EL CONCEPTO DE INFINITO Y EL MODELO DE VAN HIELE

Alba Soraida Gutiérrez Sierra*
Rene Alejandro Londoño Cano**
albasoraidagutierrez@gmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá*
Universidad de Antioquia, Colombia **

Resumen

Se pretende mostrar avances de la investigación en curso, "Descripción de la comprensión del concepto de infinito y su relación con las funciones de variable real, en estudiantes de Educación Media y primeros semestres de Educación Superior, a través del Modelo de van Hiele". Para pode dar cuenta de la descripción de la comprensión se considera apropiado y adecuado utilizar el Modelo de van Hiele.La metodología de esta investigación está orientada bajo un enfoque mixto, utilizando como herramienta para la recolección de la información la entrevista semiestructurada de carácter socrático; mediante el guion de entrevista se verifican los descriptores hipotéticos correspondientes a cada nivel de razonamiento, permitiendo describir la comprensión de los estudiantes en relación al concepto de infinito, a través del concepto de función de variable real. Esta interacción permite comprender algunos procesos cognitivos de los estudiantes en el momento de razonar.

Palabras clave: infinito, descriptores, comprensión, razonamiento, van Hiele.

Introducción

La problemática abordada desde el contexto de la investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto de infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos. Respecto al tema, "se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función. Una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos" (Attorps, Björk y Radic, 2016, p.sf.).

De acuerdo a lo anterior, el presente reporte de investigación pretende mostrar las dificultades que se generan en la concepción y definición del infinito y su relación con funciones de variable real, por parte de estudiantes de último año de educación media y primer año de Universidad, para abordar esta problemática se utiliza modelo de Van Hiele, el cual permite describir y explorar el nivel de razonamiento del concepto en cuestión.

En efecto, al realizar un gran recorrido y análisis en la revisión bibliográfica se pudo evidenciar como algunos objetos matemáticos a la hora de ser enseñados generan ciertas dificultades de comprensión y aprendizaje, en ocasiones esto se atribuye al nivel del lenguaje utilizado por parte del maestro, puesto que éste no está en el mismo nivel de lenguaje de los educandos, esto van Hielen (1957) lo denomina propiedad de separación, sumado a ello la escases de estrategias o formalidad conceptual en el momento de la enseñanza, sobre el asunto es importante indagar acerca de cómo suceden ciertos procesos internos de aprendizaje; por lo anterior, el Modelo van Hiele admite de forma pertinente y adecuada describir la comprensión y establecer el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes frente al concepto de infinito; este modelo ha sido implementado en diversas experiencias educativas, respaldado en las últimas dos décadas por investigaciones a nivel de programas de maestría y doctorado, como: estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van-Hiele (Esteban, 2003).Relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Londoño, Jaramillo y Esteban, 2017) la comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, (Rendón & Londoño, 2011),relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele, entre otros, con los cuales se amplió el fundamento teórico para consolidar las bases que soportaron la investigación.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, una de las tareas de la educación es resignificar la cultura hacia la matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en la realidad y en solucionar problemas de la vida real; pues el pensamiento matemático “se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas” (Cantoral y otros, 2005, p.19).

Problema de investigación

Sobre la enseñanza y comprensión del infinito han detectado diversas dificultades, cabe resaltar que los docentes tienen dificultades no solamente en el conflicto originado en la adquisición y comprensión de este concepto por parte de los estudiantes, sino también, en las estrategias que se utilizan para lograr la transposición adecuada del conocimiento enseñable; por su parte la concepción del infinito, no parece regida por el sentido común, pues contradice ideas evidentes e intuitivas, como el axioma griego indica, "El todo es mayor que las partes".

De igual manera, en el aula se encuentran situaciones similares, los estudiantes tienen controversias como que el infinito es una cantidad que aparece en muchas operaciones, pero que al mismo tiempo se requiere de una respuesta exacta, es decir se tiene la idea que el infinito no se puede contar y no se sabe cómo expresarlo matemáticamente, por lo general esta cantidad se relaciona con fenómenos de la existencia y más allá de la misma; es usual que al preguntar ¿qué piensan sobre el infinito?, los estudiantes respondan: el número infinito es como querer contar las estrellas del cielo o los granos de arena, lo relacionan con algo ilimitado o muy grande, lo que deja a la vista que la concepción sobre el infinito se relaciona con la intuición, donde según Cornu (1981) esto hace referencia al “modelo espontáneo” en donde se sabe que este concepto trasciende más allá.

