Hacia una metodología para el análisis y caracterización del conocimiento didáctico-matemático de los profesores: El caso de una actividad sobre patrones

Luis R. **Pino-Fan**
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos
Chile
luis.pino@ulagos.cl
Adriana **Assis** Ferreira
Departamento de Educación a Distância,
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Brasil
adriana.assis@ufvjm.edu.br

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene por objetivo ejemplificar el uso de algunas dimensiones y herramientas teórico-metodológicas propuestas por el *modelo del conocimiento didáctico-matemático* (CDM) para el análisis, caracterización y desarrollo de los conocimientos que deberían tener los profesores para desarrollarse eficazmente en su práctica. Con esta finalidad analizamos la actividad desarrollada por dos profesores de enseñanza media, a propósito de una actividad sobre patrones planteada en el marco del Programa de Magíster de Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile. Como resultado del análisis, se evidencia que los profesores pueden resolver los ítems relacionados con el conocimiento común del contenido, pero presentan ciertas dificultades cuando se enfrentan a ítems que buscan explorar otras dimensiones de su conocimiento, por ejemplo, sobre el conocimiento ampliado del contenido, sobre los recursos y medios, o sobre los estados afectivos de los estudiantes.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento del profesor, patrones, conocimiento didáctico-matemático.

Abstract

This work research aims to exemplify the use of some dimensions and theoreticalmethodological tools proposed by the *didactic-mathematical knowledge model* (DMK) for the analysis, characterization and development of knowledge that teachers should have to effectively develop their practice. With this purpose, we analyzed the activity performed by two high school teachers, related to an activity on patterns under the Masters Program in Mathematics Education at the University of Los Lagos, Chile. As a result of the analysis, it is evident that the teachers can solve the items related to the common content knowledge but they exhibit some difficulties when confronted with items that seek to explore other dimensions of their knowledge, for example, the extended content knowledge, the resources and means or the student's affective states.

Keywords: teacher education, teacher knowledge, patterns, didactic-mathematical knowledge.

Antecedentes

El estudio del conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas para desarrollar una gestión adecuada de los aprendizajes de sus estudiantes, es un tema que en recientes años ha tenido cada vez más interés. Evidencia de ello son los grupos de discusión sobre formación y conocimiento del profesor, que se abren en los congresos internacionales más importantes sobre Educación Matemática –PME, CERME, CIAEM, SEIEM, ICMI, entre otros–, y en las publicaciones de *handbooks* y de revistas especializadas como la *Journal of Mathematics Teacher Education*.

A propósito de los conocimientos del profesor de matemáticas, diversos son los modelos que han realizado aportes significativos en cuanto a su caracterización, mediante el planteamiento de categorías y subcategorías del mismo –e.g., Shulman (1986, 1987); el MKT de Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008); la teoría de la 'proficiencia' en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), la cuarteta del conocimiento de Rowland y colaboradores (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005)–. Estos trabajos científicos, en los cuales se desarrollan los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas, muestran una visión multifacética sobre la identificación de los conocimientos requeridos para la enseñanza. Investigaciones más recientes (por ejemplo, los trabajos presentados en los dos últimos PME y el último CERME), nos muestran que, tal como señalan Rowland y Ruthven (2011), no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas. Y es que a pesar de los avances importantes en cuanto a la caracterización del entramado complejo de conocimientos que deberían tener los profesores para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea efectiva, en general, como señala Godino (2009, p. 19), "los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan análisis más detallados de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores".

En este sentido, en Godino (2009) se comienza a proponer un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas, referido como "conocimientos didáctico-matemáticos" al considerar a la Didáctica de la Matemática como la disciplina que articula de manera sistémica los distintos aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las categorías propuestas estaban relacionadas con los tipos de herramientas de análisis elaboradas en el seno del marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS), asumiendo que el uso de cada herramienta pone en juego conocimientos didáctico-matemáticos. De ese modo el sistema formado por las distintas herramientas teóricas proporciona un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar. En diversos trabajos (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2014) el sistema de categorías antes mencionado, se ha ido refinando constituyendo así, el modelo del *conocimiento didáctico-matemático* (CDM) del profesor.

El modelo del *conocimiento didáctico-matemático* (CDM) propone tres grandes dimensiones para interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor (Pino-Fan, Godino y Font, 2014): 1) matemática; 2) Didáctica; y 3) meta didáctico-matemática. Cada una de estas dimensiones contempla sub-categorías del conocimiento, para las cuales, a su vez, se incluyen herramientas teórico-metodológicas que permiten operativizar los análisis del conocimiento respecto de cada sub-categoría.

El objetivo de este trabajo es, precisamente, ejemplificar el uso de dichas herramientas teórico-metodológicas, mediante el análisis de los conocimientos que evidencian dos profesores al resolver una actividad (de carácter didáctico-matemática) sobre patrones, la cual fue planteada en el marco de la asignatura 'Análisis Didácticos' que se imparte en el Programa de Magíster de Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos–Chile. Como resultado, se prevén las herramientas de análisis que propone el modelo CDM, como herramientas teórico-metodológicas que permiten realizar análisis pormenorizados de los conocimientos de los profesores, involucrados en cada una de las dimensiones y sub-categorías del conocimiento. Así, mismo, como resultado paralelo, se desvelan dificultades que presentan los profesores cuando se enfrentan a ítems que requieren para su resolución, conocimientos distintos al conocimiento común del contenido.

La actividad: análisis del conocimiento didáctico-matemático de los profesores

En el marco de la asignatura 'Análisis Didácticos' que se imparte en el cuarto semestre del Programa de Magíster en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, se planteó a los estudiantes, todos ellos profesores en activo con experiencia, la siguiente actividad:

"Una compañía fabrica barras de colores uniendo cubos en una fila. La compañía usa una máquina para etiquetar y poner pegatinas de caritas sonrientes en las barras. La máquina coloca exactamente una pegatina en cada cara, es decir, cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una pegatina. Por ejemplo, una barra de longitud 2 (dos cubos) necesitaría diez pegatinas (Figura 1)"

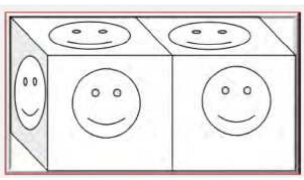


Figura 1. Barra de longitud dos con diez pegatinas.

Sobre la base de la situación anterior, se plantearon diez ítems, cada uno de los cuales estaba relacionado con las dimensiones y sub-categorías del conocimiento del profesor según el CDM. A continuación se presenta por dimensiones y por sub-categorías, tanto los ítems que integraron la actividad, como el análisis de las respuestas de los dos profesores que hemos seleccionado para este estudio.

Dimensión Matemática

La dimensión matemática del CDM, refiere a los conocimientos que permiten al profesor, resolver el problema o actividad matemática que se piensa implementar en el aula y vincularlo con objetos matemáticos que se encuentran más adelante en el currículum de matemáticas. Incluye dos subcategorías de conocimientos: *conocimiento común del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido.*

Conocimiento común del contenido. El *conocimiento común del contenido* es aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto, que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado (Pino-Fan y Godino, 2014). En este sentido, los dos primeros ítems de la actividad, buscan explorar este tipo de conocimiento:

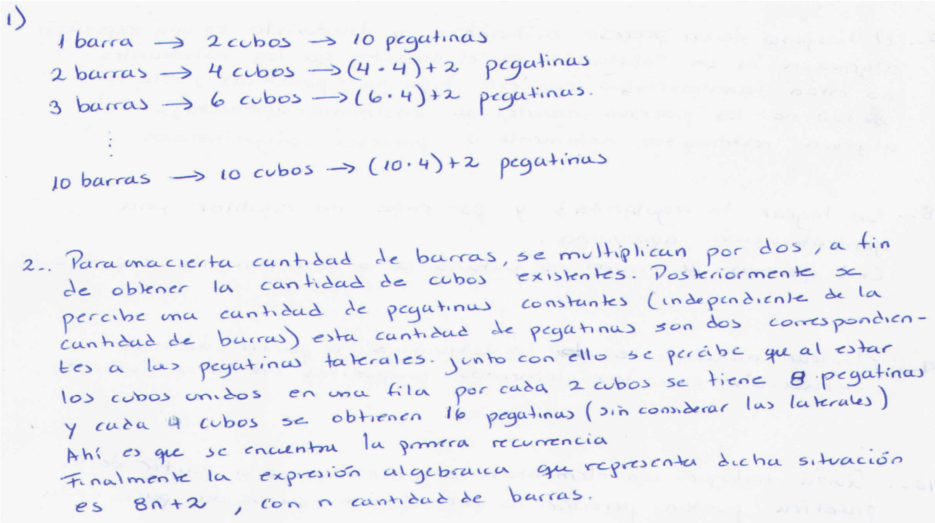
Ítem 1. ¿Cuántas pegatinas se necesitan para una barra de: a) longitud tres; b) longitud cuatro; c) longitud diez; y d) longitud veinte?

