Proporção Simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do Ensino Fundamental

Marlí **Schmitt Zanella**
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá.
Brasil
marlischmitt@hotmail.com
Idelmar André **Zanella**
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá.
Brasil
andrezanel@yahoo.com.br

Resumo

O presente artigo tem por objetivo investigar o raciocínio multiplicativo mobilizado por alunos brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, envolvendo proporção simples, bem como, descrever e categorizar as estratégias apresentadas por eles. Foram aplicadas seis questões, três da classe de correspondência um para muitos, e três questões da classe de correspondência muitos para muitos. Observamos que a maioria dos alunos apresentaram raciocínio multiplicativo para resolver as questões, e a primeira classe, de correspondência um para muitos foi a que os estudantes obtiveram maior sucesso. Em relação a segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a questão Q4 teve o maior número de acertos, apenas 1 aluno (A6) resolveu corretamente a questão Q6, e nenhum aluno acertou Q5, embora, quatro alunos apresentaram desenvolvimento de resolução por meio do raciocínio multiplicativo, mas equivocaram-se no cálculo.

Palavras chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Estrutura Multiplicativa; Proporção Simples; Teoria dos Campos Conceituais.

Introdução

A presente pesquisa se pauta na hipótese de que as atividades e a variedade de situações problemas utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática são, particularmente, necessárias à conceitualização do campo conceitual multiplicativo.

Neste sentido, uma das teorias que tem apresentado contribuições para a Educação Matemática contemporânea é a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, desenvolvida pelo professor e pesquisador Gérard Vergnaud. Há muito, suas ideias têm ajudado pesquisadores a entender a formação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, a partir de observações de suas estratégias de ação na resolução de diferentes situações de um mesmo conceito.

No Brasil, muitas pesquisas são fundamentadas por essa teoria, sobretudo aquelas voltadas para o estudo da estrutura multiplicativa de números Naturais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental (Silva, 2010; Teixeira, Vansconcelos, & Guimarães, 2009).

Neste estudo, propomo-nos a investigar o raciocínio mobilizado por estudantes brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, envolvendo proporção simples, bem como, descrevemos e categorizamos as estratégias apresentadas por eles.

Teoria dos Campos Conceituais – TCC

A didática da matemática estuda as situações inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem, dá importância à significação das tarefas e das atividades propostas aos educandos, privilegia a relação entre a elaboração de conceitos e as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, de tal forma que, favoreçam a formação e o desenvolvimento dos conceitos. Para colocar em discussão os conteúdos teóricos e práticos do ensino e os métodos e procedimentos que lhe são associados, a didática tem como objetivos analisar os comportamentos e os discursos produzidos pelos alunos, bem como as escolhas e as ações dos docentes.

Nesse aspecto, destacamos a Teoria dos Campos Conceituais - TCC, que proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Ademais, proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações relacionadas ao mesmo conceito.

A ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Vergnaud (1993) a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

Neste contexto, estabelecer classificações às situações problemas, descrever procedimentos, analisar a estrutura e a função dos enunciados e das representações simbólicas é de interesse para a aprendizagem em Matemática, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O conceito amplamente teorizado em diversas pesquisas e definido por Vergnaud (1991) é a ideia de um Campo Conceitual, que é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Isso significa que um conceito não se encontra isolado, por isso é necessário trabalhar os diferentes significados de um conceito por meio de diferentes tipos de problemas. A multiplicação e a divisão são exemplos de conceitos que ganham sentido quando considerados como parte de um Campo Conceitual, o campo da estrutura multiplicativa (Vergnaud, 1991).

Campo Conceitual Multiplicativo

O campo conceitual da estrutura multiplicativa é o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como atividades matemáticas, tais como "proporção simples e múltipla, função n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor" (Vergnaud, 1993, p. 9).

