“Núcleos de significación y pensamiento” en la enseñanza de fracciones

Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
mvaldemo@cinvestav.mx
M. María Eugenia **Ramírez** Esperón
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
meramirez@cinvestav.mx
Patricia **Lamadrid** González
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
malishlama@yahoo.com.mx

Resumen

Esta comunicación se presenta en el marco de un estudio participante llevado a cabo con normalistas, en el transcurso del tercero y cuarto semestres de su licenciatura en educación primaria. El propósito de esta investigación, en actual desarrollo, es identificar los “núcleos de pensamiento y significación” manifiestos por los normalistas, en el terreno de la resolución de problemas susceptibles de ser incluidos en estrategias futuras de enseñanza de fracciones. Los instrumentos metodológicos aplicados en nuestra investigación han sido un cuestionario, cuatro entrevistas iniciales (de carácter individual) y un seminario dedicado a la lectura de literatura especializada, para su posterior reflexión colectiva; con todo ello hemos configurado el estudio de dos casos. Aquí, sólo presentamos algunos pasajes relevantes de las dos entrevistas iniciales, en el estudio del caso de Tania.

Palabras clave: Fracciones, unidad divisible, cognición, “núcleos de significación y pensamiento”, representaciones.

Introducción

Los procesos cognitivos del docente que ofrecen apoyo a la labor de instrucción son muchos y entre ellos destacan los de formación de conceptos ligados a la enseñanza escolar básica, a los que encontramos *originalmente* gestados a partir de la elaboración de **“núcleos de significación y pensamiento”** por parte del sujeto cognoscente. A los aludidos **“núcleos”** nosotros los definimos como aquellas palabras y expresiones matemáticas verbalizadas, así como las representaciones y los modelos de enseñanza plenamente cargados de sentido para quien construye el conocimiento y que, por tal condición, pueden generar y posteriormente fortalecer los procesos de conceptualización que deriven de ellos. Lo antedicho corresponde a la articulación tanto de ideas como de recursos simbólicos diversos, ya sean matemáticos, cognitivos o didácticos.

A la problemática señalada previamente, en nuestra investigación la hemos abordado desde la selección del objeto matemático de estudio, específicamente los números fraccionarios, y con referencia a los futuros actores a cargo de tal labor, los normalistas actualmente en formación.

¿Por qué nuestra indagación se centra en los números fraccionarios? Debido a que, aun habiéndose desarrollado durante varias décadas numerosos estudios en torno a dichos números, es mucho lo que falta por conocer respecto a la conducción de su enseñanza por parte del maestro, así como al pensamiento del docente que orienta esa tarea y al posible enriquecimiento de los instrumentos didácticos que éste usa.

¿A partir de cuáles criterios privilegiamos la realización de una investigación participante con estudiantes normalistas? En primera instancia, consideramos que los futuros maestros se encuentran inmersos en una situación de cambio y crecimiento intelectual propicio para una indagación que permite el reconocimiento de las principales ideas matemáticas y didácticas que ellos construyen respecto a una enseñanza potencial de las fracciones, esto es, una enseñanza propuesta para una eventual realización futura aunque, todavía no ejercida.

En síntesis, nos proponemos identificar los **“núcleos de significación y pensamiento”** de un grupo de normalistas en formación, con los cuales ellos sostendrán luego los propios procesos de conceptualización de las fracciones y su futura enseñanza a los alumnos de educación primaria.

Marco teórico

Kieren (1988) construyó la Red Semántica de los subconstructos del número racional, con la cual muestra cómo los constructos están relacionados e interconectados con los constructos mentales y los hechos externos; propone que el conocimiento individual se estructura a partir de los constructos basados en los hechos humanos. Para este investigador, la fracción como operador implica la ampliación o reducción de un todo y la relación parte-todo la define como la relación que existe entre el todo y un número determinado de partes cuando el todo, continuo o discreto, es dividido en partes equivalentes.

