EL DINAMISMO DE GEOGEBRA PARA EXPLORAR ASPECTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DEL CAOS

Viviana Angélica Costa
vacosta@ing.unlp.edu.ar

IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, Argentina

Resumen

La Teoría del Caos es una rama actual de la matemática que permite estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos complejos que sirven de modelo para múltiples fenómenos naturales, económicos y sociales. En este trabajo se describen aspectos básicos de esta teoría y cómo es posible explorarlos de un modo sencillo usando el dinamismo de GeoGebra. En particular se aborda el estudio del mapa logístico, sistema iterado que modela el crecimiento de una población, que permite delinear la ruta al caos. Se presenta una propuesta didáctica para el estudio de ese mapa y se muestran los resultados realizados utilizando varias de las Vistas de GeoGebra. Finalmente se reflexiona acerca de la importancia de la enseñanza de los sistemas dinámicos en cursos básicos de matemática universitaria o en formación de profesores.

Palabras clave: *Teoría del Caos, sistema dinámico, GeoGebra, enseñanza.*

Introducción

¿Qué es el caos? Es común escuchar relacionar al caos con el llamado efecto mariposa, con la ciencia de las sorpresas, de lo no lineal y lo impredecible. Mientras que la ciencia más tradicional trata con fenómenos supuestamente predecibles como la gravedad, la electricidad o las reacciones químicas, la Teoría del Caos trata con la no linealidad que es efectivamente imposible de predecir o controlar, como la turbulencia, el clima, el mercado de valores, nuestros estados cerebrales, etc. (Mindlin, 2008).

Esta Teoría es la rama de la matemática que estudia, entre otros, esos fenómenos antes detallados que tienen como característica la sensibilidad a las condiciones iniciales. Su desarrollo se inicia a mediados del siglo XX y está íntimamente relacionada con la Geometría Fractal y con la Teoría de las Catástrofes de René Thom. Los avances en estas áreas se vieron favorecidos por el rápido desarrollo de la tecnología y colaboran con entender los sistemas altamente complejos, como son los sistemas sociales, económicos y biológicos, entre otros, que evolucionan en el tiempo con comportamientos que incluyen el desequilibrio, la retroalimentación positiva, perturbaciones, fractales, atractores extraños y la complejidad dinámica, características de la Teoría del Caos (Reigeluth, 2004).

En relación a la enseñanza de estos temas de la matemática contemporánea, ya hace varias décadas Wenzelburger (1992) mencionaba la importancia de su estudio en la formación de profesores y en cursos de grado. Hoy en día no se ha avanzado mucho en esta línea, sólo existen algunos cursos de dinámica compleja como el que detalla Seoane, Zambrano, San Juan (2008) destinado a estudiantes principiantes de los primeros cursos de las titulaciones de Ingeniería Química, Ciencias Ambientales e Informática en España. En general la enseñanza de los conceptos de la Teoría del Caos es postergada a cursos de posgrado. Esto último puede ser debido a que para abordar varios de sus contenidos es necesario el conocimiento de una matemática avanzada que incluye herramientas de Algebra Lineal y de Sistemas Ecuaciones Diferenciales.

Aunque, un modo sencillo de comenzar a comprender el caos es abordándolo a partir del estudio de los sistemas dinámicos discretos en una dimensión. Estos sistemas, conocidos como mapas, aplicaciones iterativas o relaciones recursivas, evolucionan en el tiempo por el proceso de iteración, en el que el siguiente estado del sistema es determinado por su estado actual. Pueden presentar una gran diversidad de comportamientos, entre los cuales se puede encontrar el caos y revelar sus características fundamentales. Los conocimientos requeridos en este caso se reducen a los del cálculo y del cálculo diferencial en una variable real. Esto permitiría su enseñanza en cursos de grado de distintas carreras y en la formación de profesores.

En esta línea de ideas se presenta en este trabajo una propuesta didáctica que tiene por objetivo mostrar cómo es posible explorar, de un modo sencillo, aspectos teóricos básicos de la Teoría del Caos apoyándose para ello en la potencialidad del software GeoGebra.

Objetivos

- Explorar en forma sencilla sistemas complejos que presentan un comportamiento caótico a partir del dinamismo de GeoGebra.
- Proponer la enseñanza de aspectos básicos de la Teoría del Caos en cursos básicos de matemática universitaria y formación de profesores.