Lo que se evidencia es que el infinito desde su aparición en filosofía y en matemáticas estaba ligado a una idea intuitiva sobre la posibilidad de ir más lejos, que no hay límite, el pensar que a cada número siempre se le puede añadir el siguiente de, proporciona una idea intuitiva de que los números no tienen límite, siempre se puede construir otro número mayor, el problema surgió cuando cara a contradicciones era necesario concebir otros tipos de infinito.

Así mismo, el infinito asociado al conteo, producto de una extrapolación de la experiencia sensible con colecciones finitas de objetos, se manifiesta en los niños desde pequeños cuando son capaces de advertir que las reglas de las operaciones elementales son aplicables y válidas para todos los números, o que hay eventos cíclicos como la sucesión del día y la noche que se repiten indefinidamente sin que parezcan tener fin.

Frente a lo anteriormente expuesto, cuando los estudiantes comprenden el concepto del infinito solamente desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, se generan una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que ellos no pueden establecer la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos formales. En consecuencia, Dolores & Valero (2004), afirman que el no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, hace que emerjan consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones.

En consecuencia, surgen algunos interrogantes a parir de las premisas anteriormente expuestas:

¿Tienen los docentes la suficiente claridad del término infinito para ofrecer una explicación adecuada de esta noción? ¿en qué momento de su formación se debe situar al estudiante frente al concepto matemático de infinito actual?; es por ello que a través del planteamiento y ejecución de los objetivos la investigación pretende dar solución a la problemática puesta en conocimiento.

Aspectos teóricos

El infinito, está asociado a la idea de totalidad en acto, o infinito actual el concepto de infinito como unidad (infinito actual); mientras que, si el infinito se usa solo como adjetivo, será difícil de tratar como sustantivo, de este modo se refuerza la visión potencial dejando de lado la actual; otro ejemplo si por infinito se entiende algo muy grande, ese algo será transformado en un número natural con evidentes contradicciones, incluso si el concepto de infinito se entiende como ilimitado, resultara difícil admitir más adelante a un objeto limitado pero infinito, como el conjunto ordenado de puntos de un segmento, finalmente, si el infinito se equipara con lo indefinido, adquiere un significado negativo o evasivo (Aponte, 2014).

No obstante, estos errores se asocian también a la forma como el docente presenta una situación problema en la clase para la comprensión del infinito; existe un largo camino de estudiosos, científicos y genios que han dedicado varios años en romper los paradigmas que se han afrontado respecto a este concepto; desde Platón y Pitágoras el infinito era apeirón, inconcebible, el caos, el infinito carecía de medida. La voz «apeirón» tal como la emplea Anaximandro, significa «sin fin» o «sin límite», suele traducirse como «lo infinito», «lo indefinido», «lo ilimitado» (Ortiz, 1994; 59).

Si bien es cierto, la contradicción fue base para limar estas concepciones, la idea de infinito generó un revuelo a lo que se conocía como las ciencias exactas, pues con la aparición del infinito se abrieron caminos a la existencia ineludible de lo ilimitado, por su parte, Aristóteles intentó explicar qué pasaba con los números denominados infinitos a través de dos representaciones, el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial donde se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, concebir una expresión que se divide sucesiva e interminablemente, el segundo, el infinito como una totalidad completa concebida en la actualidad. Esta última noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría.

En consecuencia, el proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de tal forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz (Londoño2017) ; asimismo, El modelo van Hiele ha sido considerado pertinente en diferentes investigaciones para describir el razonamiento de un estudiante en conceptos de objetos matemáticos que sirven como guía para diseñar la instrucción a la que se debe exponer un estudiante en apoyo al progreso del nivel en el que se encuentra para avanzar al siguiente nivel.

En relación con las implicaciones anteriores, El modelo de van Hiele permite el desarrollo de estructuras mentales mucho más complejas, como se muestra en la siguiente figura.