En relación al todo, Freudenthal (1983) señala que, como unidad arbitraria, el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. El todo continuo puede representarse con una figura geométrica, una parte de esta unidad es indicada por una fracción que relaciona la parte con el todo. En el todo discreto, expresado como un conjunto, donde un subconjunto contenido en él se indica con una fracción, ésta es empleada como una manera de establecer la relación entre ambos (Hart, 2004).

Con respecto a la fracción Freudenthal (1983) reconoce tres interpretaciones, la fracción: como fracturador, como comparador y como operador multiplicativo. La fracción como fracturador (en nuestra interpretación corresponde a la relación parte-todo) expresa la acción de fracturar el todo de forma reversible, irreversible o meramente simbólica en partes cuya igualdad es estimada a partir de la vista o el tacto, con métodos o instrumentos más sofisticados como doblar, pesar o establecer congruencias y simetrías.

Observar o imaginar magnitudes u objetos que se separan uno de otro y compararlos de forma directa, colocándolos juntos, o de forma indirecta, a través de un tercer objeto que puede ser un instrumento de medición que media al ser transferido entre ellos, pone de manifiesto el uso de la fracción como comparador (Freudenthal, 1983); este último, desde nuestro punto de vista, expresa la medida.

La fracción como operador multiplicativo muestra tres formas distintas al realizar la acción de la operación sobre el objeto. Como operador fracturante da la idea de una acción continua sobre objetos concretos rompiéndolos en partes equivalentes, es dinámico, los objetos comparados son todo y parte. Cuando la comparación es acerca de cantidades y magnitudes surge el operador razón como un transformador. El operador razón ubica a las magnitudes en una razón unas con respecto a otras. El operador fracción se define formalmente en el campo de los números racionales (Freudenthal, 1983).

Retomando la propuesta de Kieren (1988) señalamos que el constructo formal de equivalencia, los dominios aditivos y los dominios multiplicativos conforman el conocimiento formal, donde están inmersas las reglas matemáticas en las operaciones simbólicas. El campo de cocientes de los números racionales es un conocimiento formal y abstracto, que como hemos observado está conformado por conocimientos más intuitivos relacionados entre sí. Sin embargo, en la construcción del conocimiento del número racional se vinculan experiencias cotidianas, pues cuando una persona emplea acciones que evidencian un conocimiento matemático involucra a la imaginación aunada con mecanismos constructivos (partición, equivalencia y unidad divisible) y el uso informal del lenguaje, así, esta persona construye matemática intuitiva.

Kieren (1988) da cuenta, a través de dicha Red Semántica de la articulación entre los constructos de la fracción, tales constructos son conceptos que él planteó en un modelo ideal de construcción de los diversos conceptos asociables al número racional.

Para Streefland (1977) la construcción mental de un concepto (como producto final) está determinada por la riqueza de las situaciones de enseñanza a partir de los cuales se las hace emerger. Por ello son fundamentales el uso de situaciones, actividades/acciones y materiales que lleve al alumno a adquirir el conocimiento necesario para formar los conceptos. Una vez construidos los conceptos, Vergnaud (2007) menciona que los mismos se articulan estrechamente unos con otros, de tal manera que se dificulta estudiarlos de manera aislada e individual, porque están organizados como un sistema cognitivo.

En relación con la creación de un entorno constructivista, Pirie y Kieran (1992) señalan que el maestro es quien crea dicho ambiente y, al mismo tiempo, enriquece en él su labor docente. Este señalamiento lo realizamos para esclarecer e interpretar el desempeño de *Tania* en las entrevistas, en las que la joven normalista bosquejó diversas situaciones de enseñanza, para reflexionar acerca de su pertinencia en el aula de la escuela primaria.