Para uma análise da aprendizagem das estruturas multiplicativas, diferente das estruturas aditivas, que são compostas por relações ternárias, deve-se considerar relações quaternárias e por isso, esta estrutura não é representada pela escrita convencional da multiplicação, $a \times b = c$, pois essa representação escrita possui apenas três termos (Zanella & Barros, 2014).

Nas relações multiplicativas, Vergnaud (2009) ressalta que podemos distinguir duas categorias principais, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Estas possuem relação entre si, pois quando realizamos uma análise dimensional e utilizamos, por exemplo, um operador-função para a solução de situações problemas de isomorfismo de medidas, podemos encontrar o produto de medidas. Para compreender esta afirmação, vamos discutir a seguinte situação problema: "Um avião voa durante 6 horas à velocidade de 650 quilômetros por hora. Que distância ele percorre?" (Vergnaud, 2009, p. 258).

Para interpretar os dados da situação vamos distribuí-los adequadamente por tempo em horas e distância em quilômetros, indicado na Tabela 1. Esta relação forma um isomorfismo de medidas.

Tabela 1

Exemplo de isomorfismo

Tempo em horas	**Distância em quilômetros**
1	650
6	*x*

Fonte: Autores.

A resolução desta situação consiste em multiplicar a medida 6 horas pelo operador-função 650 Km/h. Note que esta relação pode também ser interpretada da seguinte forma:

$$x\ km = 6\ horas\ \times 650\ km/hora$$

Temos para a dimensão a equação:

$$medida\ da\ distância = medida\ em\ horas\ \times medida\ da\ velocidade$$

Representada por: $d = t \times v$ ou $d = v \times t$.

Esta equação retoma a relação definida por Vergnaud (2009) como produto de medidas.

De acordo com Vergnaud (2009) pode-se interpretar o produto de medidas como um isomorfismo duplo, ou, dupla proporcionalidade. Geralmente, os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que este seja interpretado como dupla proporção. O autor destaca também que existem dimensões simples, como comprimento, tempo, peso, custo, dimensões produto compostas por área e volume, e as dimensões quociente, dos quais pertencem a velocidade, densidade ou valor unitário. Entretanto, estas duas últimas dimensões, são muitas vezes, compostas por dimensões simples. Por exemplo,

$$\textit{área} = \textit{comprimento} \times \textit{largura},\ \textit{velocidade} = \frac{distância}{tempo}.$$

Desta forma, os conjuntos de composições numéricas – multiplicações, divisões, regra de três simples e composta, e composições sobre as dimensões pertencem às relações multiplicativas.

Na sequência, descrevemos as classes de problemas do tipo multiplicativo, o isomorfismo de medidas, proposto por Vergnaud (2009). Para compreender as diferenças destas categorias apresentamos esquemas relacionais inerentes ao mesmo domínio de referência, fornecemos exemplos correspondentes, e realizamos análises das equações numéricas equivalentes aos esquemas.

O isomorfismo de medidas é uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas, medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário. Há três classes de problemas, subdivididas em multiplicação, divisão em que se busca o valor unitário, e a divisão em que se busca a quantidade de unidades. Vergnaud (2009) destaca que essas três classes do isomorfismo de medidas, podem ser subdivididas em numerosas subclasses, variando apenas o conjunto numérico (inteiros pequenos e grandes, números decimais e decimais inferiores a 1), bem como a busca pelo valor unitário ou a quantidade de unidades.

Primeira classe de isomorfismo de medidas

Na multiplicação conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas, conforme indicadas no esquema representado no Quadro 1.

Quadro 1

Isomorfismo de medidas - conhecendo o valor unitário

Quantidade a	Quantidade b
1 $\longrightarrow$	a
b $\longrightarrow$	x

Situação: Ana tem 4 pacotes de canetas. Em cada pacote há 3 canetas. Quantas canetas Ana possui? O esquema que Vergnaud (2009) propõe é representado no Quadro 2.