Ítem 2. Con base en tus respuestas a la pregunta anterior, determina cuál es la regla a seguir para calcular el número de pegatinas para una barra de cualquier longitud.

Primeramente, el ítem 1, pretende que por medio de casos particulares, los profesores vayan observando y describiendo el comportamiento del patrón. Así mismo, con este primer ítem se esperaba que, con el número mayor de cubos, los profesores se sintieran motivados para encontrar un patrón que determinase el número de pegatinas para barras de cualquier longitud. Se preveía la siguiente respuesta por parte de los profesores: a) para 3 cubos se necesitan 14 pegatinas; b) para 4 cubos se necesitan 18 pegatinas; c) para 10 cubos se necesitan 42 pegatinas; y d) para 20 cubos se necesitan 82 pegatinas.

En cuanto al ítem 2, se esperaba que los futuros profesores encontraran la relación existente entre la longitud de la barra y el número de pegatinas, y de esta forma encontraran una fórmula matemática que posibilitase el cálculo del número de pegatinas para una barra de cualquier longitud. Así, una posible solución que se esperaba por parte de los futuros profesores era la expresión $P(c) = 4c + 2$, donde P es el número de Pegatinas y c el número de cubos que conforman la longitud de la barra.

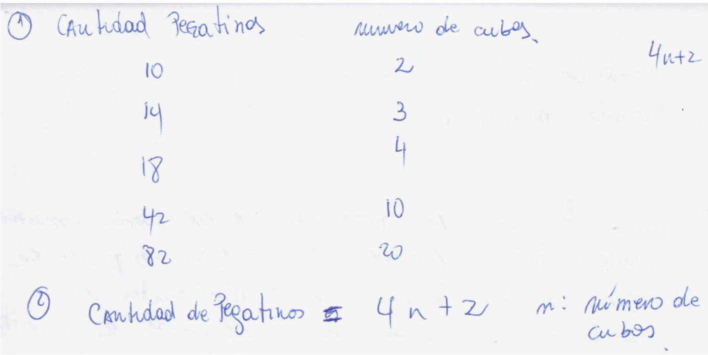
Las Figuras 2 y 3 muestran las soluciones de los profesores A y B, respectivamente, que a estos dos primeros ítems de la actividad.



1)
1 barra → 2 cubos → 10 pegatinas
2 barras → 4 cubos → (4·4)+2 pegatinas
3 barras → 6 cubos → (6·4)+2 pegatinas.
⋮
10 barras → 10 cubos → (10·4)+2 pegatinas

2.- Para una cierta cantidad de barras, se multiplican por dos, a fin de obtener la cantidad de cubos existentes. Posteriormente se percibe una cantidad de pegatinas constantes (independiente de la cantidad de barras) esta cantidad de pegatinas son dos correspondientes a las pegatinas laterales. Junto con ello se percibe que al estar los cubos unidos en una fila por cada 2 cubos se tiene 8 pegatinas y cada 4 cubos se obtienen 16 pegatinas (sin considerar las laterales) Ahí es que se encuentra la primera recurrencia Finalmente la expresión algebraica que representa dicha situación es 8n+2, con n cantidad de barras.

Figura 2. Respuestas del Profesor A a los ítems 1 y 2 de la actividad.



① 4n+2

Cantidad Pegatinas	número de cubos
10	2
14	3
18	4
42	10
82	20

② Cantidad de Pegatinas = 4n+2   n: número de cubos

Figura 3. Respuestas del Profesor B a los ítems 1 y 2 de la actividad.

Para analizar las respuestas de los dos profesores, utilizamos la noción de ***configuración ontosemiótica*** (Godino, Batanero y Font, 2007; Pino-Fan, Godino y Font, 2014), la cual nos permite identificar y describir, de manera pormenorizada, los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos), sus significados, y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas institucionales (*configuración epistémica*) o personales (*configuración cognitiva*). A continuación presentamos, de manera sintética, las *configuraciones cognitivas* movilizadas por ambos profesores en la solución de los ítems 1 y 2.

En la Figura 2, podemos observar que el profesor A utiliza *elementos lingüísticos* mayoritariamente verbales, para establecer relaciones; así mismo utiliza expresiones aritméticas y algebraicas [e.g., (4*4)+2; 8*n*+2], la *n* como variable, números naturales, los signos para referir a adiciones y multiplicaciones, signos de agrupación (e.g., paréntesis). Entre los *conceptos/definiciones* que utiliza, podemos destacar las de cantidad constante, expresión algebraica. En cuanto a las *proposiciones/propiedades,* para el ítem 1 se destacan las cuatro que establece a modo de relación entre las barras, los cubos y las pegatinas (e.g., 1 barra → 2 cubos → 10 pegatinas); mientras que para el ítem 2, el profesor A considera la proposición 1 barra son 2 cubos –tal vez "inspirada" por el dibujo de la tarea–. Por esta razón indica que el número de pegatinas para una barra de longitud cualquiera es 2 veces el número de barras (para indicar el número de cubos); también enuncia las proposiciones "por cada dos cubos se tienen 8 pegatinas" y "por cada 4 cubos se obtiene 16 pegatinas", de donde obtiene la proposición final que refiere a su respuesta al ítem 2 "la expresión algebraica que representa dicha situación es $8n+2$". En cuanto al *procedimiento* que utiliza el profesor A, se encuentra el reconocimiento de regularidades (ella lo llama "recurrencias"), mediante el cual, a pesar de su confusión entre longitudes-barras-cubos (ella toma la 'longitud' como el número de barras, y cada barra compuesta por dos cubos), logra un proceso de generalización mediante el cual obtiene una expresión simbólica con la que determina el enésimo término, que en su concepción refiere al 'número de barras'. En cuanto a los *argumentos* de sus procedimientos, y respuestas, mediante procesos de enunciación puntualiza dos: 1) para una cierta cantidad de barras, se multiplican por dos con el fin de obtener la cantidad de cubos existentes. Posteriormente son contempladas las dos pegatinas laterales que se perciben como constantes; y 2) al estar los cubos unidos en una fila, por cada 2 cubos se tiene 8 pegatinas, y cada 4 cubos se obtienen 16 pegatinas (sin considerar las laterales). Por recurrencia se obtiene la expresión $8n+2$.

En cuanto a la práctica desarrollada por el profesor B (Figura 3), fue posible identificar que los *elementos lingüísticos* que utiliza son en su mayoría elementos simbólicos –números naturales, expresión simbólica $4n+2$, donde n es el número de cubos–, los cuales presenta (mediante un proceso de enunciación y representación) en forma tabular, para el ítem 1. En sus respuestas a los ítems 1 y 2, no hace explícito el uso de determinados *conceptos/definiciones*, razón por la cual no las señalamos aquí pues sería conjeturar sobre la respuesta del profesor B. Sin embargo, los conceptos/definiciones los hace explícitos en su respuesta al ítem 4. En cuanto a las *propiedades/proposiciones* podemos señalar las que enuncia en forma tabular –relación que establece para casos particulares de *cantidad de pegatinas* y *número de cubos*–, y la generalización a la que llega cuando señala "*cantidad de pegatinas* = $4n+2$". Su *procedimiento* fue la identificación o reconocimiento del patrón o regularidad por inducción, aunque este *argumento* no fue explicitado por él.

Como podemos observar, el profesor B, logra dar respuestas matemáticamente satisfactorias para los ítems 1 y 2, por lo que se puede decir que este profesor posee un buen dominio del conocimiento común del contenido, para resolver problemas con las características del que planteamos aquí. No así el profesor A, quien tuvo dificultades para comprender el enunciado del problema y confundir longitud-barras-cubos, como lo mencionamos arriba. Sin embargo, fuera de esta confusión, el uso que hace de los objetos matemáticos que conforman la configuración cognitiva que moviliza, podría decirse que es adecuado.

Conocimiento ampliado del contenido. El *conocimiento ampliado del contenido* refiere a aquel conocimiento que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual, están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente. El conocimiento ampliado del contenido es el que provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula, vincular el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas y encaminar a los alumnos al estudio de las nociones matemáticas subsecuentes a la noción que es centro de estudio (Pino-Fan y Godino, 2014).

Dado que no hay un ítem directamente vinculado a este tipo de conocimiento, analizamos si en sus respuestas, los profesores realizan conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículum de matemáticas del nivel que señalaron en el ítem 6. Como resultado, obtuvimos que, mientras el profesor A (quien señaló el nivel séptimo básico para aplicar la actividad) vinculó la noción de patrones o regularidad a nociones del álgebra, el profesor B (quien señaló el nivel de primero medio para aplicar la actividad), vinculó la noción matemática patrones con la noción de función. En este sentido, aunque no podemos ser categóricos en cuanto a los conocimientos de los profesores referentes a esta sub-categoría del CDM, el profesor B tendría cierta dosis más de conocimiento ampliado, respecto del profesor A. Aun así, ambos presentan un nivel bajo de conocimiento ampliado del contenido.