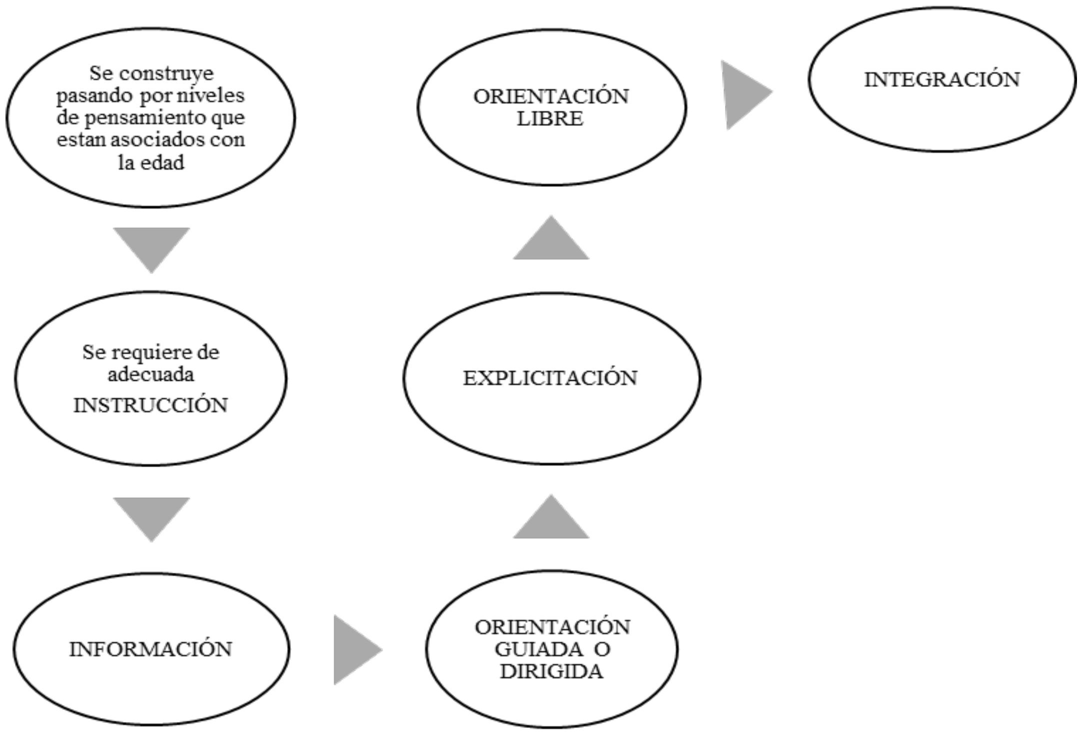


Figura 13. Modelo Van Hiele

Fuente Gamboa & Vargas (2013).

De acuerdo con Jaramillo & Duarte (2006), el modelo Van Hiele está compuesto por la percepción, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, van Hiele propone cinco niveles de razonamiento, los cuales se exponen a continuación con algunas de sus características:

Nivel 0 predescriptivo. Se perciben y describen características teniendo en cuenta conocimientos previos

Nivel 1 de reconocimiento visual. Se reconocen mediante la observación las propiedades, aunque no se hacen relaciones entre sí.

Nivel 2. Análisis. Se establece una razón comparando, identificando propiedades y reconociendo relaciones.

Nivel 3. Clasificación o de relaciones. Se emplean propiedades para deducir utilizando el razonamiento formal

Nivel 4. Deducción formal. Se establecen similitudes y diferencias entre estructuras a partir de propiedades definidas.

En cuanto a las propiedades de los niveles y sus características se pueden mencionar:

Secuencialidad fija: un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele sin haber superado el nivel n - 1 ya que los niveles de razonamiento son jerárquicos.

Adyacencia. Los objetos o conceptos que para los estudiantes son implícitos en el nivel anterior se vuelven explícitos en el nivel siguiente.

Distinción. El nivel siguiente permite estructurar y mejorar la comprensión de los conceptos trabajados durante el nivel anterior

Separación. Para que dos personas puedan entenderse entre sí en relación con un concepto matemático, deben estar en un mismo nivel de razonamiento

Cada nivel tiene su propio lenguaje. Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje específico, pues no solo la capacidad de razonamiento se refleja en la forma de resolver problemas, sino también en la forma de expresarse y en el significado que se da o puede darse al vocabulario específico de cada nivel.

