# ARTICLACIÓN DE LAS APREHENSIONES EN LA NOCIÓN DEL LÍMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

**Violeta Lupita Bejarano Vílchez**
**Verónica Neira Fernández**
v.bejarano@pucp.pe; vneira@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

**Resumen**

*El presente artículo es un recorte de la investigación de Bejarano (2018), la cual tomó como base teórica aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Estos aspectos teóricos permitieron analizar la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria que desarrollan los estudiantes, cuando movilizan la noción del límite en un punto de una función real de variable real, en el registro gráfico. Este análisis se realiza mediante una actividad planteada con Geogebra y a lápiz con papel. Los participantes son estudiantes (17 a 21 años) de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Asimismo, consideramos aspectos de un estudio de caso. La actividad presentada en el artículo tiene como finalidad evidenciar que, el estudiante Julio articula estas aprehensiones al desarrollar preguntas relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real en el registro gráfico.*

***Palabras clave:*** *Límite en un punto de una función real de variable real, aprehensiones, Geogebra, registro gráfico.*

## Introducción

En la actualidad, existen investigaciones sobre límite de funciones, las cuales muestran la dificultad que presentan los estudiantes para entender la noción del límite de una función, las carencias en la coordinación de registros y la importancia de usar un software (Geogebra).

Tomás (2014), en su investigación tiene como objetivo analizar cómo las diferentes formas de representación semiótica, de este objeto matemático influyen en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación; el autor concluye que, usar diferentes sistemas de representación en la enseñanza de la noción del límite puede ayudar a los estudiantes a consolidar este concepto.

Por su parte, Londoño, Narro y Vera (2014), indagan sobre la didáctica del límite y la continuidad de funciones, manifiestan en su investigación que los estudiantes tienen un mejor desempeño al usar el registro algebraico. Según las autoras, esto conlleva a que el concepto de límite de funciones no sea identificado en otros registros de representación.

Caglayan (2015) realiza una investigación que ofrece un enfoque basado en pruebas visuales para ayudar a comprender el concepto de límite de una función con un entorno dinámico, el autor concluye que Geogebra es una herramienta que facilita que los estudiantes entiendan, exploren y obtengan experiencias en la observación de los límites y sus propiedades.

En base a estas investigaciones Bejarano (2018) manifiesta que, existe una preocupación, por parte de los investigadores, en estudiar la concepción que tienen los estudiantes con respecto a la noción del límite de una función en los distintos registros de representación semiótica, y resalta la importancia del uso de Geogebra en la enseñanza del límite de funciones.

La autora desarrolla una investigación que, consiste en analizar la articulación las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria para movilizar la noción del límite de una función real de variable real, que realizan los estudiantes de Ingeniería de Seguridad y Salud en el Trabajo de una universidad pública de Lima. Esta investigación toma como base algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y, un estudio de caso basado en Martinez (2006) como metodología de una investigación cualitativa.

Para el presente artículo, consideraremos el análisis de la producción del estudiante Julio, la información será triangulada con fichas de recojo de información, archivos de Geogebra y grabación de la pantalla del computador con el uso del programa Camtasia Studio 8.

## Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En la investigación, tomamos algunos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesta por Duval (2004) en la cual manifiesta que:

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, formula algebraica, grafico, figura geométrica.) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (p.14).

Según Duval (2012), los objetos matemáticos no son claramente accesibles a la percepción, y por ello que es necesario representarlos. De acuerdo con el autor, para que sistema semiótico sea considerado un registro de representación, debe cumplir tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: Formación, tratamiento y conversión.