Quadro 2

Exemplo de isomorfismo de medidas – conhecendo o valor unitário

Quantidade de pacotes de canetas	Quantidade de canetas
1 $\longrightarrow$	3
4 $\longrightarrow$	x

A equação correspondente é: $\frac{1}{4} = \frac{3}{x} \Longrightarrow 1.x = 4.3 \Longrightarrow x = 12$, ou seja, Ana tem 12 canetas. O cálculo relacional desta situação ocorre pela multiplicação. Conforme Vergnaud (2009b), os valores 1 e 4 representam quantidades de pacotes de canetas, e 3 e x representam a quantidade de canetas, ou seja, são todos medidas, mas de naturezas distintas.

Assim, há duas possibilidades de determinar a quantidade x de canetas. A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão $(\times 4)$ à quantidade de três (03) canetas. A segunda consiste em aplicar a função relacional: quantidade de quatro (04) pacotes vezes um três canetas/pacote $(\times 3)$ para obter a quantidade de canetas.

Essa análise permite compreender que, efetuando-se a multiplicação 4×3, é fornecida uma relação entre a quantidade de pacotes e canetas/pacote. Essa relação quaternária também pode ser analisada das seguintes maneiras:

- *x* canetas estão para 3 canetas, assim como 4 pacotes de canetas estão para 1 pacote de caneta.
- *x* canetas estão para 4 pacotes de canetas, assim como 3 canetas estão para 1 pacote de canetas.

Segunda classe de isomorfismo de medidas

Na <u>*divisão: busca do valor unitário*</u> temos o esquema a seguir, indicado no Quadro 3.

Quadro 3

Isomorfismo de medidas – busca do valor unitário.

Quantidade a	Quantidade b
1	x
b	c

Situação: Carlos pagou R$9,00 por 3 revistas. Quanto custa cada revista? O esquema referente a esta situação é indicado no Quadro 4.

Quadro 4

Exemplo de isomorfismo de medidas – busca do valor unitário.

Quantidade de revistas	Valor pago (R$)
1	x
3	9

A equação correspondente é: $\frac{1}{3} = \frac{x}{9} \Longrightarrow 3.x = 1.9 \Longrightarrow x = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$, ou seja, Carlos pagou R$3,00 em cada revista. O cálculo relacional desta situação ocorre por divisão de valores com intuito de obter o valor unitário da revista.

Terceira classe de isomorfismo de medidas

Na <u>*divisão: busca da quantidade de unidades*</u> temos o esquema a seguir, representado no Quadro 5.

Quadro 5

Isomorfismo de medidas – busca da quantidade de unidades

Quantidade a	Quantidade b

1 ⟶	a
x ⟶	c

Situação: João tem R$20,00 e quer comprar cadernos que custam R$5,00 cada um. Quantos cadernos poderá comprar? O esquema referente a esta situação é indicado no Quadro 6.

Quadro 6

Exemplo de isomorfismo de medidas – busca da quantidade de unidades.

Quantidade de cadernos	Preço (R$)
1 ⟶	5
x ⟶	20

A equação correspondente é: $\frac{1}{x} = \frac{5}{20} \Longrightarrow 5.x = 1.20 \Longrightarrow x = \frac{20}{5} \Longrightarrow x = 4$, ou seja, João poderá comprar 4 cadernos iguais.

Destacamos que os exemplos apresentados anteriormente são relações quaternárias e pertence ao eixo Proporção Simples (Magina, Santos, Merlini, 2014). Neste eixo há duas classes, no qual as três situações apresentadas pertencem a primeira classe, de correspondência um para muitos. A segunda classe é aquela que prevalece a correspondência muitos para muitos, e são examplificadas na Tabela 2.

Método

Neste artigo, apresentamos um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do Ensino Fundamental na resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, específicamente, relações quaternárias – eixo proporção simples.

Tabela 2

Situações problemas de proporção simples.