Consecución. El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual (Ibarra, 2014)

Aspectos Metodológicos.

A partir de los objetivos a alcanzar y las preguntas que se pretende encontrar respuesta, la investigación tiene un alcance descriptivo de carácter mixto. En la metodología mixta se combinan técnicas, métodos, aproximaciones dentro de la misma investigación como lo establece Johnson & Onwuegbuzie (2004), de esta manera se fortalece el estudio haciendo uso de narraciones, verbalizaciones de los actores objeto de estudio y datos numéricos. Los estudios mixtos permiten obtener una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos facilitando el fortalecimiento de conocimientos teóricos.

De esta manera el trabajo se orienta a describir a través del modelo de van Hiele como los estudiantes comprenden el infinito y la relación que se establece entre este objeto matemático y las funciones de variable Real, para ello se diseña un guion de entrevista semi estructurada de carácter Socrático que podar ubicar a los estudiantes en uno de los niveles de razonamiento que contempla el modelo.

Dentro de las técnicas utilizadas para la recolección de la información se desarrolló la entrevista semiestructurada de carácter socrático; se propusieron inicialmente varios descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel, aunque hay que aclarar que solo se trabajaron los cuatro primeros niveles, pues van Hiele considera que el nivel cinco es de un rigor teórico demasiado elaborado, durante el proceso de verificación y refinamiento de los descriptores, se demostró si estos cumplían y correspondían a cada nivel de razonamiento, y luego se describió la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, y el concepto de función de variable real. Esta interacción permite, según Sandoval (2002) poder comprender la realidad tanto en su lógica interna como en su especificidad.

La aplicación de la entrevista socrática enmarcada en el modelo de van Hiele propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando. El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

Resultados Obtenidos

En este apartado se mostrará avance en los resultados de acuerdo a algunos descriptores preliminares para cada nivel, así como las preguntas correspondientes.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens específicamente para los niveles 0 a III:

Nivel 0, ***predescriptivo***

Nivel I, ***de reconocimiento visual***

Nivel II, ***de análisis***

Nivel III, ***de clasificación, de relación.***

Para que se pueda establecer una clasificación en niveles dentro del modelo de van Hiele, los descriptores de los niveles por verificar deben cumplir con unas propiedades específicas, por su parte Usiskin (1982) las enuncia de la siguiente manera: Secuencialidad fija, Adyacencia, Distinción, Separación, es importante recordar que cada nivel tiene su lenguaje.

Nivel 0. (Predescriptivo)

- *Identifica que una recta y un segmento de recta están conformados por infinitos puntos*
- *Reconoce que los números reales están compuestos por distintos subconjuntos numéricos.*

  Preguntas

En la siguiente figura ubica dos puntos cualesquiera C y D entre los puntos A y B

¿En cuántas partes quedo divido el trazo A-B?

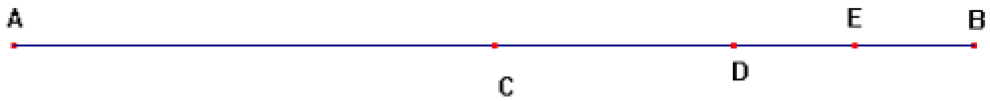
Indica un nombre para el trazo que une los puntos A-B y cada uno de los trazos que se formaron cuando se ubicaron los puntos C y D.

Nivel I. (Visual)

- Identifica de forma visual segmentos de línea e infiere que a partir de ellos se puede establecer un intervalo o subconjunto numérico en los reales.
- Determina un intervalo de números reales como un subconjunto del conjunto de todos los reales.

Preguntas

Daniela recorre en su bicicleta desde el punto A hasta el punto para esto tiene que pasar por el punto C, siendo C el punto medio entre A y B, luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante, siguiendo este proceso es posible que Daniela llegue al punto B con su bicicleta.



Recorrido de Daniela

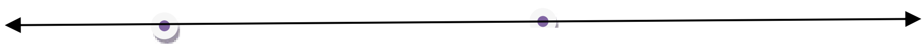
Si cada punto que utilizo Daniela para hacer el recorrido de A-B le corresponde un número real, cuantos números reales se pueden ubicar en dicho recorrido.

Nivel II (De análisis).

