

# ENFOQUE FREQUENTISTA DE PROBABILIDADES - UM ESTUDO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho\*

Auriluci de Carvalho Figueiredo\*\*

cileda@pucsp.br, aurilucy@uol.com.br

PUC-SP, Brasil\*

UNIMES, Brasil\*

## Resumen

*O presente texto tem por objetivo discutir os tipos de apreensão mobilizados por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática quando observam um gráfico de linha para estimar a probabilidade de um evento a partir da estabilização das frequências relativas acumuladas desse evento. Tais frequências são obtidas a partir da simulação computacional do jogo Franc-carreau, construída com uso de um applet que tem como suporte o software GeoGebra. A pesquisa relatada está em andamento, utiliza o método experimental e a teoria no qual nos embasamos é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os resultados observados até o momento indicam que os alunos utilizam prioritariamente a apreensão perceptiva do gráfico para estimarem o valor procurado da probabilidade, sendo que esperávamos que utilizassem também a apreensão discursiva.*

**Palabras clave:** : probabilidade, enfoque frequentista, registros de representação, simulação.

## Introdução

Este texto discute aspectos da apreensão do gráfico que ilustra a estabilização da série constituída pelas frequências relativas acumuladas obtidas quando simulamos uma experiência aleatória muitas vezes, com o objetivo de estimar a probabilidade de um evento resultante dessa experiência.

Para atingir a esse objetivo utilizaremos uma metodologia de pesquisa quase experimental, nos termos de Fiorentini e Lorenzato (2009): é aquele em que a variável independente (estratégia desenvolvida pelo aluno) é manipulada pelo pesquisador, operando com grupos de sujeitos escolhidos sem o seu controle. (p. 105). Por meio dele buscaremos elementos que possam nos conduzir à resposta para a seguinte questão "em que medida a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva de um gráfico de linhas que represente a evolução dos valores obtidos por meio da simulação de uma experiência aleatória, favorece a construção de elementos do pensamento probabilístico?" Discutiremos as apreensões nos termos estudados por Vieira (2014), sendo os dados utilizados para a construção do gráfico obtidos por meio de simulação computacional do jogo do *Franc-carreau*, construída com o software GeoGebra, que apresentaremos adiante nesse texto.

O jogo a ser utilizado será o do *Franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas e Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707 – 1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada. A posição *Franc-Carreau*, ocorre quando a moeda se imobiliza completamente dentro de um único azulejo.

O papel do gráfico é fundamental uma vez que a série obtida pela simulação é empírica, ou seja, não possui expressão algébrica a partir da qual possamos determinar o valor do limite  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$ . A resolução do problema da estimação do valor dessa probabilidade passa seja pela observação dos valores numéricos da série de frequências, em uma planilha eletrônica, seja pela observação do gráfico de linha. Discutiremos primeiramente os obstáculos didáticos advindos da utilização da planilha eletrônica.

A simples observação da série obtida numericamente (não discutiremos a forma de obtenção desses valores) já se constitui em um obstáculo, que é a manipulação de número decimais: quantas casas decimais devem ser consideradas para que possamos decidir pela estabilização da série? Com as oscilações normais de uma série empírica, quando podemos considerar parar a simulação para estimar o valor da probabilidade procurada? Numericamente, tais oscilações tornam-se mais evidentes para um iniciante às estimações probabilísticas, que é o caso dos alunos do ensino médio.

Consideremos também a passagem da simulação em registro figural do jogo Franc-carreau, que é o contexto no qual estamos trabalhando, para o registro numérico em uma planilha eletrônica: os comandos na planilha devem ser transparentes para os alunos. Ainda que o professor os forneça, os alunos precisam compreender o que representa cada coluna ali resultante, de forma a saber que os valores resultantes da última coluna observada são os que devem ser considerados para a observação da estabilização das frequências relativas acumuladas e, conseqüentemente, a estimação da probabilidade procurada. Retornamos nesse ponto ao parágrafo anterior.

Coutinho (2001) indica em seus resultados a importância de se confrontar o valor obtido no cálculo a priori da probabilidade de um evento A, oriundo de uma experiência aleatória, com o valor estimado dessa probabilidade, estimação essa determinada pelo enfoque frequentista e, portanto, pela simulação (nesse nível de escolaridade – ensino médio). Buscamos, assim, discutir os aspectos didáticos da simulação, particularmente a utilização do gráfico para observação da estabilização das frequências relativas acumuladas. O simulador aqui utilizado é uma construção feita com o software GeoGebra e nossa discussão será feita à luz das apreensões figurais propostas por Duval (1994, 2003, 2012) e adaptadas para gráficos estatísticos por Vieira (2014).

### **Teoria dos Registros de Representação Semiótica**

Utilizaremos os Registros de Representação Semiótica (Duval, 1994, 2003, 2012) para analisar a articulação de seu uso na representação e manipulação dos objetos probabilísticos que são tratados por simulação computacional e sua representação gráfica. Embora Duval tenha proposto sua Teoria visando principalmente a Geometria e a Álgebra buscaremos, em nesse artigo estabelecer um paralelo para a representação gráfica dos conceitos probabilísticos.

Para Duval (2003), representações semióticas são produções constituídas pelo uso de símbolos pertencendo a um sistema de representação que tem condições próprias de significado e de funcionamento. Um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação, mas também o tratamento da informação e a objetivação. Defende que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar ao todo o momento de registro de representação” (Duval, 2003, p.14). Considera que um dos principais objetos do ensino da matemática é contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos alunos. Defende também que a atividade cognitiva requerida pela matemática envolve duas características fundamentais: a importância primordial das representações semióticas e pela grandeza de representações semióticas utilizadas em matemática como sistemas de numeração: figuras geométricas, escritas algébricas formas, representações gráficas e tabulares e em língua natural.

Assim como os objetivos matemáticos, os objetos probabilísticos que envolvem representações gráfica e figural não são facilmente acessíveis ou perceptíveis e o acesso a esses objetos devem passar pela mobilização de registros de representações semióticas.

A representação figural é considerada de grande importância para o estudo da matemática, pois diante de uma atividade matemática, a figura pode mostrar mais facilmente algumas possíveis idéias para sua resolução, sendo mais acessível ao aluno do que outro tipo de representação. Duval (1994, p.123) afirma que há várias maneiras de apreender uma figura em um contexto geométrico, destacando quatro tipos de diferentes apreensões: a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva, a apreensão sequencial e a apreensão operatória. Embora esse autor tenha desenvolvido estes estudos em um contexto de Geometria, acreditamos que a representação figural é muito importante na compreensão de conceitos probabilísticos que envolvem a probabilidade frequentista e a sua representação gráfica, e buscaremos compreender as diferentes apreensões no conteúdo de atividades que envolvem simultaneamente simulação computacional, um conjunto de dados obtidos por meio dessa simulação e sua representação gráfica.

### **Procedimentos metodológicos**

A metodologia quase experimental nos conduziu ao levantamento de algumas constatações diante de uma oficina aplicada a alunos da Licenciatura em Matemática. Tal oficina ocorreu durante a semana de Tecnologia que acontece nas Instituições de Ensino Superior (IES) no Brasil. Os sujeitos dessa pesquisa eram todos licenciandos de Matemática: cinco deles cursam o quarto semestre do curso e os outros quatro o segundo semestre. A oficina ocorreu em um laboratório de informática, no qual cada aluno usava um único computador, mas o comportamento era o de grupo colaborativo: trabalhavam em colaboração mútua durante o desenvolvimento da atividade.

A proposta dessa oficina era trabalhar no contexto da articulação entre dois enfoques: o Clássico e o Frequentista utilizando a simulação computacional com o jogo do Franc-carreau, no contexto da articulação entre dois enfoques.

## Reflexões teóricas sobre o *Franc Carreau* e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A apreensão perceptiva de uma figura permite identificar ou reconhecer imediatamente uma forma ou um objeto matemático (em geometria), Segundo Almouloud (2003, p.2017), apreensão perceptiva é a interpretação das formas da figura. Vieira (2014) estabelece como exemplo de apreensão perceptiva o reconhecimento de um triângulo e faz a hipótese de que no caso de gráficos estatísticos, a apreensão perceptiva é bem mais complexa uma vez que envolve não apenas a leitura dos eixos como também o reconhecimento das variáveis estatísticas em jogo. No nosso caso, por se tratar de um gráfico construído com valores de uma série de frequências com o objetivo de observar sua estabilização, ou melhor, o valor para o qual essa série converge, podemos entender que também se trata de um gráfico estatístico, embora estejamos no campo da probabilidade frequentista.

No que se refere à apreensão discursiva, são explicitadas propriedades da figura, além daquelas já indicadas na legenda ou nas hipóteses. No nosso caso, tratamos de propriedades de convergência em torno da reta  $y = k$ , seja essa explícita na figura ou não, conforme apresentaremos mais adiante no texto. Para Duval (1994), tais explicitações são de natureza epistemológica e visam a demonstração, ou seja, para nós, a demonstração da convergência, que se dará pela confrontação entre o valor da probabilidade calculada a priori com o valor estimado pela observação da convergência. Já Almouloud (2003) afirma que a apreensão discursiva é a interpretação dos elementos da figura, considerando a rede semântica das propriedades do objeto, o que também satisfaz à interpretação de um gráfico quando se quer observar a estabilização das frequências ali representadas.

Dessa forma, podemos fazer a hipótese que tanto a apreensão perceptiva quanto a discursiva têm papel importante na construção do conceito de probabilidade quando utilizamos o enfoque frequentista por meio da observação da estabilização das frequências relativas acumuladas, conforme Figura 1:

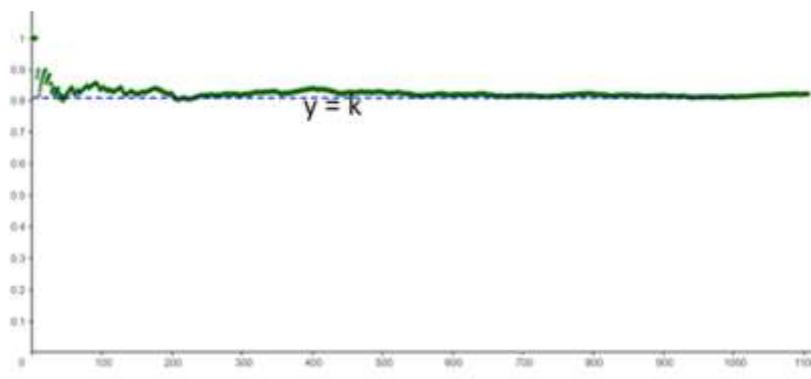


Figura 14. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta  $y = k$

Fonte: as autoras

### A simulação do jogo do *Franc-carreau*

O simulador apresentado fornece dois deslizadores que permitem escolher o número de quadrados por linha representando a pavimentação do piso azulejado sobre o qual se lançará a moeda, assim como escolher o raio do círculo que representa essa moeda. Na outra parte da tela encontra-se o sistema de eixos que apresentará o gráfico das frequências relativas conforme a simulação for ocorrendo, sempre com passo 1, ou seja, resultados tomados 1 a 1, ainda que se realizem 100 simulações simultâneas, o que garante a constituição de uma série de frequências  $\sum_{i=1}^{\infty} Fr_i$  e sabendo que  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n$ . O fato de que Fr conduz a uma série empírica não fornece uma expressão algébrica para a determinação do limite procurado, conduzindo à necessidade do recurso à simulação computacional para a estimação desse valor. Desse fato vem nossa discussão no presente texto.

Podemos obter uma figura (Figura 2) na qual o lado do quadrado maior ( $\ell=20$ ) e o raio do círculo ( $r = 1$ ), e com isso realizamos tanto a simulação quanto a determinação a priori do valor da probabilidade da posição Franc-carreau após o lançamento da moeda sobre o solo ladrilhado:  $P(FC) = \frac{(20-2.1)^2}{20^2}$ , ou seja,  $P(FC) = 0,81$ . Dessa forma, a série de frequências a ser obtida pela simulação deve se estabilizar em torno desse valor, e tal observação, como preconiza Coutinho (2001), é fundamental para a construção do conceito de probabilidade pelo aluno do ensino médio.

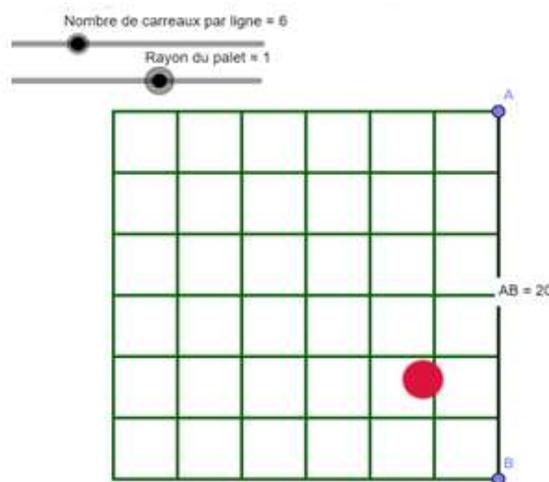


Figura 2. Ladrilhos e moeda para o jogo do Franc-carreau

Fonte: as autoras

Vamos agora à simulação para que possamos estudar as apreensões possíveis do gráfico obtido e assim compreender seus efeitos na construção do pensamento probabilístico.



Figura 3. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta implícita  $y = k$

Fonte: as autoras

Observemos que chegamos a 507 repetições da experiência aleatória nas mesmas condições (condições para reprodução de uma experiência aleatória em uma simulação) e o gráfico não parece mostrar uma estabilização em torno de um determinado valor como se espera se o analisamos a partir de uma apreensão perceptiva.

Continuemos com as simulações. Após 1100 simulações a apreensão perceptiva já permite uma estimativa a partir da observação de que a linha que representa os resultados parece bastante concentrada ao redor de um número, conforme a figura 4.

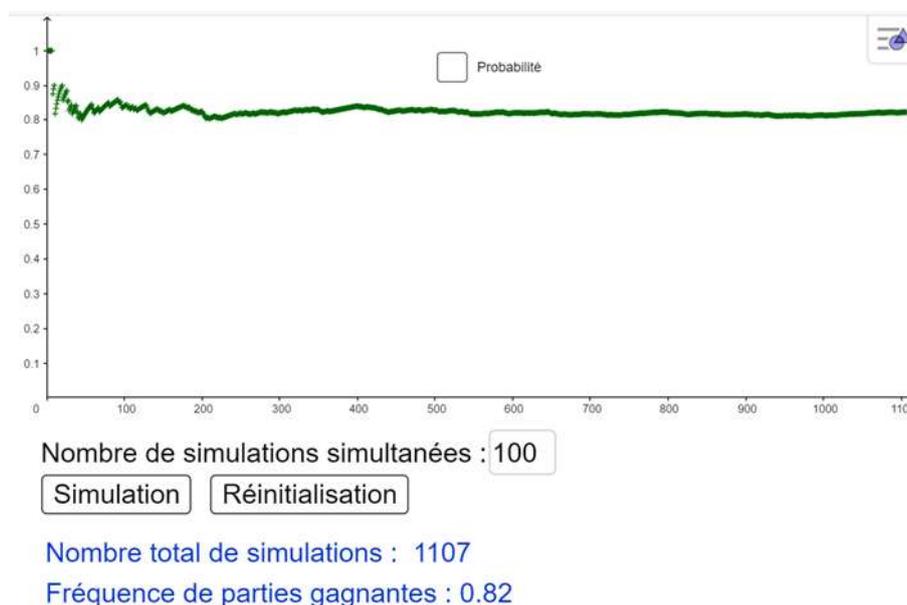


Figura 4. Gráfico com a convergência dos pontos para a reta implícita  $y = k$

Fonte: as autoras

Tal número pode ser comparado com o traço obtido na simulação simplesmente clicando no botão "probabilité", que nos fornece o valor do cálculo a priori da probabilidade da posição *Franc-carreau* e o representa no gráfico por uma reta pontilhada paralela ao eixo Ox, tal como na figura 1, na qual  $k = 0,81$ .

## **Reflexões sobre o jogo do *Franc-Carreau* na perspectiva dos alunos**

Todos os alunos da oficina não conheciam o jogo do *Franc-carreau*, mas logo se familiarizaram, e construíram planilhas contendo os resultados da simulação realizada com o *applet* fornecido e construído com o software GeoGebra. A princípio trabalharam com simulações que se constituíam em 20 lançamentos consecutivos, computando as frequências acumuladas e as ocorrências do resultado *Franc-carreau*. Em seguida, fazem o mesmo com repetições de 50 lançamentos consecutivos.

Destacamos que a construção da série de frequências deveria ser computada com lançamentos unitários, e que a escolha do tamanho das séries foi uma escolha didática devido ao tempo cronológico da duração da oficina. Após totalizar 1000 repetições dos lançamentos, os alunos discutem entre eles sobre o que ocorria com as tabelas elaboradas com cada um deles, e se indagavam sobre quando deviam parar a simulação. Até então estes alunos supunham que deveriam chegar a algum número, mas parece que somente a tabela não respondia algo para eles.

Quando passaram para a etapa da construção do gráfico tomando como referência as frequências acumuladas e o respectivo número de posições *Franc-carreau*, estes alunos começaram a discutir também entre eles que existe uma tendência em torno de uma linha do tipo  $y = k$  e apontam sobre a proximidade da probabilidade procurada, que nos indica que a apreensão perceptiva no sentido de Duval (2003) favoreceu a estes alunos a compreensão do enfoque frequentista na convergência da probabilidade. Não observamos a presença de diálogos com elementos de apreensão discursiva.

## **Algumas considerações**

Destacamos que esta pesquisa ainda está em desenvolvimento e que devido a isto estes resultados são ainda parciais, e o nosso objetivo é continuar as investigações de modo a aprofundar e responder à questão enunciada no início desse texto: "em que medida a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva de um gráfico de linhas que represente a evolução dos valores obtidos por meio da simulação de uma experiência aleatória, favorece a construção de elementos do pensamento probabilístico?"

A atividade desenvolvida com nove alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em laboratório de informática e trabalho em grupo colaborativo, conduziu apenas à estratégias que mobilizaram a apreensão perceptiva do gráfico para a tomada de decisão pelo valor estimado da probabilidade procurada, qual seja, a da posição *Franc-carreau* da imobilização da moeda no piso ladrilhado. Foi realizada a interpretação da forma (gráfico de linha), leitura dos eixos (valor em torno do qual existe a convergência e número de simulações realizadas) e reconhecimento das variáveis, o que caracteriza esse tipo de apreensão.

Com suporte nas reflexões teóricas realizadas à luz da Teoria de Registros de Representação Semiótica, buscamos a compreensão de conceitos probabilísticos que envolvem o enfoque frequentista e a representação gráfica da série constituída pelas frequências relativas obtidas

por meio de simulações computacionais. Buscamos também compreender as diferentes apreensões no contexto de atividades que envolvem simultaneamente simulação computacional, um conjunto de dados obtidos por meio dessa simulação e sua representação gráfica, e aliamos a constatação da importância da apreensão por parte dos alunos quando estes começam a discutir que existe uma tendência em torno de uma reta do tipo  $y = k$ . Os alunos apontam para a convergência dos pontos para a probabilidade procurada, o que nos indica que a que a apreensão perceptiva no sentido de Duval (2003), o que favoreceu a sua compreensão.

Acreditamos que há necessidade de mais investigações sobre atividades que mobilizem simultaneamente, o enfoque frequentista de probabilidade, simulações e suas representações gráficas para que estabeleçam relações com as diferentes apreensões presentes na Teoria de Representação Semiótica. Particularmente, nossa pesquisa desenvolve atualmente atividades que permitam aos alunos mobilizar tanto a apreensão perceptiva como a discursiva na construção de estratégias para a resolução de problemas de estimação de probabilidades quando se usa o enfoque frequentista.

## Referencias

- Almouloud, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 3. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. p. 125-147.
- Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. Rouen: IREM de Rouen.
- Duval, Raymond. (1994) Les différents fonctionnements possibles d'une figure une démarche géométrique. *Reperés*, n.17.121-138.
- Duval, Raymond. (2003) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 7-10.
- Duval, Raymond. (2012) Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat*: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297. Retirado em 15 de outubro de 2019 de: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>.
- Florentini, Dario; Lorenzato, Sergio. (2009). Investigação e Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3ª edição. Revisada. Campinas. SP. Autores associados. ISBN: 978-85-7496-147-7
- Ventsel, H. (1962). Théorie des Probabilités (reimpressão em 1973). Moscou: Editora MIR.
- Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de Dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de Agosto de 2019 de <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11347/1/Marcia%20Vieira.pdf>