La formación implica la selección de un conjunto de caracteres perceptibles y que son identificables como representación de lo que se quiere representar. El tratamiento ocurre cuando se realiza una transformación en el mismo registro, una reconfiguración es un tipo de tratamiento para las figuras geométricas. La conversión sucede cuando una transformación produce una representación en el registro distinto a la inicial, conservando la totalidad o parte del contenido de la representación inicial. Según Duval (2004) existen cuatro tipos de registros que, si permiten estas actividades cognitivas, las cuales se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1

*Clasificación de los registros de representación discursiva y no discursiva*

| **Registros de representación discursiva** | **Registros de representación no discursiva** |
|---|---|
| Lengua Natural:<br>• Asociaciones Verbales (conceptos)<br>• Forma racional:<br>- Argumentación a partir de observaciones, creencias.<br>- Deducciones válidas a partir de uso de definiciones o teoremas. | Figuras geométricas planas o en perspectiva:<br>• Aprehensión operatoria y no sólo perspectiva.<br>• Construcción con instrumentos. |
| Sistemas de escritura:<br>• Numéricos (binarios, decimal, fraccionaria…).<br>• Algebraicos; simbólicas (lenguas formales).<br>• Cálculo. | Gráficos cartesianos:<br>• Cambios de sistemas de coordenadas.<br>• Interpolación, extrapolación. |

*Fuente:* Bejarano (2018, p. 27)

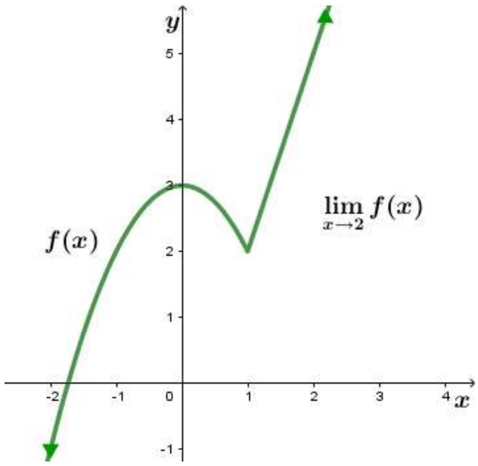
Según Duval (1994), una aprehensión es la acción de aprehender; es decir, comprender un objeto por medio de sus representaciones y propiedades en un determinado registro. Además, manifiesta que existen cuatro maneras diferentes de aprehender el registro figural en Geometría, según su rol: aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria, aprehensión discursiva y secuencial. Duval (1994) manifiesta que **la aprehensión perceptiva** es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y permite identificar o reconocer inmediatamente una forma u objeto matemático en el plano o en el espacio.

Bejarano (2018) adapta esta aprehensión a una función real de variable real, menciona que, si el estudiante es capaz de identificar que la representación gráfica corresponde a una función real de variable real, entonces podemos afirmar que desarrolló una aprehensión perceptiva **y** para ello debe identificar que hay una variable independiente y otra dependiente, así como reconocer los valores que asumen cada una de estas variables (lectura de los ejes coordenados), tal como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2

*Aprehensión perceptiva del límite en un punto de la función $f(x)$*

**Aprehensión perceptiva de $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$**




- $f(x)$ es una función real de variable real.
- $f(x)$ es una función por tramos.
- $f(x)$ es una función continua.
- $f(2) = 5$

*Fuente:* Bejarano (2018, p. 29)

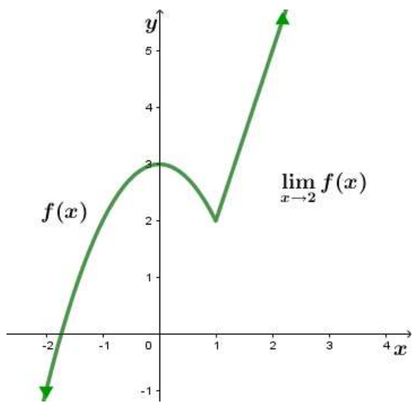
De acuerdo con Duval (1994), la **aprehensión discursiva** es la acción mediante el cual el sujeto relaciona el objeto matemático con propiedades matemáticas que no están explicitas en la figura tales como teoremas, axiomas y propiedades.

Según Bejarano (2018) si el estudiante logra identificar propiedades relacionadas al límite en un punto de una función real de variable real, que no están explicitas en la representación gráfica de la función, por ejemplo, el dominio de la función, el tipo de discontinuidad, entre otros, y ello le permita calcular y analizar el límite en un punto de esta función real de variable real, se puede afirmar que el estudiante desarrolla una aprehensión discursiva como se aprecia en la Tabla 3.

Tabla 3

*Aprehensión discursiva del límite en un punto de la función $f(x)$*

**Aprehensión discursiva de $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$**




- $Domf(x) = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5}$
- $\boldsymbol{\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5}$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe y es 5 porque tiene los límites laterales iguales (teorema de la existencia de límite).

*Fuente:* Bejarano (2018, p. 30)

Según Duval (1994, p. 126), "Una figura proporciona una ayuda heurística. En tanto, una de sus modificaciones posibles muestra la idea de una solución". El autor menciona que una **aprehensión operatoria** se da cuando se modifica la figura variando su dimensión. Esta consiste en aumentar, disminuir o deformar la figura inicial y esta queda transformada en otra llamada imagen.

Por otro lado, para el registro gráfico Peñaloza (2016), Vara y Salazar (2018) y Salazar (2018) mencionan que el sujeto realiza una modificación óptica al utilizar las herramientas *Alejar* y *Aproximar* en *Geogebra 3D*, con el propósito de que los elementos y características de la representación gráfica del paraboloide puedan ser reconocidos y estudiados con mayor detenimiento mediante acercamientos o alejamientos.

Bejarano (2018), considera que la modificación en el registro gráfico será la **modificación óptica** al realizar una variación de la dimensión de los ejes coordenados *X* y *Y,* que servirá para que el estudiante pueda estudiar y analizar conceptos relacionados al límite en un punto de una función real de variable real, donde usando las herramientas *alejar, aproximar o desplazamiento* de Geogebra se cambia la dimensión de los ejes, tal como se aprecia en la Figura 1, que usando la herramienta *desplazamiento vertical* la dimensión del eje $X$ cambia de uno a cinco.

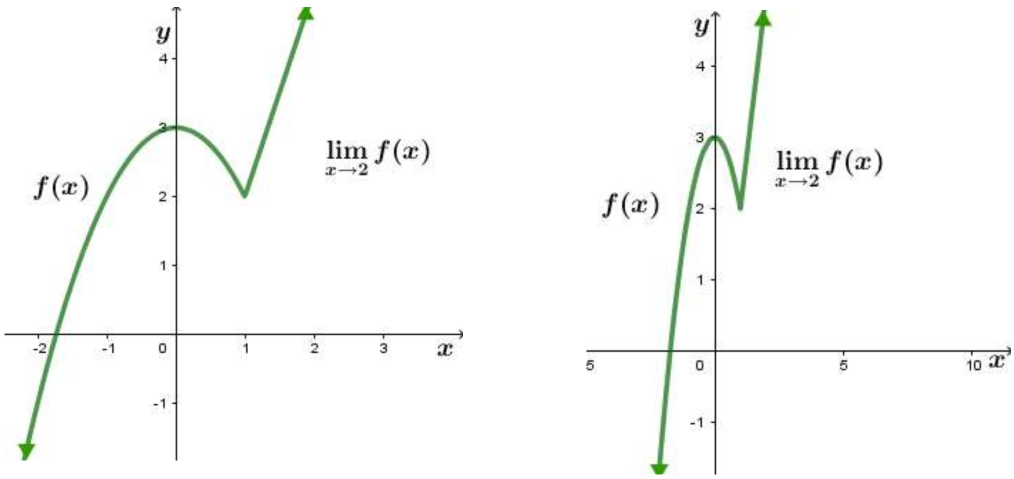



*Figura 1.* Modificación óptica de una función por variación de la escala de los ejes coordenados.