Proporção Simples	
Classe 1: Correspondência um para muitos	Classe 2: Correspondência muitos para muitos
(Q1) Um carro percorre 55 Km em 1 hora. Se ele mantiver o mesmo ritmo, que distancia o carro vai percorrer em 4 horas?	(Q4) Na feira do produtor, 12 laranjas custam R$3,50. Quanto vai custar 6 laranjas?
(Q2) Rita comprou 6 pacotes de maçãs. Em cada pacote há 11 maçãs. Quantas maçãs Rita comprou?	(Q5) Por 5 mini pães, Clara pagou R$0,75. Quanto ela pagará por 18 mini pães?
(Q3) Paula tem R$20,00 e quer comprar cadernos que custam R$5,00 cada um. Quantos cadernos ela poderá comprar?	(Q6) Ana comprou 25 canetas e pagou por elas R$31,25. Quanto ela vai pagar por 40 canetas?

Fonte: Autores.

Baseados nos principios da pesquisa descritiva (Severino, 2007), investigamos o raciocínio multiplicativo mobilizado pelos participantes durante a resolução de situações problemas envolvendo proporção simples, bem como, descrevemos e categorizamos as estratégias apresentadas por eles.

Um teste, contendo seis questões de proporção simples, foi aplicado a onze (11) alunos do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Estado do Paraná. O instrumento de coleta de dados apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (2009). No Quadro

01, apresentamos as questões aplicadas, divididas em duas classes. A primeira classe contempla a correspondência um para muitos (questões Q1, Q2 e Q3) e a segunda classe, a correspondência muitos para muitos (questões Q4, Q5 e Q6).

Resultados

Os resultados obtidos nesta pesquisa são apresentados por meio de uma análise quantitativa e qualitativa.

Análise Quantitativa

A análise quantitativa apresenta o percentual de acerto dos estudantes nas questões aplicadas (descritas na Tabela 2), conforme mostra o gráfico da Figura 1.

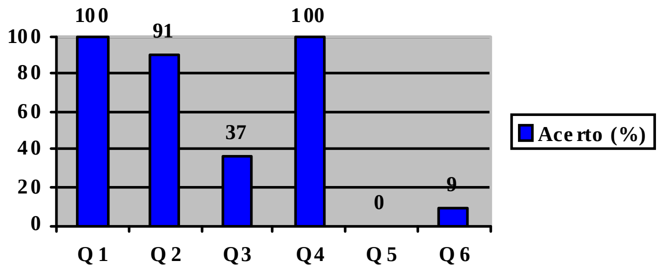


Figura 1. Representação do percentual de acerto dos estudantes.

O gráfico da Figura 1 explicita que os estudantes tiveram melhor desempenho nas questões da primeira classe, de correspondência um para muitos. Nesta classe, a relação unitária é explicitada (Q1: em 1 hora o carro percorre 55 Km; Q2: 1 pacote de maçãs tem 11 maçãs; Q3: 1 caderno custa R$5,00). As questões da segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a relação fixa está implícita, o que as torna de níveis de complexidade distintos. Nesta classe, para se obter o resultado deve-se coordenar duas operações, primeiro uma divisão para identificar a relação fixa (um para muitos) e na sequência realizar a multiplicação. Na sequência apresentamos uma análise qualitativa das respostas dos alunos.

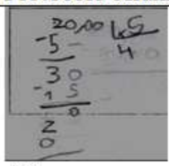
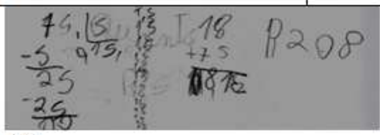
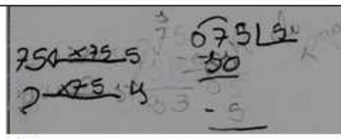
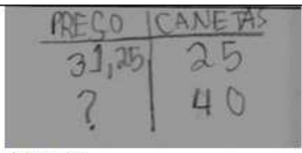
Análise Qualitativa