Diseño metodológico global

La *investigación* que presentamos es *cualitativa* y se halla inserta en el ámbito de los *estudios de naturaleza participante*, dado que privilegiamos tanto las tareas estructuradas para el aula por el equipo de investigación como las que resulten configuradas por los propios normalistas, apoyándose en su inherente capacidad propositiva. Dicha exploración ha sido globalmente llevada a cabo en el espacio habitual de trabajo y estudio de los estudiantes, es decir, en el *ámbito natural* de su formación. Los *jóvenes* con quienes hemos estado interactuando, en este marco, están incorporados a una *licenciatura en educación primaria*; al inicio de nuestro trabajo de campo, ellos estaban iniciando el tercer semestre de esa carrera y, al momento de la escritura de esta comunicación, cursaban el quinto semestre de la misma.

En cuanto a los instrumentos metodológicos aplicados, la secuencia seguida en el campo principia con un *cuestionario exploratorio sobre fracciones*, cuyo propósito primordial ha sido reunir, por esa vía, información acerca de todos los normalistas que integran este grupo de educación superior, a la par de permitirnos escoger, en mejores condiciones, a las dos personas con quienes realizar nuestro *estudio de casos*.

Seguidamente, aplicamos dos *entrevistas de corte didáctico* (de acuerdo a lo planteado por Valdemoros, 1998; Valdemoros y Ruiz, 2008) a cada una de las dos jóvenes escogidas para dicho *estudio de casos*, a las que designamos como *Entrevistas Iniciales*. Optamos por tales *entrevistas didácticas* porque mediante esta técnica metodológica se cuenta con la posibilidad, en primera instancia, de *avanzar exploratoriamente* en la conducción de la entrevista, en tanto el sujeto entrevistado continúe resolviendo la tarea experimental propuesta sin detenerse; subsecuentemente, cuando esta última condición deje de cumplirse y el sujeto entrevistado evidencie hallarse imposibilitado para continuar, el entrevistador puede intervenir mediante una *reformulación de las preguntas, una simplificación de la tarea experimental propuesta o el planteamiento de una tarea experimental análoga a la original*. Las *entrevistas didácticas* no se desarrollan con el propósito de enseñar sino para *propiciar la retroalimentación del entrevistado*, sin ejercer intervenciones que alejen a este último de sus propias modalidades de producción intelectual.

En tercer término, desarrollamos un *Seminario dedicado al análisis de lecturas especializadas en fracciones*, con el propósito de facilitar la reflexión colectiva entre los normalistas para impulsar un enriquecimiento de sus respectivos **“núcleos de significación y pensamiento”** y, a partir de ello, de sus procesos de conceptualización.

En un futuro inmediato, realizaremos varias “*Entrevistas Finales*” para poder constatar la evolución que han tenido los procesos cognitivos detectados en los dos casos escogidos, durante un período aproximado de un año.

Por último, las *tareas experimentales* presentadas a los normalistas en todos los instrumentos metodológicos de esta investigación consistieron en problemas aritméticos dedicados al uso de fracciones, del tipo de los que eventualmente pudieran ser llevados al aula. Mediante la introducción de tales problemas, procuramos promover: a) la recuperación de los principales **“núcleos de significación y pensamiento”** que el maestro en formación ha construido para ejercer la práctica docente futura y su correspondiente contenido conceptual; b) la reflexión acerca de las principales ideas didácticas, modelos de enseñanza y representaciones asociados a tales **“núcleos”** que el alumno normalista asume para sostener la mencionada práctica docente; c) la valoración, por parte de dicho estudiante, de cuán viables pudieran ser los problemas aritméticos aquí presentados, en el aula de primaria.

El caso de Tania

Esta joven normalista, de 28 años de edad, fue escogida por nosotros para la realización del estudio de casos porque exhibe ricos y variados procesos cognitivos, a la par que comunica su pensamiento matemático y didáctico con bastante soltura y consistencia, dando muestras de una dinámica capacidad propositiva. En este foro, tan sólo comunicamos algunos de los resultados producidos por Tania, en las dos entrevistas iniciales que desarrollamos con ella, las que totalizan cuatro horas de trabajo plenas de diálogos extensos y fincados en aspectos muy diversos de la reconocida universalmente como "complejidad semántica de las fracciones" (Kieren, 1988).