Marco teórico

La investigación se apoya en las ventajas que presenta la utilización de sistemas CAS para explorar conceptos matemáticos y simular procesos. Existe una gran variedad de sistemas CAS que combinan capacidades de cálculo simbólico, numérico y gráfico, libre o comercial y orientado a diferentes campos específicos.

Para el desarrollo de este trabajo seleccionamos el software GeoGebra (https://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra) que fue creado con fines educativos. Las razones de tal selección son varias: es gratuito, libre multiplataforma, permitiendo al usuario disponer de tal recurso sin tener que pagar una licencia, más aun en países en vías de desarrollo, como es el caso de muchos en Iberoamérica, donde ni siquiera es de esperar que se disponga de licencias comerciales por su alto costo (Morante y Vallejo, 2011). Otra de las ventajas es la de ser un software de geometría dinámica que permite combinar elementos de Geometría, Algebra, Análisis y Cálculo de una forma dinámica, representando a los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas. Ello significa que es posible obtener vistas gráficas, algebraicas y hojas de datos vinculadas entre sí. Las construcciones adquieren dinamismo y movimiento, permiten transformaciones sin más que arrastrar cualquier objeto con el ratón, lo que ofrece la posibilidad de interactuar y por tanto investigar sobre una determinada construcción, en contraposición a la rigidez de otros software (Carrillo, 2012).

Para el caso particular del estudio de sistemas dinámicos (discretos o continuos) donde además se incluyan parámetros, GeoGebra ofrece una variedad de herramientas útiles, como son los "deslizadores", la posibilidad de "animación" y de "activar rastros". Además ofrece la posibilidad de trabajar con distintas Vistas simultáneamente, que se actualizan dinámicamente según cambien los objetos en una u otra. Entre las Vistas, se encuentran la Vista Hoja de Cálculo, que permite crear tablas, siendo esto útil al momento de trabajar con sistemas dinámicos discretos. Todos esto antes mencionado se conjuga para configurar a GeoGebra en un espacio de trabajo óptimo para simular y estudiar sistemas dinámicos.

Marco conceptual

Los mapas unidimensionales son de la siguiente forma:

$$x_0 \text{ valor inicial}, \ x_{n+1}=f(x_n), \text{ f función real y } n=0,1,2,3,.....$$

El procedimiento usual de un sistema iterado es muy sencillo aunque su dinámica puede ser muy complicada (Alligood, Sauer, & Yorke, 1996). Se escoge primero un valor inicial x_0 de la variable a iterar. Después se calcula el valor de la función en ese punto $f(x_0)$, que determina un nuevo punto $x_1=f(x_0)$. Finalmente se usa ese valor obtenido como entrada para empezar de nuevo el algoritmo. Repitiendo esto n veces se genera una trayectoria (o sucesión) de valores reales: x_0, x_1, ... , x_n de la que interesa conocer su comportamiento. Esta secuencia o sucesión es conocida como órbita que se inicia en x_0 y donde se cumple que:

$$x_n=f(x_{n-1})=f(f(x_{n-2}))=..... = f^n(x_0)$$

Los mapas son fácil y rápidamente simulados en computadoras, en los que el tiempo es inherentemente discreto. Tales experimentos revelan un número de patrones inesperados, que a su vez han estimulado nuevos desarrollos teóricos. Las iteraciones pueden visualizarse mediantes gráficas del siguiente modo. Una de ellas es simplemente marcar en la recta real los puntos x_i obtenidos de la simulación para los valores de i desde 0 hasta un valor n determinado (Figura 1).

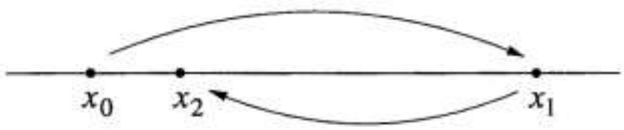

Figura 1. Representación gráfica de un mapa en una dimensión.

También es usual graficar en el plano en un sistema de coordenadas los pares ordenados (n,x_n), uniéndolos con una poligonal como se observa en la Figura 2.

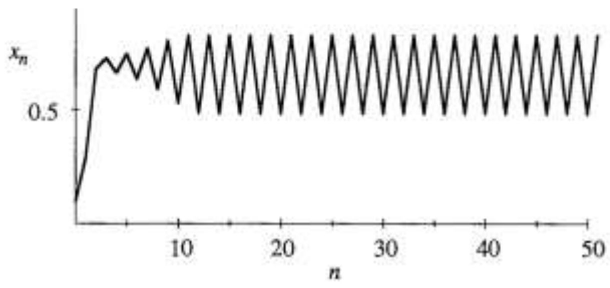

Figura 2. Gráfico de un mapa. Pares (n, xn).

Otro modo, es graficar una telaraña u órbita que une los puntos $(x_0;0)$, $(x_0;x_1)$, $(x_1;x_1)$, $(x_1;x_2)$, … $(x_n;x_{n+1})$. En el eje de las abscisas se grafica x_n y en el de ordenadas x_{n+1}. Esto se observa en la Figura 3.

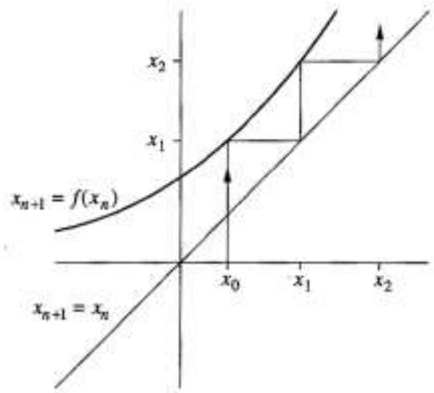

Figura 3. Órbita de un mapa.

El objetivo de los mapas es estudiar su comportamiento para valores grandes de *n*. Este puede ser estable, inestable, periódico o caótico. Es decir, se busca conocer de un modo cualitativo y cuantitativo el valor de: $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Para ello se definen algunos conceptos teóricos. Se denomina punto fijo a un valor x^* que satisface: $f(x^*)= x^*$. Si para algún $x_n=x^*$ y $x_{n+1}=f(x_n)=x^*$, los valores siguientes a x_n permanecen en x^*.

¿Qué condición puede asegurar la estabilidad de un punto fijo x^*? Consideremos una órbita cercana al punto fijo. Es decir, sea $x_n= x^*+ e_n$ y nos preguntamos si es atractiva o repulsiva al punto fijo para *n* creciendo. Entonces

$$x_{n+1}= x^*+ e_{n+1} = f(x^*+ e_n) = f(x^*) + f'(x^*).\ e_n + O(e_n^2)$$

Pero, por ser x^* punto fijo, $f(x^*)= x^*$, lo anterior se reduce a

$$e_{n+1} = f'(x^*)\ e_n + O(e_n^2).$$

Despreciando el error, obtenemos $e_{n+1} = f\,'(x^*)\ e_n$.

Esta fórmula recursiva es del tipo geométrica y se concluye lo siguiente:

- Si $|f'(x^*)|<1$, entonces x^* es un punto fijo estable.
- Si $|f'(x^*)|>1$, entonces x^* es un punto fijo inestable.

- Si $|f'(x^*)|=1$ hay que considerar para el análisis el término del error.

Otros conceptos de interés, que permiten analizar el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico son el determinar las órbitas k-periódicas, es decir puntos p del mapa que verifican que $f^k(p)=p$.

Además el Exponente de Lyapunov y el Diagrama de Bifurcaciones son de interés analizar. El primero otorga una medida de la separación exponencial de dos órbitas para condiciones iniciales infinitamente próximas, x_0 y $x_0+\delta_0$. Al iterar n veces cada una da lugar a órbitas distintas. Sea δ_n la separación entre las dos órbitas. Si $|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{\lambda n}$, a λ se lo denomina Exponente de Lyapunov, y se considera que hay caos cuando se obtienen valores positivos de este parámetro.

Por otro lado el Diagrama de Bifurcación es un gráfico de utilidad para encontrar los valores del parámetro para los cuales hay duplicaciones de periodos, regularidades y presencia de caos. En el eje de las abscisas se grafica el parámetro y en el de las ordenadas los valores que se obtienen de las iteraciones después de un largo período.

Mapa Logístico.

Fue introducido por Pierre Verhulst en 1845 y popularizado en un artículo de 1976 por el físico Robert May, como análogo en tiempo discreto a la ecuación diferencial logística para el crecimiento de una población (Madrid Casado, 2015). Una de sus aplicaciones, es la de modelizar el crecimiento de una población en un área cerrada. Su fórmula iterativa es la siguiente:

$$x_0 \in [0,1], \quad x_{n+1}= r\, x_n\, (1 - x_n)$$

El parámetro r representa la fertilidad y demás influencias externas. ¿Por qué es interesante el mapa logístico? Porque reúne, en un solo sistema unidimensional y dependiente sólo de un parámetro, un abanico de comportamientos diversos para las trayectorias x_n cuando se varía el valor de r y/o de x_0. Además estos comportamientos se encuentran en muchos otros sistemas discretos y continuos. Se dice que sus características dinámicas son universales en ese sentido.

Metodología

Se propone una secuencia didáctica que tiene por objetivo el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos discretos que presentan un comportamiento caótico. La secuencia podría ser implementada en dos o tres encuentros en cursos básicos de matemática universitaria, o en cursos para futuros profesores de matemática y/o de física, y se abordarían los conceptos de mapa, punto fijo, bifurcaciones, comportamiento estable, inestable, periódico y caótico. Los conocimientos previos para desarrollar la secuencia serían los de cálculo en una variable: noción de función, derivada y sucesión iterada, y el manejo de básico de GeoGebra.

La propuesta puede iniciarse con el siguiente problema: "*Supongamos el caso de un microbiólogo que está interesado en realizar una serie de experimentos para los que requiere un número suficiente de bacterias de la especie Escherichia coli. Con el fin de proveerse de las bacterias necesarias, realiza un cultivo en una placa Petri. Supóngase que inocula en la placa una cantidad inicial de bacterias a la que denominaremos x_0. ¿Cómo evoluciona la población en el tiempo si se conoce cuál es su estado inicial?*".

El mapa logístico podría ser en este caso el que modele matemáticamente el crecimiento de tal población.

Resultados

La respuesta al problema propuesto puede obtener como resultado de las tareas que se presentan a continuación.

En el software GeoGebra se ingresa en la Barra de Entrada la función de iteración, que en este caso es: *f(x)=r x (1- x),* creándose automáticamente un deslizador para el parámetro r. En la Vista Gráfica se obtiene una parábola. También en la Vista CAS se ingresa la misma función, permitiendo obtener mediante el comando Derivada y Resuelve el valor donde se obtiene su máximo de r/4 para x=1/2. Esto se observa en la Figura 4. En consecuencia se ajustan los valores máximo y mínimo del deslizador r entre 0≤ r ≤ 4, para que de este modo los valores del mapa se encuentre entre 0 y 1.

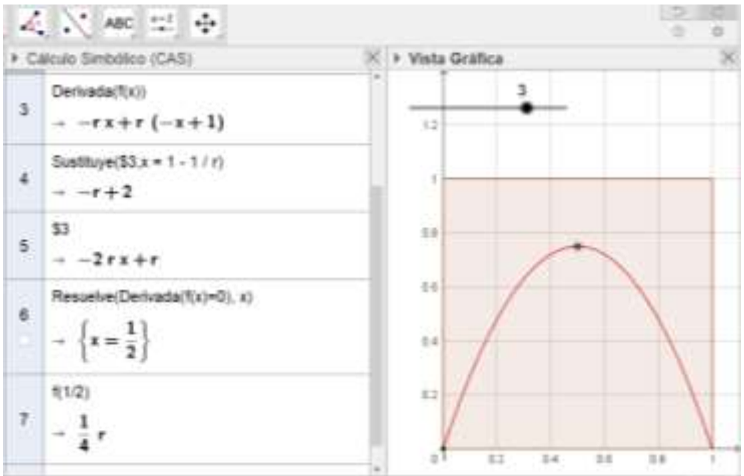

Figura 4. Vista CAS y Vista Gráfica. Función de iteración.

Siguiendo con la secuencia didáctica propuesta, se realizan simulaciones para distintos valores de x_0 y de r. Para esto, una forma es graficar en la Vista Gráfica la lista de pares de puntos generada en la Hoja de Cálculo. En una columna se ingresan los valores de n. Luego se ingresa en la vista grafica un deslizador que se corresponde con la condición inicial, restringido a valores entre 0 y 1. En otra columna se generan los valores de $f(x_n)$. Luego se crea una Poligonal con las columnas A y B, que se corresponden con los pares (n, x_n). Luego en la Vista Gráfica es posible animar los deslizadores para r y para la condición inicial, y se observan los distintos comportamientos del mapa.