*Fuente:* Bejarano (2018, p.31)

**Desarrollo de la investigación**

Bejarano (2018) aplica en su investigación, aspectos de la metodología de un estudio de caso, en la que el caso es, la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico. Para ello identifica las aprehensiones que realizan los estudiantes cuando movilizan la noción de límite de una función real de variable real en un punto, en la representación gráfica, usando Geogebra y a lápiz con papel.

La parte experimental se lleva a cabo con tres estudiantes de Ingeniería de una universidad pública de Lima del curso de Cálculo 1. Para analizar la producción de los estudiantes se usa una ficha de actividad, ficha de observación, ficha de recojo de información, archivos de Geogebra, grabación de la pantalla con Camtasia 8. Según la investigadora este material sirve para la triangulación de datos, contrastar y comparar la información obtenida por los diferentes medios de indagación. Finalmente, con la información obtenida la autora realiza un análisis de la articulación de las aprehensiones. En este artículo presentaremos el análisis de la producción del estudiante Julio a la pregunta 2c) de la actividad.

*Figura 2.* Pregunta 2 de la actividad

2. Abra el ***archivo P2***, a continuación responda los siguientes ítems:

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$? Justifique.

b) Usando las herramientas del Geogebra, explique por qué el $\lim\limits_{x \to 3.5} f(x)$ **NO** es igual a 2

c) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$? Explique

*Fuente:* Bejarano (2018, p.87)

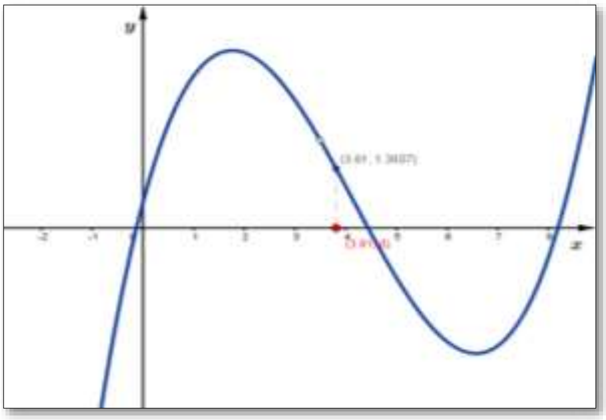


*Figura 3.* Archivo de Geogebra de la pregunta 2 de la actividad

*Fuente:* Bejarano (2018, p.61)

Según Bejarano (2018) el objetivo de esta pregunta es que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico que, le permitan movilizar conceptos relacionados al límite de una función real de variable real. En el desarrollo de esta pregunta, se espera identificar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria en el registro gráfico usando Geogebra. En un inicio según la autora el estudiante mediante una aprehensión perceptiva no puede determinar $\lim\limits_{x \to 2017} f(x)$, puesto que $x = 2017$ no se aprecia en el archivo dado en Geogebra. Esta necesidad hará que el estudiante modifique la escala en el plano cartesiano usando las herramientas *alejar* o *desplazamiento*, ello implicaría que el estudiante realizaría una modificación óptica, esto de acuerdo con Duval mostraría una aprehensión operatoria, porque se modifica a la dimensión de los ejes coordenados, pero se mantiene la forma y orientación de esta representación.

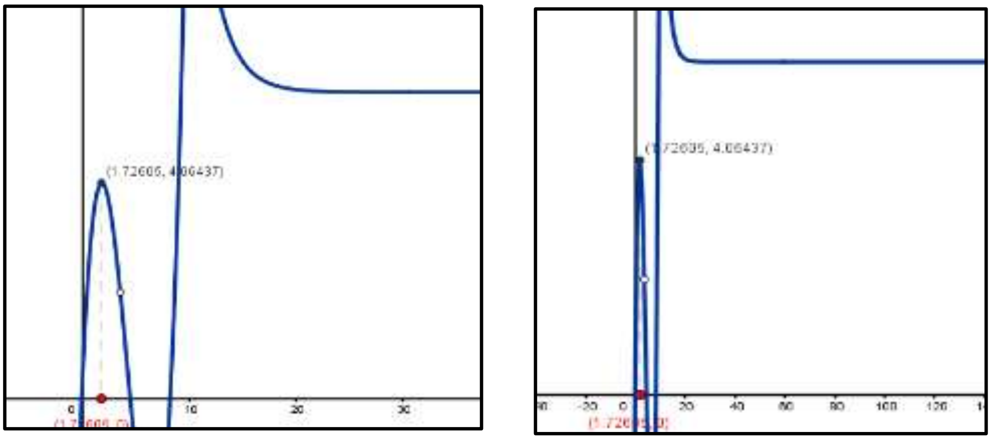



Figura 4. *Modificación óptica de la función* $f(x)$.

*Fuente:* Bejarano (2018, p.69)

En un determinado momento, luego de realizado los tratamientos al modificar la escala del eje $X$ hasta lograr observar el número 2016, Según Bejarano (2018) el estudiante, mediante su aprehensión perceptiva, podrá apreciar que la función solo está definida hasta $x = 2016$, y por tanto $\lim_{x \to 2017} f(x)$ no existe, pues 2017 $\notin Domf$ esto dará cuenta de su aprehensión discursiva**,** pues reconoce el dominio de la función $f(x)$.El estudiante Julio realizó cambios de dimensión en la escala del archivo de Geogebra, usando la herramienta *desplazamiento*, tal como se aprecia en la captura del computador que se realizó con Camtasia Studio 8, en la Figura 5.

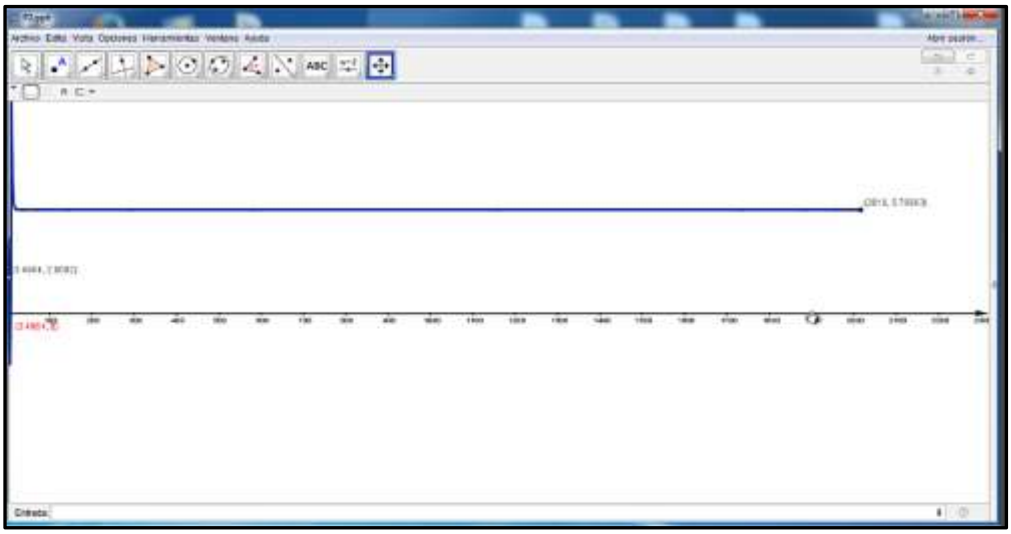


Figura 5. *Modificación óptica de la función* $f(x)$.

*Fuente:* Bejarano (2018, p.70)

Una vez realizada esta modificación el estudiante Julio respondió usando un registro de lengua natural que, tal como muestra la Figura 50, $\nexists \lim_{x \to 2016} f(x)$ pues la función solo está definida hasta el 2016, tal como se aprecia en la Figura 5.