Análisis de resultados

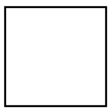
En esta sección presentamos pasajes destacados de las dos entrevistas iniciales llevadas a cabo con *Tania*, en los que pueden identificarse algunos **"núcleos de significación y pensamiento"** desarrollados en torno a las fracciones por parte de esta normalista, particularmente, en lo que al reconocimiento de la unidad así como a los diversos modos de composición y de relación de dichos números se refiere. En correspondencia con lo anterior, también se detectan algunas dificultades cognitivas e inestabilidades ideacionales experimentadas por esta normalista, en la generalización de tales **"núcleos de significación y pensamiento"** que pudimos reconocer. Asimismo, en varios de estos pasajes de las entrevistas emergen consideraciones externadas por la joven, en relación al modo como estos contenidos pueden ser llevados al aula de primaria.

Resolución de un problema de división entre fracciones. Entrevista Inicial 1

La Figura 1 exhibe la tarea escolar que se le presentó a la entrevistada, en el entendido inicial de que Tania la resolviera, a la par de comunicarnos los propios pensamientos que en torno a dicha tarea se abrieran paso, así como sus valoraciones acerca de la aplicabilidad de ese problema en el salón de clases. Cabe mencionar que esta tarea estuvo originalmente incluida en el cuestionario exploratorio.

Esta pieza de madera se utilizará para hacer una repisa.

Área: $^{1}/_{2}$ metros cuadrados
Ancho: $^{2}/_{3}$ de metro
Alto: ¿… metros?



¿Cómo realizaste el cálculo del lado desconocido?
¿Qué clase de números usaste? ¿Por qué?
¿Cómo verificaste tu respuesta?

Figura 1. Problema de la entrevista inicial 1 en el que *Tania* aborda la división de fracciones.

Tras la lectura de este texto, *Tania* expresó: "el problema presenta un rectángulo cuyos datos conocidos son el área […] que es medio metro cuadrado, y el ancho, dos tercios de metro; la incógnita es el largo […]." Después *Tania* agregó que "la fórmula del área del rectángulo es base por altura", en tanto, la joven escribía "**b x h**".

La *entrevistada* guardó silencio unos minutos, para después preguntar a las dos entrevistadoras si debía convertir esos denominadores a "medios o tercios, para tener fracciones con el mismo denominador" (según sus propias palabras); ante ello, la *entrevistadora E.A.* le preguntó acerca del beneficio que pudiera haber al obtener fracciones con el mismo denominador antes de operar, en tal situación. *Tania* respondió que "antes de operar es necesario hacerlo [refiriéndose a reconocer fracciones equivalentes], es útil tener común denominador".

Luego, la *entrevistadora E.E.* le preguntó a la joven cuál era la operación que iba a aplicar para reconocer el dato faltante en el problema contenido en la Figura 1. A ello respondió *Tania* diciendo: "hay que dividir un medio entre dos tercios, despejando la fórmula", inmediatamente la *entrevistada* escribió: "$^1/_2 \div {}^2/_3 = {}^3/_4$", tras lo cual explicitó: "las fracciones equivalentes no son necesarias". Un poco después, con cierto esfuerzo, *Tania* escribió que había calculado el lado desconocido del rectángulo "con la inversa de la multiplicación de la fórmula del área".

Tanto en el transcurso de los diversos tratamientos del problema ya explicitados, como en el diálogo que se desarrolló con posterioridad, se hizo evidente que *Tania* manifestó de manera reiterada:

- De la fórmula del área del rectángulo se puede derivar el uso de la operación inversa para que, dados el área y un lado del rectángulo, se pueda identificar el otro lado. Por esta vía, constatamos que el modelo geométrico de enseñanza ligado a la resolución de problemas en los que se aplican fracciones, resulta semánticamente eficaz para esta joven. Sin embargo, Tania no desarrolló reflexión alguna respecto al sentido que ella otorga a la división de fracciones como operación inversa de la multiplicación. Es decir que en esta situación, la normalista se concentró en la fórmula geométrica relativa al área del rectángulo y no en la significación de la composición numérica que realizó.
- La unidad puede ser identificable, para ella, a través de expresiones como "unidad de referencia", "totalidad", "todo", "entero" y "colección". Tales **"núcleos de significación y pensamiento"**, altamente investidos de contenidos matemáticos elementales, acompañan y respaldan los procesos de verbalización desarrollados por la joven respecto a las fracciones. A través de estas elaboraciones marcadamente concentradas, *Tania* enfatiza que la emergencia de dichos números tiene que estar referida siempre a una unidad respecto a la cual surja el correspondiente proceso de matematización. Sin embargo, en ambas entrevistas, la joven no llega a externar el reconocimiento de modos diversos de identificación de la unidad tales como las distinciones susceptibles de realizar entre el todo continuo y el todo discreto, entre otras formas posibles de diversificación del todo.
- Para el tratamiento didáctico de un problema en el aula, *Tania* considera necesario apelar al uso de representaciones visuales familiares porque las mismas "[…] son importantes para los niños […] dado que eso los ayuda a entender y a representar mejor la totalidad", reproduciendo las expresiones textuales de la joven, quien además reconoció la conveniencia de introducir el círculo en la enseñanza de fracciones porque dicha figura facilita el cálculo involucrado en la partición. Ante esto, nosotros suponemos que esta clase de *representaciones visuales* resultan relevantes para *Tania*, tanto para esclarecer la instrucción a desarrollar en el aula como para llevar a cabo los propios procesos de producción de las ideas matemáticas escolares con las que trabaja didácticamente. Por otra parte, nosotros no detectamos en las entrevistas cómo pudiera esta normalista trascender a

representaciones de las fracciones más abstractas que las representaciones visuales por ella aludidas, en relación con dichos números.

Reconocimiento de medios, tercios y cuartos con el plegado de papel. Entrevista Inicial 1

Al preguntársele a *Tania* si podría plantear un problema, ella eligió las mismas fracciones utilizadas en el problema del área del rectángulo (Figura 1). Para ello, de manera espontánea, *Tania* toma una hoja de papel (que para ella representa un pastel) y lo dobla a la mitad, luego de ese doblez vuelve a doblar en tres partes diciendo que va a representar los $^{2}/_{3}$ que se van a repartir a los niños. Nosotros interpretamos que al plegar el papel ella muestra cómo percibe, actúa y representa su propia comprensión del problema.

De acuerdo con la acción de plegar la hoja (mediante la utilización de operadores multiplicativos de manera intuitiva, al plisar en medios y tercios), consideramos que para esclarecer para sí misma el problema *Tania* recurre al doblado y desdoblado como una actividad que le ayuda a concretar su pensamiento, pues ella va construyendo el problema al expresar: "si la hoja ya la partí en medios y este medio a su vez lo voy a dividir en dos tercios y el resultado de esto me tiene que dar tres cuartos de un grupo; entonces vuelvo a mi medio y si esto lo divido en cuatro para comprobar que mis tres cuartos me van a dar mi medio" (Figura 2). Cabe mencionar que Tania no logró plantear el problema de división de fracciones solicitado y sólo reconoció las distintas formas de plegado, a partir del reconocimiento de partes de partes.

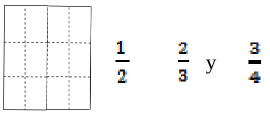
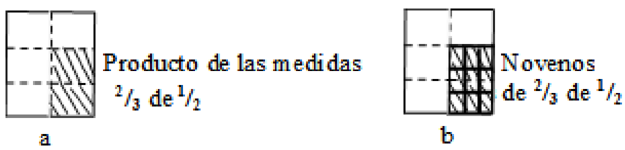


Figura 2. Mitades, tercios y cuartos mediante el plegado de papel.