En la Figura 5 se observa que si r es 0.8 y el valor inicial de la población es 0.6, entonces ésta se extingue, es decir que tiende a cero. En cambio, si r es 2, la población se estabiliza en un valor fijo no nulo.

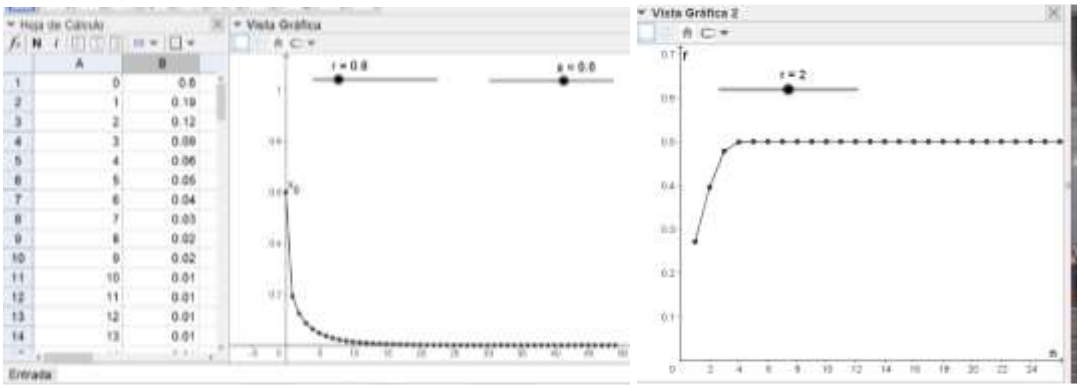

Figura 5. Mapa logístico para r=0.8 y para r=2.

En la Figura 6, se observa que si r es 3.3 la población oscila entre dos valores fijos, es de doble período, en cambio si r es 3.5 la población toma valores de período 4.

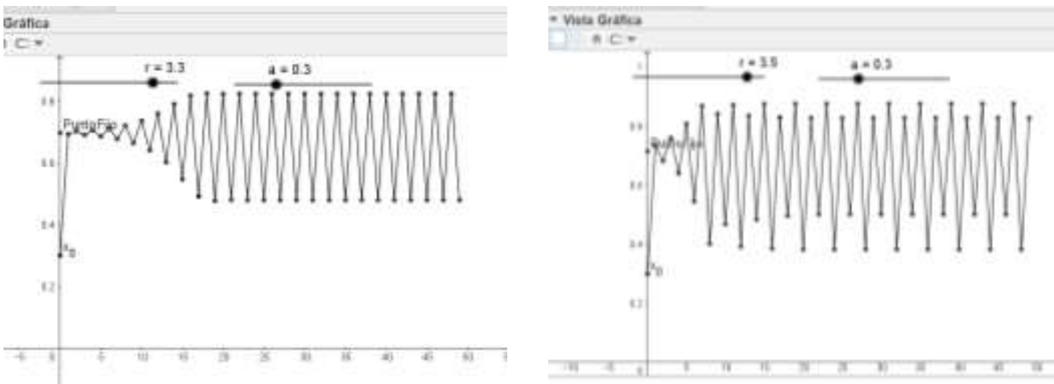

Figura 6. Comportamiento k-periódico del mapa logístico.

¿*Cuáles son los valores para los cuales la población se estabiliza en el tiempo*? Para encontrarlos se puede hacer en GeoGebra de dos formas, una analítica y la otra gráfica. En la forma gráfica, se ingresan en la barra de entrada las funciones g(x)=r x (1-x) y h(x)=x, para luego en la Vista Gráfica con la herramienta Intersección se seleccionan los dos objetos y se obtiene el punto fijo (Figura 7, columna 1 y 3).

Analíticamente, en la vista CAS se usa el comando Resuelve y se obtienen los *puntos fijos* $x^*=0$ y $x^*=1–1/r$. Para clasificarlos, se encuentra la derivada de la función de iteración evaluada en el punto fijo (comando Derivada y comando Sustituye) (Figura 7, columna 2). Por ejemplo si r es 3, hay dos puntos fijos, 0 y 2/3, y las derivadas en esos puntos son respectivamente f'(0)=2 y f'(2/3)=4/3, mayores a 1, lo cual indica que son inestables.