A análise qualitativa é realizada com intuito de descrever e categorizar o raciocínio multiplicativo mobilizado pelos estudantes envolvidos na resolução das situações elencadas na Tabela 2. A categorização apresentada nesta pesquisa é baseada em Magina, Santos, Merlini (2014), que identificaram quatro níveis de raciocínio para a estrutura multiplicativa: Nível 1 – Incompreensível; Nível 2 – Pensamento Aditivo; Nível 3 – Transição do Pensamento Aditivo para o Multiplicativo; Nível 4 – Pensamento Multiplicativo. Na sequência descrevemos essas categorias e apresentamos os protocolos dos estudantes identificados em cada categoria.

N1 – Incompreensível: são classificadas as respostas em que o estudante não explicitou uma resposta para a situação problema, ou quando o fez, não foi possível identificar o raciocínio utilizado. No Quadro 2, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, que não foi possível identificar o raciocínio empregado pelo estudante. Na questão Q3, para esta categoria, foi identificado que três (03) alunos deixaram-na em branco. Esta categoria está representada no Quadro 7.

Quadro 7

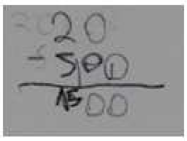
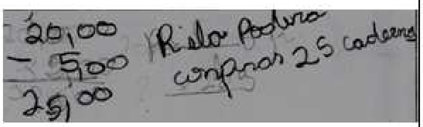
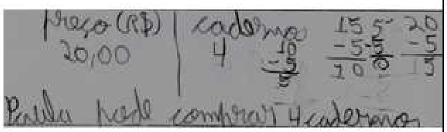
Exemplo de respostas dos alunos – N1 – Incompreensível

Questão	Quant. alunos	Protocolo-Aluno	
Q3	3 deixaram em branco (A9, A10, A11) 1 fez esboço (A8)	 A8	O aluno A8 apresenta uma divisão, da quantidade em dinheiro R$20,00 por 5 (preço de cada caderno). Mas o processo desenvolvido possui equívocos, como: 2-5=3
Q5	5 deixaram em branco (A4, A5, A8, A9, A11) 2 fizeram esboço (A3, A7)	 A7	 A3
Q6	8 deixaram em branco (A2, A3, A4, A5, A7, A8, A10, A11) 2 fizeram esboço (A9, A1)	 A9 e A1	Os alunos A9 e A1 apresentam um esboço para a atividade, identificam uma relação quatemária, com duas quantidades de natureza distintas (preço e canetas), mas não desenvolvem uma solução para a situação.

N2 – Pensamento Aditivo: são classificadas, neste nível, as respostas em que o estudante apresentou resolução por meio de contagem ou por meio de da operação de adição. No Quadro 8, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, que não foi possível identificar o raciocínio empregado pelo estudante.

Quadro 8.

Exemplo das respostas dos alunos – N2 – Pensamento Aditivo

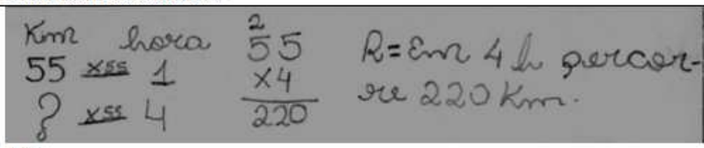
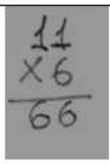
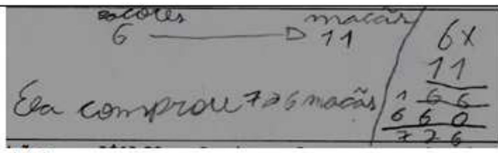
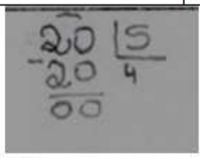
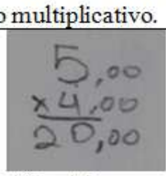
Pensamento aditivo – algoritmo adição		Pensamento aditivo - agrupamento
Protocolo A4 e A7	Protocolo A3	Protocolo A1
 Os alunos A4 e A7 realizaram subtração (20-5=15). Indicaram como resposta, a compra de 15 cadernos.	 O aluno A3 realizou a operação de adição entre o valor de um caderno e o total em dinheiro. Como resposta, indicou a compra de 25 cadernos.	 O aluno A1 realizou quatro subtrações de grupos de 5. 20-5=15 15-5=10 10-5=5 5-5=0 Indicou como resposta a compra de 4 cadernos.