- *Reconoce de manera analítica la densidad de los reales en un intervalo definido.*
- *Tiene claro que los reales están compuestos por infinitos subconjuntos propios infinitamente divisibles.*

Preguntas

Toma el intervalo real cerrado [3,4]



3   4

Ubica el punto medio entre 3 y 4 e indica el valor correspondiente.

Luego a partir del nuevo valor encontrado y el número 4 encontrar el punto medio entre ellos dos. Realiza este proceso tres veces más, ubicando siempre el punto medio.

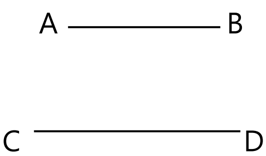
Al realizar el proceso de ubicar el punto medio entre el valor encontrado y el número 4 por muchas veces, indica la cantidad de números que hay entre el punto medio inicial y cuatro.

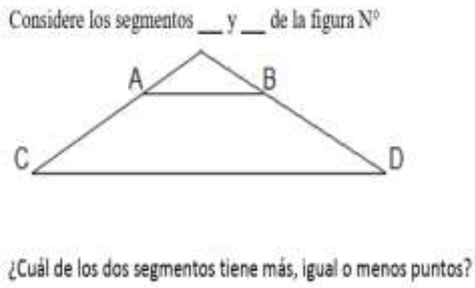
¿cuántos números reales hay entre tres y cuatro?

Nivel III (De clasificación o relación).

- *Afirma que a cada intervalo de números reales le corresponde la misma cantidad de números reales que cualquier otro intervalo subconjunto de la inicial.*
- *Reconoce que hay infinitos números en un intervalo cerrado de la recta real.*

Preguntas.





Al observar el segmento A-B y el segmento C-D se puede indicar ¿cuál de los dos segmentos tiene mayor cantidad de puntos.

Referencias

Aponte. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio Histórico-epistemológico en la perspectiva de la Educación matemática. .* Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía : Maestría en Educación énfasis en Educación Matemáticas.

Attorps, I. B. (2016). *Generating the patterns of variation with GeoGebra: the case of polynomial approximations. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 47(1), 45-57. DOI:10.1080/0020739X.2015.104696.*

Cantoral, R. y. (2005). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis .* México.: Editorial Trillas.

Cornu. (1981). *Apprentissage de la notion de límite :modèlesspontanés et modèlespropes. ProceedingsPME-V, .* Grenoble, France, : Vol. I, p. 322-326.

Cornu. (1983). *Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles.* Tesis de doctorado de tercer ciclo. Universit`e de Grenoble.

Dolores, Valero. (2004). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. .* Epsilon, Thales, 58, 20(1), 45 73.

Esteban, P. (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele. Valencia. 2003. Tesis doctoral publicada. Valencia.* España : Universidad Politécnica de Valencia.

Gamboa, y Vargas. (2013). *El Modelo Van Hiele y la enseñanza de la Geometria .* UNiciencias, vol2, número 1.

Ibarra. (2014). *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele.* Antioquia: Universidad de Antioquia. Maestría en Educación.

Jaramillo y Duarte. (2006). *Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiel.*

Johnson y Onwuegbuzie. (2004). *Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come .* Los métodos de investigación mixtos: un paradigma de investigación cuyo tiempo ha llegado]. Educational Researcher, 33(7), 14-26. .

Jurado y Londoño. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", .* Colciencias 1115.

Llorens. (1995). *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales. .* Valencia, España.

Londoño. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y Tangentes en el marco de la teoria de Pirie y Kieren. .* Medellín: Doctorado tesis, Universidad de Antioquia.

Londoño, Jaramillo y Esteban. (2017). *Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren.Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnología.* Policía Nacional, volumen 9 nro 2.

Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Medellín: Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Tesis doctorado en educación.

Rendón y Londoño. (2011). *La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Antioquia. Trabajo de investigación de Maestría.* Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%.

Sandoval. (2002). *Investigación Cualitativa. .* Recuperado de http://contrasentido.yukei.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf.

Schwarzenberge, y Tall. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits. .* Mathematics Teaching, 82,44–49.

Usiskin. (1982). *Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry.CRRSSG Report.* Estados Unidos: Universidad de Chicago.

Van Hiele. (1957). *El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis de doctorado. .* Universidad de Valencia. España: Disponible en https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf.