



## El lenguaje, modelos y representaciones utilizados por los maestros de 5° de primaria, en la enseñanza de la fracción

Marta Cecilia **Salazar** Aburto  
Universidad Central de Chile  
Chile

[martaceciliass@gmail.com](mailto:martaceciliass@gmail.com)

Sergio **Martinic** Valencia  
Pontificia Universidad Católica  
Chile

[smartini@uc.cl](mailto:smartini@uc.cl)

Alexander **Maz** Machado  
Universidad de Córdoba  
España

[malmamaa@uco.es](mailto:malmamaa@uco.es)

### Resumen

Presentamos un estudio sobre los recursos y representaciones que utilizan los profesores chilenos de 5° año de primaria cuando enseñan las fracciones. El objetivo del estudio es evidenciar cuales son los significados de fracciones que ponen de manifiesto cuando enseñan el contenido de fracción. La investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, descriptivo y exploratorio. Se analizaron videos de clases tomados durante los procesos de evaluación docente del profesorado. Para el análisis de los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de tablas descriptivas, definiendo en qué consiste cada una de ellas y que se observará en los videos. Dentro de los principales hallazgos se encontró que los profesores presentan como único constructo para enseñar las fracciones el parte-todo, ocultando el proceso de medida, y el todo medible, con este uso restringido, el estudiante no logra construir el número fraccionario.

*Palabras claves:* fracciones, profesores de primaria, matemáticas, modelos, representaciones, recursos, enseñanza en Chile.

### Introducción

La enseñanza-aprendizaje de la matemática ha sido una de las principales preocupaciones tanto de profesores, los que manifiestan un deseo generalizado de entender como aprenden sus estudiantes y como obtener mejores estrategias que ayuden a un mejor aprendizaje, como por los investigadores en Educación Matemática, que durante décadas han venido estudiando y reflexionando con el fin de identificar cómo la formación matemática puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual.

Diversos investigadores en educación matemática (Llinares y Sánchez, 2000; Pereda y Valdemoros, 2007), coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que presentan mayores dificultades tanto en la enseñanza como en los aprendizajes escolares son las fracciones, sobre todo en niveles básicos de educación. Así mismo, hay dificultades en el nivel conceptual y la destreza en el cálculo de las fracciones (Lesh, Post, y Behr, 1987).

Las fracciones son importantes en el currículo escolar obligatorio, su importancia radica fundamentalmente en la capacidad de desarrollar una gran diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Gairín y Sancho, 2002). Lo que ha generado una variedad de estudios con el fin de superar las dificultades que presentan los escolares en la comprensión del concepto.

Desde esta perspectiva y, reflexionando la importancia de las fracciones en el proceso de la enseñanza y del aprendizaje, resulta primordial que los docentes conozcan las fracciones dominando la diversidad de representaciones que tiene este concepto. Si el profesor conoce los diferentes modelos de interpretación de las fracciones, será capaz de lograr que los estudiantes comprendan el concepto de fracción, resolviendo situaciones en diferentes contextos (no todas pueden ser resueltas por una misma interpretación). Además, el conocimiento y aplicación de varias representaciones o modelos permitirá al estudiante desarrollar procesos mentales tales como: la comparación, análisis, síntesis y planteamientos de inferencia, procesos que son propios del razonamiento matemático, de este modo se puede señalar que el estudiante ha llegado a comprender el concepto de fracción (Ríos, 2007; Llinares y Sánchez, 2000).

Por otra parte, los profesores de primaria no tienen como una especialización en la enseñanza de las matemáticas, la formación de los profesores de Educación Primaria tiene una gran diferencia en la formación inicial docente de matemática de secundaria, en Chile. Los profesores de Educación Primaria no han recibido una formación específica ni en matemáticas ni para enseñar matemáticas, a diferencia de los profesores de matemática de secundaria.

Utilizar mal el lenguaje matemático, puede ser una barrera para el aprendizaje de los estudiantes, debido a los requerimientos y convenciones específicas necesarias para expresar los conceptos matemáticos. De esta forma, el profesor, es el primero que debe dominar el lenguaje matemático, a través de él podemos develar el dominio que tiene del concepto de fracción, si corresponde a parte-todo, medida, cociente, razón y operador. (Lee, 2010).

En esta investigación buscamos identificar los significados que establecen de manera evidente, los profesores chilenos de 5° año básico en la enseñanza de las fracciones, analizando el lenguaje, modelos y representaciones utilizadas en el aula.

### **Planteamiento de la investigación**

La importancia de esta investigación es que está centrada en el docente, resultando de interés y actualidad, debido a que las fracciones han sido investigadas en diversas perspectivas, pero escasamente en el dominio de los profesores chilenos, de enseñanza primaria sobre el

conocimiento de las fracciones. Esta investigación estudia el lenguaje utilizado, los modelos y representaciones de éstas que pueda aplicar en la enseñanza de este contenido, y el constructo(s) o concepto(s) de fracción que utiliza en la clase de primaria.

La pregunta interrogante que guio esta investigación es:

¿Qué tipo de lenguaje, modelos y representaciones utiliza el profesor en la clase de matemática durante la enseñanza de las fracciones?

### **Objetivos**

- Conocer qué tipo de lenguaje utiliza el profesor en la clase de fracciones.
- Identificar los modelos de fracciones que pone de manifiesto el profesor en la enseñanza de las fracciones.
- Analizar y describir las representaciones que utiliza los profesores chilenos, de 5° año básico en la enseñanza de un contenido de fracciones.

### **Marco de Referencia**

La dificultad de los escolares para comprender el concepto de fracción se puede atribuir a las formas “restringidas” con que se enfoca el concepto en la enseñanza básica, al respecto Llinares y Sánchez (2000) señalan que en los textos escolares, muchas veces no se presenta el tema con una visión pluralista. Escolano y Gairín (2005) también atribuyen gran parte de las dificultades de comprensión de las fracciones al proceso instructivo, coincidiendo en que la forma casi exclusiva de enseñar las fracciones en el proceso de enseñanza en el sistema español, se da bajo el modelo parte-todo, es más, mencionan que dicho modelo se utiliza al mismo tiempo para introducir el número decimal como “otra forma” de escribir las fracciones decimales.

Ríos (2007) observó, que en las aulas escolares venezolanas de enseñanza básica y secundaria, predomina la interpretación parte-todo, con representaciones gráficas tales como el círculo y el rectángulo. De este modo, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no considerando el caso discreto, sino que este es planteado como caso particular de la multiplicación de fracciones por un número natural.

Existen diferentes constructos del concepto de fracción, Behr (1993) considera los de parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Sin embargo, autores como Llinares y Sánchez (2000) incluye el concepto de medida en el de parte-todo, mientras que Kieren (1993) incluye el constructo de cociente y medida en parte-todo.

En esta investigación asumimos lo planteado por Berh (1993), parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Cada uno de estos constructos tiene sus propias representaciones y modelos, así como su propio lenguaje y actividades.

En el aula los profesores de matemáticas, utilizan generalmente datos e informaciones visuales en el aprendizaje de éstas. Son escasos los docentes que toman en consideración la teoría de las etapas de desarrollo del intelecto. La que en algunos casos puede utilizarla solo en forma intuitiva. Existen dos medios por los que, se proporciona información en la sala de clase, para potenciar la formación del conocimiento matemático, estos medios son la representación y los modelos. Las representaciones y los modelos están asociados entre sí.

Así tenemos que, Representación son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, a través de las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así

como sus características y propiedades más relevantes. Las notaciones simbólicas, pueden alcanzar gran complejidad, por lo general se basan en signos alfanuméricos estructurados (Castro y Castro, 1997), las gráficas se basan en combinaciones de figuras o iconos, también estructuradas. La noción de representación la vinculamos con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas, las representaciones forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos.

**Modelo:** La enseñanza y los aprendizajes del conocimiento matemático están ligados a la noción de modelo. No debemos olvidar que la mente humana permite que se piense mejor, que se analice y reflexione, es decir, que se comprenda mejor si se hace en torno a lo familiar, perceptible y manipulable. No debemos olvidar la teoría de Bruner teoría de las etapas de desarrollo del intelecto,

He aquí la importancia, sobre todo en los niveles educativos obligatorios, que la instrucción sobre conceptos matemáticos, se presente asociada a situaciones reconocible por el escolar (Gairín y Sancho, 2002).

**Lenguaje matemático:** El lenguaje aritmético se estructura con un sistema de notación particular, diferente del lenguaje ordinario. Los problemas matemáticos deben de obedecer a ciertas reglas, estas no son todas simples, en particular los numerales, las divisiones, las fracciones, la jerarquía de las operaciones y los paréntesis, etc. Requiere de mucho trabajo para llegar a realizar las operaciones que tienen símbolos con significados (Socas, 1999).

### **Metodología de la investigación**

**Tipo de investigación:** es de enfoque cualitativo. El tipo de investigación a realizar es descriptiva y exploratoria. Es descriptiva, por cuanto pretende describir una situación, ilustrar lo que es un fenómeno en cuanto a tal, en este caso, los modelos, representaciones y lenguaje utilizados por profesores en la enseñanza del concepto de fracción. Es exploratoria, por cuanto no hay estudios realizados anteriormente en la educación chilena, que se focalicen en el tema de mi investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

### **Criterios utilizados para la selección de la de la muestra**

Los sujetos con los que se llevó a cabo esta investigación son los profesores que participaron en el proceso de evaluación docente a nivel nacional. La población son los maestros de primaria sometidos a la evaluación del programa Docente más del año 2009, donde fueron evaluados un total de 4.421 docentes en segundo ciclo básico a nivel de todo Chile.

La muestra es intencional y por conveniencia, es intencional porque se eligieron los docentes que trabajaron el concepto de fracción, contenido de estudio de esta investigación y está constituida por un total de 17 docentes de 5° año de Educación General Básica pertenecientes a diversas regiones a lo largo de todo Chile, quienes en su proceso de evaluación debían impartir una clase la cual se grabó en vídeo.

### **Pautas de observación de videos**

Para analizar los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de etiquetas descriptivas, de este modo se podía organizar la información, las cuales se explican y definen en qué consiste cada una de ellas y que se observara en los videos. Estas etiquetas se presentan en una tabla en la que se registraran las observaciones y luego se pasaron a una base de datos. Cada video será sometido a la tabla. Una vez elaborada la base de datos se procedió a

realizar los análisis.

### **Criterios para análisis de los videos**

Como el objetivo de la investigación consiste en determinar cuál o cuáles son los modelos, representaciones y lenguaje que utilizan en la enseñanza de fracciones en la clase de 5° de primaria. A continuación se establecen y definen en qué consisten las etiquetas que estarán en el registro de observaciones de los videos.

#### **Estrategia que utiliza el profesor en la clase**

1.- Recursos utilizados (RU): Se señalará si el profesor utiliza o no utiliza materiales o recursos en la clase. Además se describirá como utiliza los recursos y, si los estudiantes tienen participación con éstos, o son pasivos, como también, tanto profesores como estudiantes en forma conjunta utilizan los recursos; indicando la acción realizada en cada uno de los casos. Esta diferencia se hace debido a que los materiales el profesor los puede utilizar como ayuda para la enseñanza, o bien como recurso para el aprendizaje.

2.- Lenguaje utilizado por el profesor y relacionado con las fracciones (L): Se registraran todas aquellas palabras que utiliza el profesor en forma verbal, aunque puede estar apoyado de material manipulable o visual. El lenguaje utilizado tiene importancia para relacionarlo con la representación de fracción que lleva a la clase el profesor al enseñar el concepto de fracción. Se entiende por acción a los movimientos que acompañan a la expresión verbal, sólo en los casos que se considere que la acción es relevante con el lenguaje utilizado se registraran las acciones, en caso contrario solo se considerará el lenguaje.

3.- Tipo de contexto que utiliza: puede ser discreto y/o continuo.

Contexto (CX)- Modelo (MO)

a) Continuos: es una magnitud medible, la superficie (también la longitud)

Modelos utilizados: por lo general se usan modelos de áreas, figuras geométricas, siendo las más utilizadas el círculo, el rectángulo y/o el cuadrado.

b) Discreto: una magnitud medible por la cardinalidad.

Modelos utilizados: por lo general se usan conjuntos de cosas, como puntos, círculos pequeños, destacando mediante recursos gráficos, algunas de esas figuras, ya sea pintando algunas de ellas.

Por cada docente analizado se utilizara una secuencia donde se señala el código del profesor y el número correlativo de la secuencia.

### **Algunos resultados**

A continuación podemos ver algunas tablas de análisis de Lenguaje, Modelos y recursos utilizados, con esto se muestra como se trabajó con el análisis de datos por cada profesor.

En la siguiente tabla podemos develar los recursos del profesor, que estos, no son para el aprendizaje, por el contrario son para la enseñanza, y en las actividades los estudiantes son pasivos. Se puede observar claramente el constructo parte-todo.

Tabla1

*Recursos utilizados por el profesor*

	<b>Actividad profesor</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>Escolares y docentes</b>
UN POWER POINT TARJETA S CON REPRES NTACIO NES	En el power point se ven ejemplos de fracciones en representaciones gráficas y simbólicas. Escribe en el pizarrón la definición: "fracciones: repartición en partes iguales". Además realiza representaciones gráficas con algunas partes destacadas y los estudiantes deben señalar la representación simbólica.	Los escolares deben recordar de memoria las características de las fracciones señaladas por la docente, para utilizarlas cada vez que sea necesario, clara muestra de la psicología conductista en el aprendizaje de las matemáticas.	Los estudiantes deben contestar preguntas de la profesora sobre la clasificación de las fracciones, las preguntas están hechas de tal forma que los estudiantes responden sin errores. Además, profesora ayuda a recordar las reglas.
SIMBÓLI CAS DE LAS FRACCIO NES	Pregunta por las "partes" de las fracciones, no muestra el entero medible, siempre está con figuras superpuestas. Les indica lo que deben mirar para clasificar en fracciones, iguales propias e impropias, no les da una explicación, los estudiantes deben recordar esta regla cada vez que sea necesaria.	Actividad en clase: deben realizar en unas fichas de fracciones cuales son las clasificaciones que les corresponden ,según las reglas que aprendieron de memoria	

En la tabla siguiente el docente usa recursos también para la enseñanza, si bien menciona la medida, pero en las actividades dadas el estudiante no conoce el entero medible, sino que se oculta, enseñándolo en forma errónea, relaciona el entero con números racionales con denominador 1, con esto el estudiante solo se confundirá y no será capaz de relacionar el concepto de fracción en aprendizajes posteriores.

Tabla 2

*Recursos utilizados por el profesor*

<b>Recursos utilizados</b>	<b>Actividad profesor</b>	<b>Estudiantes</b>	<b>Escolares y docentes</b>
PIZARRÓN Y PLUMÓN. DOS BOTELLA DE BEBIDA UNA DE UN LITRO Y DE MEDIO LITRO.	Escribe en el pizarrón diferentes sistemas de medidas, de masa, peso. Con las botellas de bebida una de un litro, representa el entero, luego señalan los medios. Pregunta a los estudiantes: ¿2 litros, es un número racional o un entero?. Confirma a los estudiantes que corresponde a un entero, gran error. Señala que las fracciones son difíciles porque se acostumbra a los enteros en la vida cotidiana, muestra la botella de 1/2 litro y dice que es una parte del entero. Muestra la botella de 1 litro señala que es el entero, pero no explica que el litro es una medida, y que no siempre el entero puede ser un número exacto como <i>1litro. 2litros</i> , también puede ser una fracción, producto de la medida del entero, con una medida arbitraria.	Guía de ejercicios con enunciados, las fracciones están con medidas de magnitud, pero los estudiantes no realizan mediciones con una medida arbitraria, para visualizar cuantas veces está contenida en el entero, entero medible. El entero ya tiene una capacidad de 1 litro, pero no explica que el litro es una medida, no siempre el entero puede ser un número exacto, también puede ser una fracción, producto de la medida del entero, con una medida arbitraria.	Muestra la fracción 2/5 y, pide que realicen la representación gráfica, dibujan 5 botellas y pintan dos de ellas.

En los recursos utilizados por el profesor, el total de los observados no utiliza recursos para el aprendizaje, sino que los recursos son para la enseñanza, los estudiantes deben realizar las actividades de acuerdo a las instrucciones dadas por el docente. Las actividades no presentan una situación problemática. Los estudiantes son pasivos, solo siguen las instrucciones dadas por los docentes, el aprendizaje es visual.

En la tabla 3 se observa el modelo utilizado por el docente es parte-todo, en un contexto continuo representado por una figura geométrica como cuadrados.

Tabla 3

*Modelos utilizados por el profesor*

<b>Tipo de contexto</b>	<b>Modelo utilizado</b>		<b>Interpretación</b>
<b>Continuo</b>	<b>Áreas</b>		<b>Parte-todo</b>
Ejemplo de la docente de dividir una hoja de block de dibujo en partes iguales, y pintar ciertas partes de un color y las demás de otro color.	Figuras cuadrado.	geométricas,	Hace una representación gráfica de la fracción, el todo no es señalado a los estudiantes como una superficie medible, sino con figuras superpuestas, "Iguales", con algunas de ellas destacadas (pintadas).

En la tabla 4 podemos ver un conjunto discreto está formado por estudiantes, el total de los estudiantes corresponde al entero, y las estudiantes con buzo corresponde a las partes consideradas del entero. El estudiante es pasivo en esta actividad.

Tabla 4

*Modelos utilizados por el profesor*

<b>Tipo de contexto</b>	<b>Modelo utilizado</b>	<b>Interpretación</b>
<b>Discreto</b>	<b>Conjuntos</b>	<b>Parte-todo</b>
Da ejemplo de la asistencia con buzo de las estudiantes señalado la mitad del todo.	Niñas de buzo y niñas con uniforme.	Es parte todo porque existe un total de partes (el total de estudiantes) y unas diferentes del todo (estudiantes con buzo).

Los contextos que utilizan los docentes observados, son continuos o discretos, jamás usó la medida de magnitudes para comparar las superficies que ocupaban cada una de las fracciones, sino que presentan el entero con figuras superpuestas, donde el estudiante debía tener una focalización visual, y comparar las partes pintadas, si ocupaban la misma superficie o era mayor o menor, debía realizar un doble recuento, partes destacadas y el total de las partes. En los contextos discretos el total de las partes representa el entero y, las partes diferenciadas representan las partes tomadas del entero. En los todos los casos se oculta el entero medible al estudiante, debe realizar doble conteo, con esto no construye el significado de numero fraccionario.

En la tabla siguiente se puede observar el lenguaje utilizado por el docente, lenguaje que no es matemático, sino que es un lenguaje cotidiano, dificultado que los estudiantes puedan relacionar conceptos posteriores, o relacionar conexiones y redes matemáticas que le serían fáciles de evocar

Tabla 5

Lenguaje utilizado por el profesor

lenguaje de la profesora	tipo de lenguaje	interpretación
Vamos a estudiar a las señoritas fracciones	La docente no usa un lenguaje matemático, sino por el contrario, personifica a las fracciones.	Mal uso del lenguaje, porque los estudiantes no deben tener barreras por la forma en que debe usarse el lenguaje al expresar los conceptos matemáticos, y el hecho que la docente mencione al concepto de los números fraccionarios con terminología que le da una personificación y, no un objeto de conocimiento matemático, impide que los escolares expresen sus ideas o dudas matemáticas en un lenguaje que les ayude a expresar las ideas y conceptos que forman su disciplina

### Resultados

De los trece profesores estudiados, se observó que todos no utilizaron lenguaje matemático, para referirse a las fracciones, en algunos casos solo se utilizaba al comienzo de la clase, pero se continuaba con el lenguaje ordinario.

El total de la muestra utilizó recursos para la enseñanza y no para el aprendizaje, esto es que, facilitaba la manera de enseñar el concepto de fracción a los profesores, pero no había recursos donde se observara que los estudiantes realizaran actividades, que evidenciara el proceso de aprendizaje de las fracciones, es decir, donde ellos pudieran construir el concepto de número fraccionario, por el contrario, solo realizaban un doble conteo de números naturales, el total de las partes y las partes consideradas del entero.

Tampoco se observó que algún profesor mostrara el entero, entero medible, todo lo contrario éste se oculta al estudiante, se muestra con figuras superpuestas.

Con relación al modelo que se enseña, el total de los profesores se refiere al parte-todo, esto se observa a través de las actividades y del lenguaje utilizado.

El contexto continuo representado por áreas de figuras geométricas, está presente en doce de los trece profesores, y el contexto discreto, representado por conjunto de elementos está presente, como único contexto, en un solo profesor.

El contexto continuo y discreto presentes en una misma clase, se observa en dos profesores. Luego, el contexto continuo presentado en forma exclusiva en la clase se visualiza en dos de los doce los profesores que utilizan el contexto continuo.

### Conclusiones



Analizando todas las clases observadas podemos señalar que en cuanto al lenguaje, el total de los profesores observados, no utiliza el lenguaje matemático, produciendo un obstáculo a los estudiantes para relacionar conceptos que pueden estar relacionados con las fracciones, impidiendo realizar conexiones y redes matemáticas y evocar el concepto a través del lenguaje matemático. Se observa a través del lenguaje que predomina el constructo parte-todo.

En los recursos utilizados con todo tipo de materiales, no existen grandes diferencias entre los profesores estudiados, por el contrario, hay una gran similitud entre los recursos y la forma en que son utilizados. Estos no son manipulativos, el estudiante es pasivo, debido que los recursos son más bien para facilitar al profesor las actividades para su enseñanza, pero no para el aprendizaje, lo emplean para explicar el algoritmo que deben aplicar para resolver las diferentes actividades, y también para explicar el concepto de fracción, todos sin excepción se refieren al concepto parte-todo, no hay casos donde se observen acciones de medir con alguna medida arbitraria, no se observa replicar una unidad de medida arbitraria, sino que mencionan, en algunos casos la medida de magnitud, como el kilo, etc., pero como mero dato.

Los modelos utilizados por los docentes, predomina el continuo con modelos de áreas, figuras geométricas, donde no se da importancia a la magnitud de las partes, los estudiantes deben aceptar que la división del entero es en partes iguales, pero no realizan medida de esas partes, es más dibujan las figuras geométricas en el pizarrón dividiendo el entero en partes que no son notoriamente iguales, sin embargo, el estudiante debe aceptar que son de igual medida. Con esto podemos señalar que el estudiante no construye el concepto de fracción, sino que deben realizar un doble conteo de números naturales, el total de las partes y las partes pintadas, para luego realizar la representación simbólica, además, deben realizar transferencias de la representación gráfica a la representación simbólica y, de la representación simbólica a la representación gráfica. Se da importancia a la cardinalidad por sobre la magnitud.

En consecuencia, podemos señalar que el total de los profesores observados se refieren al constructo parte-todo, pero no dominan éste concepto, por el contrario, queda en evidencia que ellos ocultan la parte entera a sus estudiantes, no transmiten que en realidad existe un proceso de medida, no se le hace explícito. Sino que se les muestra el entero con figuras superpuestas, donde debe contar que las que componen el total y las que sobresalen o están pintadas, que corresponden al número de partes consideradas.

Luego, los estudiantes no construyen el concepto de fracción, debido que en los profesores no se observa que tengan un dominio de los diversos constructos del concepto, es más el constructo parte-todo tampoco lo conocen, lo entregan en forma intuitiva y, que sea fácil para ellos enseñar, pero no para el aprendizaje de los estudiantes, las actividades están programadas para el éxito de éstos, pero no para la comprensión.

Con este estudio debemos poner una voz de alerta en la formación inicial docente de primaria, y considerar que los estudiantes, en este caso de 5° básico de primaria, resultan notoriamente perjudicados para desarrollar sus capacidades en matemática en cursos superiores, debido que el concepto de fracción está presente a través de todos los cursos del currículo.

### **Referencias**

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Berh, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg, *Rational Number. An Integration of Research*. Hilldale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Castro, E., & Castro, E. (1997). *Representaciones y modelización: conocimiento matemático y visualización*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Ecolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 17-35.
- Gairín, J. M., & Sancho J. (2002). *Números y Algoritmos*. Madrid: Ed. Síntesis.
- Hernández, R. F. C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Buenos Aires: McGraw-Hill.
- Kieren, T. (1980). "The Rational Number Construct-Its Elements and Mechanisms", *Recent Research on Number Learning*. Kieren, T. E. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ed. Morata.
- Llinares, S., & Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones*. Madrid, España.
- Perera, P., & Valdemoros, M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación XI, CINVESTAV*, 209-218.
- Ríos, Y. (2007). Una Ingeniería Didáctica Aplicada Sobre Fracciones. *Redalyc*, 120-157.
- Socas, M. (1999). *Números*. *Revista didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.