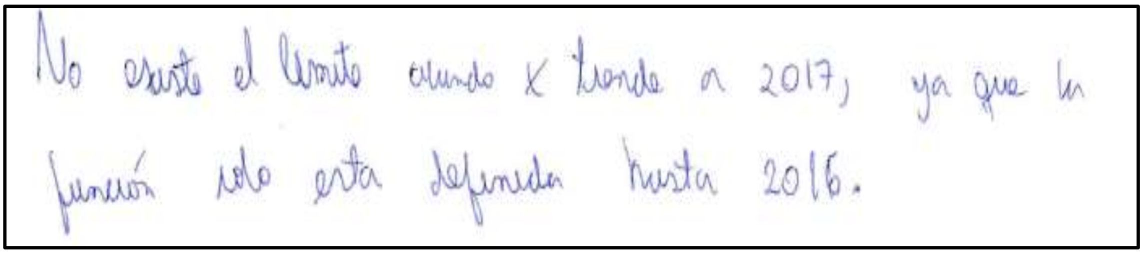



*Figura 6.* Respuesta del estudiante Julio para 2 c).

*Fuente:* Bejarano (2018, p.70)

Según Bejarano (2018) el estudiante realizó una aprehensión perceptiva para observar que la función solo está definida hasta el valor de $x = 2016$; posteriormente identificó implícitamente que $2017 \notin Dom f$ lo cual mostró su aprehensión discursiva, pues reconoció el dominio de la función $f(x)$. Luego sustentó que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$, esto evidenciaría una aprehensión discursiva, pues el estudiante estaría usando el teorema de existencia del límite de una función en un punto, dado que como la función solo está definida hasta $x = 2016$, no existen los límites laterales para el valor de $x = 2017$. Con ello Bejarano (2018) concluye que el estudiante Julio articuló las aprehensiones perceptiva, operatoria y discursiva para concluir que $\nexists \lim_{x \to 2017} f(x)$.

**Conclusiones**

En el desarrollo de la actividad, el estudiante Julio logró articular las aprehensiones perceptiva, discursiva y operatoria, que le permitieron concluir en la pregunta 2c) que $\lim_{x \to 2017} f(x)$ no existe. Esto se pudo evidenciar mediante la triangulación de los datos; con el Camtasia Studio 8, se observó que el estudiante realizó tratamiento en el registro gráfico, para cambiar las escalas en el archivo mostrado en Geogebra, lo cual evidenció una aprehensión operatoria, que se produjo luego de que el estudiante realizará una aprehensión perceptiva; finalmente el estudiante articula lo anterior con aprehensión discursiva para fundamentar, usando un registro de lengua natural, que el límite de la función $f$ no existe cuando $x$ tiende a 2017.

Por otro lado, el uso de Geogebra permitió a Julio y los demás estudiantes participantes de esta investigación una manera intuitiva de trabajar la noción de límite en un punto de una función real de variable real.

**Referencias**

Bejarano, V. (2018). Articulación de las aprehensiones en la noción del límite en un punto de una función real de variable real en estudiantes de Ingeniería. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12075

Caglayan, G. (2015). Math majors' visual proofs in a dynamic environment: The case of limit of a function and the ϵ–δ approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(6), 797-823. Doi: https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1015465

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM, (17), pp. 121-138. Recuperado de

http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat,* *7*(2), 266-297. Doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Martínez, C. P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. En *Pensamiento & Gestión* 20, 165-193. Universidad del Norte Barranquilla, Colombia. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Londoño N, Narro P, Vera A (2013). Indagando sobre el límite de funciones desde diferentes registros de representación. *El Cálculo y su enseñanza*. Vol (5), p 91-106

Peñaloza, T. (2016). Proceso de visualización del paraboloide en estudiantes de Arquitectura mediado por el Geogebra. Recuperado de http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/7204

Salazar J.V.F. (2018) Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Tomás, J. B. P. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante). Recuperado de

https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf

Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(2), 643-655. https://doi.org/10.12973/ejmste/80628