Destacamos que a questão Q3, os alunos A3, A4 e A7 utilizaram o raciocínio aditivo, por meio da operação de adição ou subtração (estrutura aditiva) e o aluno A1 utilizou subtrações sucessivas por grupos de 5 unidades.

N3 – **Pensamento Multiplicativo**: são classificadas, neste nível, as respostas em que o estudante utilizou o raciocínio multiplicativo. Nos Quadros 09 e 10, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, em que foi possível identificar o raciocínio multiplicativo, empregado pelo estudante para resolver as questões.

Quadro 9

Exemplo das respostas dos alunos para as questões Q1, Q2, Q3: Pensamento Multiplicativo (N3).

Questão	Quantidade	Protocolo dos alunos
Q1	11 acertos Os demais protocolos foram semelhantes.	 A6
Q2	10 acertos	 A6 Acerto  A10 O aluno A10 equivocou-se no cálculo, embora tenha utilizado o raciocínio multiplicativo.
Q3	3 acertos (A2, A5, A6)	 A6 A6 realizou uma divisão, do valor que possuia pelo valor unitário do caderno.  A2 e A5 Os alunos A2 e A5 apresentaram um cálulo inverso, multiplcaram o preço de um caderno por 4 cadernos, obtendo o valor R$20,00.

As questões Q1 e Q2 foram as que apresentaram maior percentual de acertos. Destacamos que a Q1, o raciocínio envolvido predominante foi o raciocínio multiplicativo. Já a questão Q2, o apenas um estudante equivocou-se no cálculo, e realizou a multiplicação de 6 por 11, obtendo como resultado 726 maçãs.

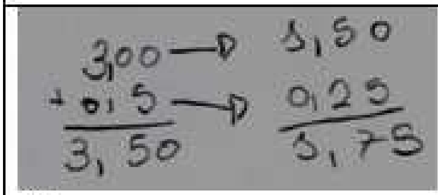
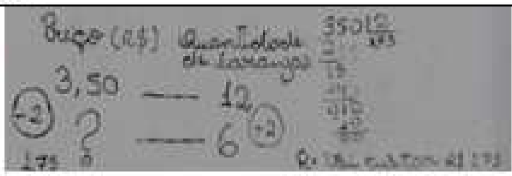
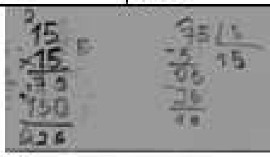
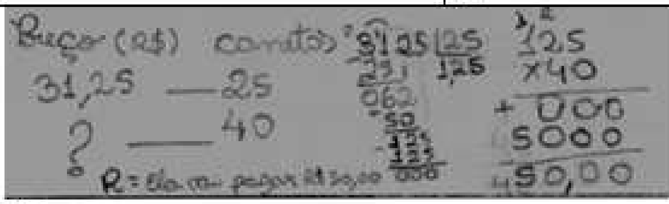
A questão Q3, com apenas 3 acertos, mostra uma dificuldade maior dos estudantes, uma vez que apenas um deles utilizou a operação de divisão para resolvê-la. Dois alunos tentaram resolver por meio da operação inversa, ou seja, quantos cadernos de R$5,00 podem ser comprados com R$20,00.