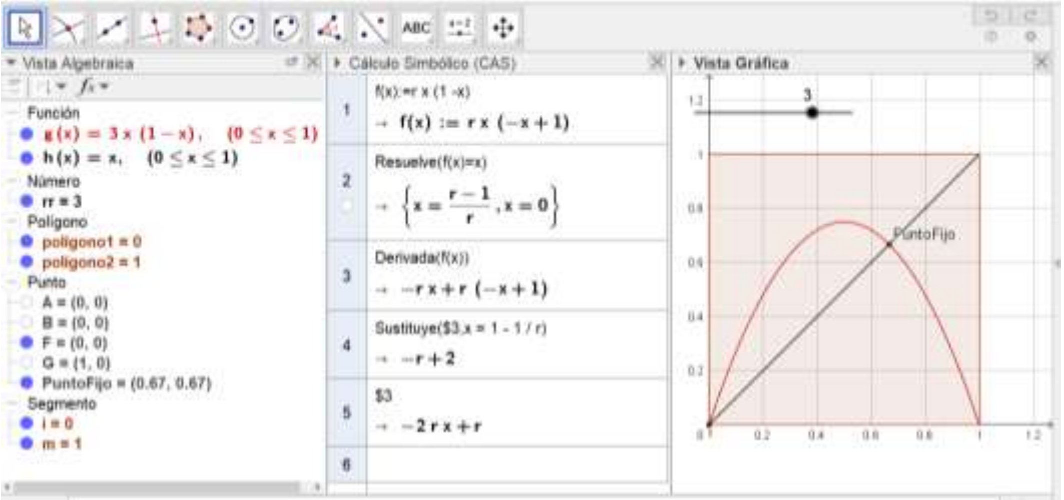

Figura 7. Obtención del punto fijo del mapa logístico.

En resumen, se obtiene lo siguiente.

- Si $0 \leq r < 1$ hay un único punto fijo, $x^*=0$, que del análisis de la derivada $f'(0)= r$, resulta ser estable. Para cualquier condición inicial y para cualquier valor de r en ese rango, la población se extingue.
- Si $r > 1$, hay dos puntos fijos, $x^*=0$ y $x^*=1-1/r$.
  - $1 < r < 3$, $x^*=0$ inestable y $x^*=1-1/r$ es estable. En este caso la población se estabiliza en el punto fijo $1-1/r$ independiente de la condición inicial.
  - $r > 3$, ambos puntos fijos son inestables. La población fluctúa, no se estabiliza.

Se puede además construir en GeoGebra la órbita y el Diagrama de Bifurcaciones, observando en este último el comportamiento del mapa según sea r (Figura 8).

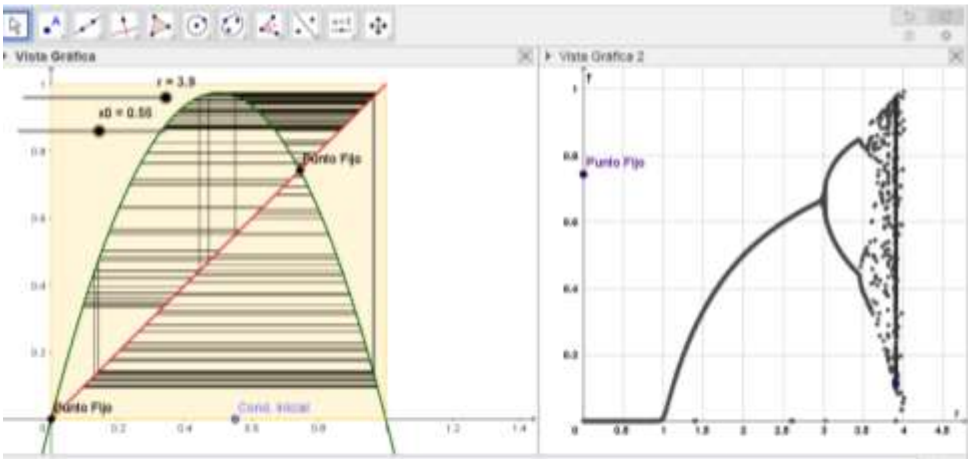

Figura 8. Diagrama de Bifurcaciones.

También es posible obtener en GeoGebra los puntos fijos de período 2, graficando la función f(f(x)), junto a la función x, y animando el deslizador r, observar para cuales valores del parámetro se obtiene intersección entre ellas (Figura 9). Esos valores obtenidos, pueden ser puntos que generen órbitas de período 2, en caso de estabilidad.