El producto de fracciones asociadas con el plegado de papel. Entrevista Inicial 2

Nuevamente se le pide que elabore un problema referido a la división de fracciones y en esta ocasión ella volvió a considerar la representación del reparto de pastel mediante el plisado de una hoja (Figura 3, a y b). Nosotros interpretamos que la estrategia del plegado de papel utilizada por *Tania* le permitió tener presente en cada momento la unidad a la que estaba refiriéndose en ambas entrevistas.



Figuras 3. Representación de partes de partes con el doblado de papel.

El problema planteado por *Tania* es el siguiente problema: *En una fiesta se repartió el pastel sobrando la mitad. Tres cuartas partes* [escribe "$^{3}/_{4}$"] *de un grupo de 12 niños traviesos se comieron dos terceras partes* [escribe "$^{2}/_{3}$"] *de esa mitad. ¿Cuántos niños fueron los que se comieron esa parte? ¿A qué parte corresponde estos dos tercios* [escribe "$^{2}/_{3}$"] *de la totalidad del pastel? Haz la representación de lo que se comieron.*

Al preguntársele en qué grado de la primaria se podría trabajar este problema y cómo, ella mencionó que sería un problema para sexto grado y para resolver en diversas etapas (esto es, secuenciando en diversos momentos la respuesta a las tres preguntas del problema). Ella agrega "debemos pedirles a los niños que señalen qué cantidad de pastel se comió cada uno de los nueve niños. Si ellos dicen (mientras lee lo escrito en el papel) $\frac{2}{3} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y [eso] lo podrían comprobar con el doblado de papel".

A nivel de análisis, observamos que *Tania* necesita tener imágenes visuales y representaciones de la acción que realiza con el doblado y desdoblado de la hoja. Además, identificamos que reflexiona continuamente al expresar lo que efectúa con el plegado de papel, lo cual les permitirá a los alumnos, según *Tania*, no perder de vista el todo y los fraccionamientos realizados en el papel, mediante su plegado.

Al contrastar la primera y segunda Entrevistas Iniciales, observamos que *Tania* no logra concretar la división entre fracciones utilizando objetos, es decir, con el todo discreto; sin embargo, establece con el plegado de papel una situación donde reconoce que está implicada la multiplicación de fracciones. Advertimos que con esta estrategia *Tania* dio sentido a la composición multiplicativa y nos permitió observar la comprensión de la unidad divisible, las relaciones parte-todo y parte-parte, como indicios de "**núcleos de significación y pensamiento**" generado a través de la actividad.

Orden en las fracciones y relación parte-todo. Entrevista Inicial 2

En esta sección mostramos los procesos de pensamiento expuestos por *Tania* durante el diseño de un problema para que un alumno de sexto grado pueda identificar que $^3/_2 > {}^3/_4$. A continuación exponemos dos de los diseños realizados por la estudiante, los cuales los hemos señalado como *intento inicial* e *intento final.* Es importante indicar que entre uno y otro, *Tania* realizó varias propuestas de diseño de dicho problema.

Intento inicial. Antes de redactar el problema, *Tania* trazó los rectángulos (Figura 4a), divididos en cuartos y expresó que dicha partición le permitía establecer relaciones de equivalencia entre cuartos y medios. Posteriormente escribió el siguiente problema: *Juanito y Pedro llevan dos sándwiches para el desayuno, Juanito se come tres medios* [escribe "$^3/_2$"] *de sus sándwiches y Pedro tres cuartos* [escribe "$^3/_4$"] *de los dos. ¿Quién comió más?* Acto seguido, sobre los rectángulos, de izquierda a derecha señaló $^3/_2$ de esos dos "sándwiches" (Figura 4b), en la misma dirección, con la mano indicó $^3/_4$ para mostrar la comparación entre las dos fracciones.

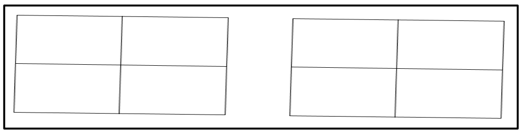


Figura 4a. Representación de los sándwiches.

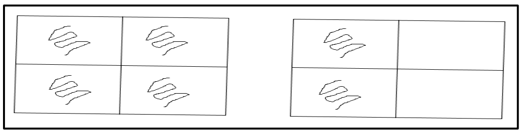


Figura 4b. Sombreado de los dos sándwiches.

Esta sobreposición favorece que *Tania* identifique que con los "objetos" que tiene no puede representar ambas fracciones. Así, advertimos que el proceso de marcar y señalar le permite a ella identificar que dos sándwiches no son suficientes. *Tania* menciona la necesidad de establecer el todo sin que ello implique "dar la respuesta en la pregunta". Al observar la producción de *Tania* consideramos que de forma intuitiva ella plantea la composición aditiva de los $^3/_2$ con los $^3/_4$.

Intento final. Al observar las dificultades de *Tania* para plantear un problema donde $^3/_2 > {}^3/_4$, la *entrevistadora EE* le sugirió la representación en la recta numérica como apoyo para que los niños comprobasen que $^3/_2 > {}^3/_4$. *Tania* traza entonces la recta y puede explicitar el orden en las fracciones (Figura 5). Este modo de representación lo hizo evidente en el primer problema de los sándwiches, pues en su representación con los rectángulos empieza para ambas fracciones de izquierda a derecha en un proceso de sobreposición. Advertimos cómo este modelo le facilitó a *Tania* la redacción del siguiente problema que implica distancias: *Dos ranitas saltan una línea, una salta tres medios* [escribe “$^{3}/_{2}$”] *de distancia y la otra tres cuartos* [escribe “$^{3}/_{4}$”]. *Represéntalo en un dibujo, colorea las distancias en el dibujo y di qué ranita saltó más, es decir, alcanzó una distancia más grande.*

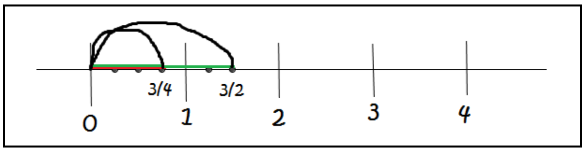


Figura 5. Representación de las fracciones en la recta numérica.

Tania realizó la tarea indicada haciendo explícito en todo momento su pensamiento, no sólo en los diseños, sino también en los procesos de resolución que llevó a cabo. La representación en la recta numérica favorece el diseño del problema donde prevalece lo lineal y la direccionalidad así como el uso del todo continuo, representación empleada de forma cotidiana en las aulas de educación primaria. A partir de la sobreposición de “objetos” observa que una fracción es mayor que otra, es decir, emplea de forma intuitiva la fracción como comparador. No logra establecer de manera formal la relación de orden. La equivalencia surge de su necesidad de representar “de la misma forma” ambas fracciones para poder identificar cual es mayor.

Emerge de forma reiterada el uso del todo discreto sin poder establecer de forma concreta la unidad que tampoco se hace explícita en la recta numérica. La unidad, identificada por ella en el desarrollo de esta tarea como el todo, es para Tania un elemento importante para el diseño de un problema con las condiciones solicitadas, lo que indica un fuerte establecimiento de la relación parte-todo, sin embargo, no muestra el reconocimiento del todo y manifiesta de manera constante la pérdida de la unidad de referencia. El todo para ella no vislumbra la posibilidad de ser un todo indefinido.

La resolución de los problemas la realizó siempre a través de representaciones gráficas que como ya señalamos, le permite dar sentido al trabajo con fracciones, lo que consideramos favorecedor para el establecimiento de relaciones de orden y la identificación de la unidad. La composición aditiva expuesta de forma intuitiva le permitió dar claridad a la necesidad de establecer la unidad.

Muestra dificultades en la composición aditiva, en tanto que no advierte que para representar un todo definido, para establecer relaciones de orden requiere al menos un todo conformado por la suma de ambas fracciones a diferencia de la recta numérica que la lleva a la sobreposición de la representación de las fracciones.