Na sequência, apresentamos no Quadro 10, as respostas dos alunos obtidas nas questões Q4, Q5 e Q6.

No nível 3 (N3), observamos que a maioria dos alunos apresentaram raciocínio multiplicativo para resolver as questões, e a primeira classe, de correspondência um para muitos foi a que os estudantes obtiveram maior sucesso.

Quadro 10

Exemplo das respostas dos alunos para as questões Q4, Q5, Q6: Pensamento Multiplicativo (N3).

Q4	11 acertos	 A6 e demais alunos	Os alunos realizam a divisão de 3,50 por 2, pois observam que compraram a metade da quantidade de laranjas.
		 A3	O aluno A3 redistribui o valor 3,50=3,00+0,50. E divide por 2. Obtendo o valor para 6 laranjas.
Q5	4 – raciocínio multiplicativo, mas apresentaram equívocos no cálculo.	 A6	 A10
		 A1	 A2
Q6	1 acerto	 A6	

Em relação a segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a questão Q4 teve o maior número de acertos, apenas 1 aluno (A6) resolveu corretamente a questão Q6, e nenhum aluno acertou Q5, embora, quatro alunos apresentaram desenvolvimento de resolução por meio do raciocínio multiplicativo, mas equivocaram-se no cálculo.

Considerações

O objetivo deste artigo foi investigar o raciocínio multiplicativo mobilizado por alunos brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental durante a resolução de situações problemas envolvendo proporção simples, bem como, descrever e categorizar as estratégias apresentadas por eles.

Elencamos três categorias, que emergiram a partir da análise qualitativa dos dados. O nível 1 – incompreensível, revelou o que os alunos ainda não dominavam, ou não conseguiram explicitar. O nível 2 – pensamento aditivo, identificado apenas para as resoluções da questão Q3, permitiu observar a presença do pensamento aditivo, pois este, é para os alunos a operação mais familiar, o que corrobora para a ideia apresentada por Magina, Santos e Merlini (2014), de que a multiplicação passa primeiro pela noção de que multiplicar é adicionar/subtrair parcelas repretidas. O nível 3 – pensamento multiplicativo, a classe de problemas em que a correspondência um para muitos prevalece, é a classe em que os estudantes possuem maior facilidade (questões Q1, Q2 e Q3). A classe de correspondência muitos para muitos, é aquela que precisa ser mais explorada no âmbito escolar, visto o baixo índice de acertos.

O estudo proposto evidenciou a importância da análise da produção matemática dos estudantes, com intento de compreender os processos de constituição do raciocínio multiplicativo nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Referências e bibliografia

Magina, S. M. P., Santos, A., & Merlini, V. L. (2014). O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações problemas das estruturas aditivas. *Ciência e Educação, 20*(2) 517-533.

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do trabalho científico.* São Paulo: Editora Cortez.

Silva, S. R. F. (2010). *Um estudo das estruturas multiplicativas nos Guias de Planejamento e Orientações Didáticas do Programa Ler e Escrever* (Dissertação. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática). 216f. Universidade Bandeirante – UNIBAN., São Paulo.

Teixeira, L. M. R., Vasconcelos, M., & Guimarães, S. D. (2009). A resolução de problemas multiplicativos de produto de medidas: um caso exemplar. In M. Bittar, & C. A. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp.77-93). Curitiba: Editora CRV.

Vergnaud, G. (1991). A Teoria dos Campos Conceptuais. In J. Brun, *Didáctica das Matemáticas* (Tradução: Maria José Figueiredo, pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ* (pp. 1-26). Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ.

Vergnaud, G. (2009). *A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar* (Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares). Curitiba: Editora da UFPR.

Zanella, M. S., & Barros, R. M. O. (2014). *Teoria dos Campos Conceituais: Situações Problemas da Estrutura Aditiva e Multiplicativa de Naturais***.** Curitiba: Editora CRV.