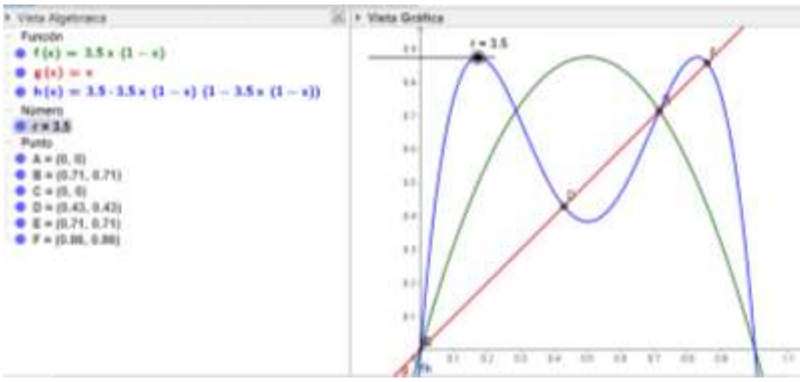

Figura 9. Posibles puntos de período 2.

Sean ahora dos órbitas con condiciones iniciales cercanas, una que inicia en x_0 y otra que inicia en $x_0+\delta_0$, con δ_0 muy pequeño. Para aproximar el Exponente de Lyapunov λ se considera la diferencia: $\delta_n=f^{\,n}(x_0+\delta_0) - f^{\,n}(x_0)$.

Aplicando logaritmos y algunas estimaciones se obtiene lo siguiente, con x_i son los valores obtenidos de la simulación y $f`(x_i)=r -2rx_i$: $\lambda \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln|f'(x_i)|$,

En GeoGebra, es muy sencillo obtener en la Hoja de Cálculo estas aproximaciones de λ para distintos *r* (usando el deslizador) y calculando la sumatoria antes indicada. Se encuentra que para valores de $r < 3.57$, el exponente de Lyapunov es negativo y en cambio para valores de r muy próximos a $r \approx 3.57$ se obtiene el primer valor positivo de λ. Es decir que para $r\approx3.57$ el mapa comienza un comportamiento caótico.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una propuesta educativa que tiene por objetivo el estudio de los sistemas caóticos que pueden ser explorados de un modo sencillo gracias al dinamismo de GeoGebra, su gratuidad y las distintas Vistas que permite observar los cambios de los objetos en forma simultánea. Se expusieron algunos conceptos básicos de la Teoría del Caos y los resultados del análisis del mapa logístico, sistema dinámico discreto que presenta los más variados comportamientos, entre ellos el caos. Además, lo expuesto en los resultados permite observar que para el estudio del mapa logístico sólo es requerido el conocimiento de algunos conceptos básicos del Cálculo Diferencial en una variable real y de sucesiones numéricas. Por lo tanto, se espera que el presente trabajo sea de utilidad a docentes interesados en difundir la enseñanza de los sistemas dinámicos complejos en cursos de grado y en la formación de profesores, ya que esta teoría aporta herramientas para modelar y comprender sistemas económicos, bilógicos, sociales y educativos, entre otros, y la forma en que es probable que estos respondan a cambios que se produzcan.

Referencias

Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). Chaos. New York, Estados Unidos, Springer.

Carrillo de Albornoz Torres, A (2012). El dinamismo de GeoGebra. Firma invitada. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29, 201-210.

Madrid Casado, C. M. (2015). La mariposa y el tornado: teoría del Caos y cambio climático. España, RBA Coleccionables.

Mindlin, G. B. (2008). Causas y azares: la historia de caos y de los sistemas complejos. Universidad Nacional de Quilmes.

Morante, A., & Vallejo, J. A. (2011). Software libre para el estudio de sistemas dinámicos. La Gaceta de la RSME, 14(1), 111-132.

Reigeluth, C. M. (2004). Chaos theory and the sciences of complexity: Foundations for transforming education. In annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Seoane, J. M., Zambrano, S., & San Juan, M. A. (2008). Teaching nonlinear dynamics and chaos for beginners. Latin-American Journal of Physics Education, 2(3), 10.

Wenzelburger, E. (1992). La matemática contemporánea y su papel en la enseñanza del nivel medio superior. Educación Matemática, 4(02), 55-60.