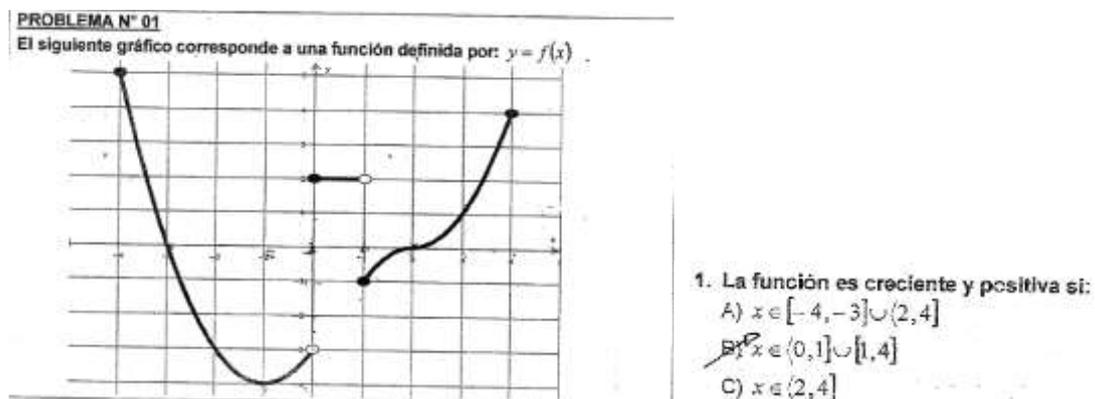


Figura 1. Respuesta del estudiante 21

Tabla 4.

Porcentaje de respuestas correctas por grupo sobre determinación de regiones o puntos de estabilidad

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	31.30%
UAP	60.90%
UTEA	62.10%

Fuente: Elaboración propia

Las dificultades encontradas en esta tarea se refieren a la confusión en los estudiantes para interpretar la estabilidad de la función. Algunos estudiantes confunden estabilidad de la función con nulidad de la función, lo cual les llevó a elegir como alternativa de respuesta la A, como es el caso del estudiante 2, que elige la alternativa donde la función se anula, pero parece no asociar estabilidad con falta de crecimiento o decrecimiento, es decir, no utiliza la variación de la función como recurso para responder la pregunta:

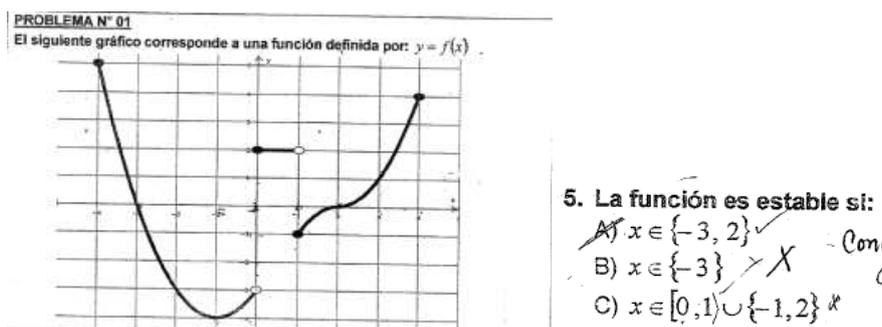


Figura 2. Respuesta del estudiante 2

Tabla 5.

Porcentaje de respuestas correctas sobre determinación de intervalos de variación de las variables

Grupo	Registro Gráfico	Registro Algebraico
UNAMBA	66.70%	29.20%
UAP	58.00%	0.00%
UTEA	43.70%	0.00%

Fuente: Elaboración propia

El trabajo en el registro gráfico fue más efectivo en los estudiantes de los grupos de estudio en cuanto a la determinación de intervalos de variación de las variables. Las dificultades

encontradas en este registro tienen que ver la lectura inadecuada de la gráfica que no refleja la real variación de la variable solicitada, como el caso del estudiante 2:

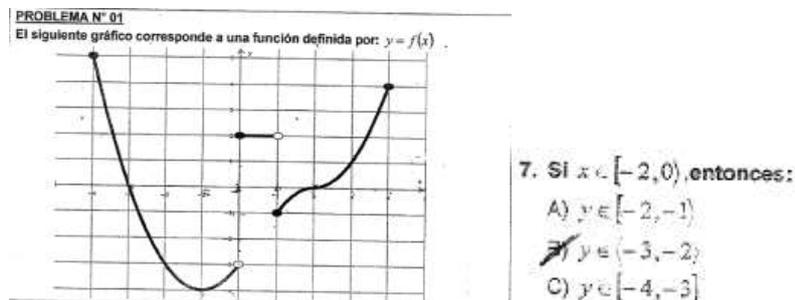


Figura 3. Respuesta del estudiante 2

En cuanto al trabajo en el registro algebraico, los estudiantes recurrieron a la estrategia de la tabulación más que plantear una estrategia gráfica o algebraica que refleje la real variación de la variable. Esta tabulación se realizó de manera directa sin considerar la forma de la función que afecta la variación de la variable solicitada, como el caso del estudiante 13 que prefiere trabajar la función en forma puntual y realizar una lectura directa de los resultados sin analizar la forma de la expresión y como ésta determina la variación de la variable "y":

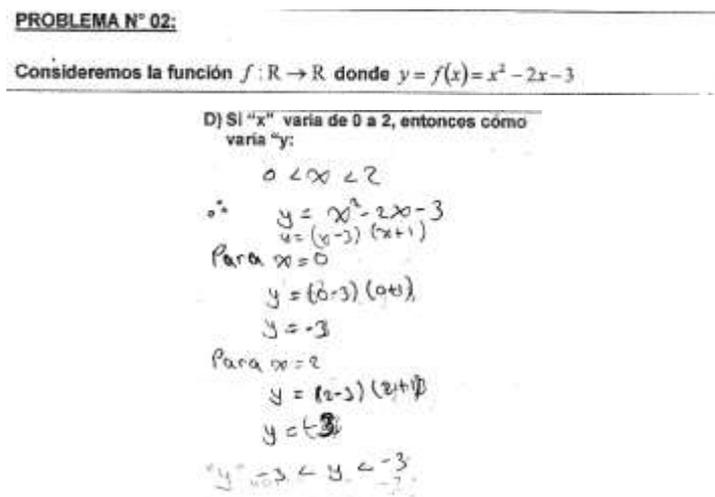


Figura 4. Respuesta del estudiante 13

Tabla 6.

Porcentaje de respuestas correctas por grupo sobre análisis del comportamiento de la función

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	9.38%
UAP	10.90%
UTEA	15.50%

Fuente: Elaboración propia

Los porcentajes bajos en todos los grupos refleja las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto la lectura de la gráfica y esbozar una descripción correcta sobre el comportamiento de la función. Las mayores dificultades se presentaron cuando los estudiantes tuvieron que analizar y describir gráficamente cómo se produce la variación de la función. Lo anterior pone de manifiesto los problemas que tienen los estudiantes para coordinar el registro verbal y el gráfico, como el caso del estudiante 34:

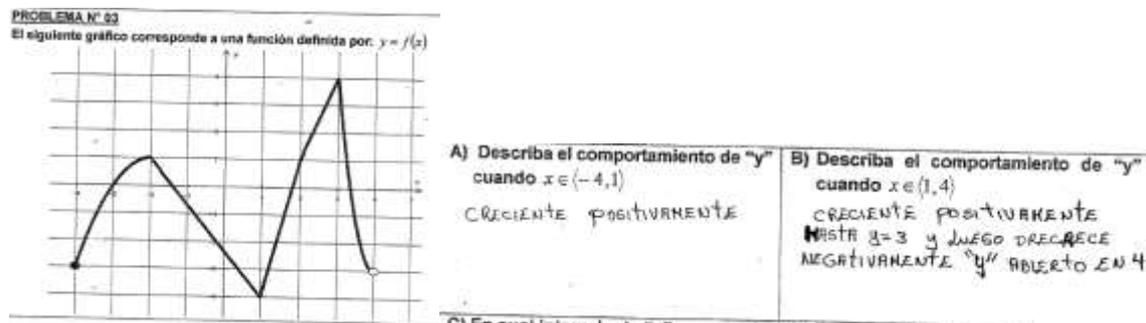


Figura 5. Respuesta del estudiante 34

Tabla 7.

Porcentaje de respuestas correctas sobre identificación de valores extremos

Grupo	Porcentaje
UNAMBA	50.00%
UAP	6.52%
UTEA	6.90%

Fuente: Elaboración propia

En este apartado, los estudiantes que no plantearon una respuesta correcta simplemente dejaron en blanco la casilla. Lo anterior pone en evidencia las dificultades de los estudiantes para interpretar gráficamente el menor o mayor valor de "y". Esta falta de lectura correcta de la gráfica, pone de manifiesto dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a la coordinación entre el registro verbal y el gráfico

Consideraciones finales

El análisis de los resultados obtenidos luego de la aplicación del cuestionario refleja la existencia de dificultades en los estudiantes cuando tienen que determinar y describir el comportamiento variacional de las funciones representadas ya sea gráficamente o en forma algebraica o analítica.

El análisis de los datos reportados en las tablas 3, 5 y 6, ponen de manifiesto que los estudiantes prefieren trabajar las funciones en forma puntual, pudiendo leer puntos o trazarlos, sin embargo, no muestran una real reflexión sobre el comportamiento variacional en intervalos de las variables o en forma global, lo cual concuerda con lo manifestado por Bell y Janvier (1981).

El análisis de los resultados reportados en la tabla 4, refleja que los estudiantes tienen dificultades para discriminar entre punto estacionarios de una función y los ceros de la función, lo cual indica confusión entre el comportamiento de la función y la ubicación de la función. Esta confusión también se presenta al momento que los estudiantes tienen que discriminar entre el crecimiento y decrecimiento de la función con su positividad y negatividad, lo que concuerda con lo encontrado por Dolores (2004)

Por otro lado, las dificultades encontradas por los estudiantes parten en gran medida a la inadecuada coordinación entre registros de representación de una función, en nuestro caso, los registros gráficos, algebraicos y verbales. Estas dificultades de tipo cognitivo no permiten realizar una adecuada conversión de un registro al otro como resultados de la falta de congruencia entre las unidades significantes que componen los registros de representación, lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2004)

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P., (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica
- Bell A. & Janvier, C. (1981) The interpretation of graphs representing situations. *For de Learning of Mathematics* 2(19), 34-42
- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional*. México DF, México: Progreso S. A.
- Dolores, C. (2007). *La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas*. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.M., Carrillo, C.; López, I. y Navarro, C. (Eds.). Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula (pp.169-204). Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos
- Dolores, C. (2004) Acerca del análisis de las funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(7), 195-208
- Duval R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México DF, México: Grupo Editorial Iberoamérica SA.
- Duval R. (2004). *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizaje Intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- González, R. (2006). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. (Tesis de

maestría no publicada). México DF, México: Centro de investigación y estudios avanzados del IPN

Hernández, S. et al (1997). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw-Hill.

Socas M. (1999) *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*. En: Rico L, editor: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

Vasco, C. (2006). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. En *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Zuñiga, L. (2007) El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *RELIME. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10 (1), 145 -175.