Cabe señalar que la tarea indicaba sólo el diseño de un problema pero para la estudiante parecía implicar de forma implícita la resolución a través de la cual podía verificar que su diseño fuera claro. Esto muestra rasgos de sentido a la práctica docente.

Conclusiones

Como importantes **“núcleos de pensamiento y significación”** que emergieron en lo manifestado por *Tania*, en el transcurso de las dos Entrevistas Iniciales realizadas, se destacan los diversos modos con los que ella reconoció a la unidad: “unidad de referencia”, “totalidad”, “todo”, “entero”, “colección”. Sin embargo, identificamos que al establecer relaciones de orden, presenta inestabilidad cognitiva que le impide otorgarle niveles de generalización a los ya aludidos núcleos de significación. Interpretamos que tales expresiones cargadas de sentido para la joven, se detectan como elaboraciones fuertemente arraigadas en unas situaciones y marcadamente débiles en otras, en lo que parece acompañar sus respectivos **procesos de conceptualización de la fracción**, en actual desarrollo para esta normalista.

Asimismo, pudimos detectar, tanto en sus propuestas didácticas como en el respectivo discurso manifiesto por Tania, el involucramiento de **imágenes visuales** (la consideración de diversas figuras geométricas) y la realización de determinadas **acciones** (el plegado de papel o la medición, preferentemente), a las que la mencionada normalista considera como importantes herramientas de enseñanza, todas ellas en asociación con la partición, la identificación de la fracción o de sus correspondientes procesos de composición y de relación. Dichos instrumentos, reconocidos por *Tania* para la enseñanza a los niños, en el aula de la escuela primaria, parecen cumplir un importante rol generador de comprensión para ella. No obstante, no queda claro cómo llegaría esta joven a construir, a partir de ello, representaciones más abstractas en vinculación con las diversas ideas atribuibles a las fracciones.

Respecto del doblado de papel, advertimos una estrategia generada de manera espontánea que da cuenta de cómo *Tania* estructura una estrategia que la lleva a comprender las relaciones parte-parte como expresión particular de la multiplicación de fracciones. Sin embargo, en distintos pasajes de las entrevistas observamos que, de modo sistemático, al enfretarse a la división de fracciones ella propone situaciones en las que está involucrada la operación inversa, esto es, la multiplicación.

La continua reiteración del establecimiento del “todo”, el establecimiento de forma intuitiva de la composición aditiva de las fracciones encaminado a un todo definido para el diseño del problema, la representación de las fracciones como “fracciones equivalentes”, comparar fracciones a partir de la sobreposición y el apoyo en la representación gráfica, son acciones y verbalizaciones que articulan los **“núcleos de pensamiento y significación”** los cuales, desde su “forma” intuitiva estructuran y fortalecen el sentido y significado de los constructos de la fracción.

Por todo lo anterior, globalmente concluimos que, en base a lo planteado por Kieren (1988) en su Red Semántica, identificamos a través de lo expuesto por *Tania* en el diálogo y en sus modos de representación que sus procesos cognitivos de pensamiento y significación en relación a las fracciones se encuentran anidados en el nivel intuitivo de producción intelectual. Lo hemos considerado así debido a que durante las entrevistas no emergen los conceptos como expresiones de generalización y abstracción.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Hart, K. (2004). Fractions. In K. Hart (Ed.), *Children's understandings of Mathematics:11-16* (pp. 66-81), London, England: Antony Rowe.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, U.S.A: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 505-528.

Streefland, I. (1977). Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción*. Primera Conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática en Utrecht,* The Netherlands.

Valdemoros, M. E. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones. Estudio de caso. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (465-481). México, México: Editorial Iberoamericana.

Valdemoros, M. E. & Ruiz, E. F. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 127-157.

Vergnaud, G. (2007). En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigacões em Ensino de Ciências, 12*(2), 285-302.