Dimensión Didáctica

La *dimensión didáctica* del CDM incluye las siguientes subcategorías del conocimiento (Pino-Fan, Godino y Font, 2014; Pino-Fan y Godino, 2014): 1) conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); 2) conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); 3) conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); 4) conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional); 5) conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y 6) conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (faceta ecológica).

Faceta epistémica

Ítem 3. ¿Existe alguna otra manera de responder a los incisos anteriores de la tarea, además de tu solución? Si es así, escribe la solución. De lo contrario, justifica por qué no es posible.

Ítem 4. ¿Qué conocimientos (de tipo algebraico u otros) se ponen en juego al resolver este problema?

Ítem 5. ¿Cómo explicarías la solución de este problema a un estudiante que no ha podido resolverlo?

El profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver problemas en las que movilice su conocimiento común y ampliado, debe tener cierta dosis de conocimiento matemático ‘perfilado’ para la enseñanza; es decir, el profesor debe ser capaz de movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático –que integran el significado holístico para dicho objeto (Pino-Fan, Godino y Font, 2011)–, proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.

En cuanto a las respuestas que proporciona el profesor A, podemos señalar lo siguiente: 1) para el ítem 3 no indica otra solución –*“Por el momento no observo una manera más apropiada de propiciar el desarrollo de la actividad”*–; 2) para el ítem 4 se restringe a señalar un concepto/definición –*expresión algebraica*–, un procedimiento –*regularidades algebraicas*– y una sentencia ambigua y general –*comprender el álgebra como generalización de una situación problemática*–; y 3) para el ítem 4, propone una práctica diseñada con preguntas clave que funcionarían de ‘pistas’, para ayudar a los estudiantes a llegar y lograr la generalización. El profesor indica, indirectamente, la necesidad de permitir que los estudiantes construyan su propio conocimiento, puesto que indica que se les debe proporcionar ‘pistas’ que favorezcan el análisis de la situación. Ella lo señala de la siguiente manera "*Intentaría propiciar una práctica como la indicada en la pregunta 1, intentando que los educandos observen una regularidad en la construcción del proceso. Diseñaría preguntas claves que 'empisten' y favorezcan el análisis de la situación*". Lo anterior es evidencia de que el conocimiento que refiere a la faceta epistémica del CDM, debe ser mejorado y potenciado en el profesor A.

Respecto del Profesor B, para el ítem 3, vemos en la Figura 4 que nuevamente 'explica', utilizando elementos "icónicos" (las 'bolitas'), su solución a los ítems 1 y 2. Su 'nuevo' procedimiento lo explica de la siguiente forma: "*…como la diferencia entre cubos es de 4* [refiriéndose a las barras de longitudes distintas pero consecutivas] *pegatinas, por lo tanto multiplicamos 4 por el número de cubos más dos*".

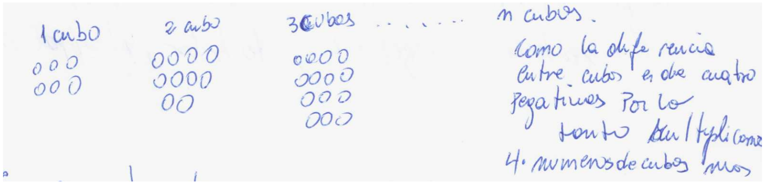


Figura 4. Respuesta del Profesor B al ítem 3.

Como podemos observar, el profesor B no proporciona un nuevo procedimiento, ni mucho menos encuentra una nueva expresión simbólica para determinar el número de pegatinas de una barra de cualquier longitud. En cuanto a su respuesta al ítem 4, este profesor se limita a señalar dos conceptos/definiciones –secuencias (patrones), funciones– y un procedimiento –análisis de variables (dependiente e independiente)–. Al igual que el Profesor A, el Profesor B indica, para el ítem 5, que procedería preguntando a los estudiantes el número de pegatinas para barras de longitudes concretas, luego trataría de vincular el pensamiento lógico (empírico) con el pensamiento algebraico, para encontrar la regla general. Señala también que realizaría una formalización preguntando qué pasa con el "cero" (cuando hay cero cubos). Todo lo anterior da cuenta de que el profesor B, al igual que el profesor A, demostraron bajo nivel de conocimientos relativos a la faceta epistémica del CDM.

Faceta ecológica. La *faceta ecológica* del CDM, refiere a los conocimientos sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el que se contempla el estudio del objeto matemático, sus relaciones con otros currículos, y las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos, que soportan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje. El ítem 6 de la actividad se relaciona con esta faceta:

Ítem 6. ¿En qué nivel educativo consideras que sería adecuado implementar este problema y por qué?

Como respuesta, el profesor A señala lo siguiente: "*Considero que un nivel apropiado sería séptimo básico, pues ya tienen nociones algebraicas, además se percibe en este nivel, estudiantes más comprometidos con su quehacer estudiantil, además los estudiantes ya presentan inquietudes cognitivas y realizan análisis más rigurosos de sus prácticas*". El profesor no considera que la actividad podría ser aplicada a estudiantes de cualquier edad. Ella considera que los estudiantes necesitan tener ya adquiridas nociones algebraicas, para poder dar una solución (posiblemente ella sólo contemple el concepto de variable). En este sentido, el profesor sugiere que este tipo de actividad puede posibilitar la construcción del concepto de variable.

Respecto del mismo ítem, el profesor B responde lo siguiente: "*Primero medio, ya que* *para introducir el concepto de función, es necesario empezar a relacionar variables*". Al igual que el profesor A, el profesor B no percibe la potencialidad de la actividad para desarrollar, por ejemplo, aspectos del razonamiento algebraico elemental (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012), por lo que la actividad podría plantearse a estudiantes entre los 10 y los 17, dependiendo de la noción matemática que se quiera abordar.

Por lo anterior, podemos decir que ambos profesores demostraron un escaso conocimiento referente a los aspectos ecológicos.

Faceta cognitiva

Ítem 7. ¿Cuáles son las principales dificultades que consideras podrían tener los estudiantes al resolver este problema?

Ítem 8. ¿Qué tipo de errores podrían cometer los estudiantes al resolver el problema?

La faceta cognitiva del CDM, proporciona a los profesores los conocimientos necesarios para "reflexionar y evaluar" la proximidad o grado de ajuste de los significados personales (conocimientos de los estudiantes) respecto de los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo). Para ello, el profesor debe ser capaz de prever (durante la etapa de planificación o diseño) y tratar (durante la etapa de implementación), a partir de las producciones de los estudiantes, o producciones esperadas, posibles respuestas a un problema determinado, concepciones erróneas, conflictos o errores que surjan a propósito de la solución, vínculos (matemáticamente correctos o no) entre el objeto matemático centro de estudio y otros objetos matemáticos requeridos para resolver el problema.

En relación a los dos ítems anteriores, el profesor A señala que la principal dificultad radica en el paso del proceso aritmético a la traducción a una expresión algebraica. Justifica dicha dificultad por la manera como inicialmente el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra está restringido casi siempre a procesos algorítmicos, creando un "obstáculo" para el aprendizaje de los estudiantes, ya que no están acostumbrados con dicha práctica. Para el ítem 8 señala que uno de los principales errores sería no identificar la regularidad y por ende no llegar a la generalización, y señala que las causas de esto sería precisamente por las dificultades señaladas en su respuesta al ítem 7 (el paso de la aritmética al álgebra). El profesor demuestra ciertos conocimientos sobre cómo comúnmente se inicia el estudio del álgebra, comentando sobre la forma de privilegiar los procesos algorítmicos en detrimento del aprendizaje con significado, en la enseñanza actual en su país.

El profesor B evidencia menos dominio del tema, al señalar de manera empírica, tanto para el ítem 7 como para el 8, que la principal dificultad y error será a la hora de generalizar, y explica: "*ya que no todos tienen la capacidad de fusionar la lógica con el trabajo algebraico*".

Faceta afectiva

Ítem 9. ¿Qué medidas implementarías en el aula para motivar a los estudiantes en la solución del problema?

La faceta afectiva del CDM, refiere a los conocimientos que son necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que los motivan o no a resolver un problema determinado. En general, se trata de conocimientos que ayudan a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes dentro de una clase concreta o con un problema matemático determinado, en un nivel educativo específico, teniendo en cuenta los aspectos que se vinculan con la faceta ecológica.

Respecto del ítem vinculado a esta faceta, el profesor A sugiere una discusión inicial de los elementos propuestos en la actividad (ítem 1). Inferimos, de sus respuestas a todos los ítems, que dicho profesor considera que gran parte de la dificultad (lo que implica baja motivación) se localiza en el proceso de interpretación del enunciado de la actividad (los alumnos no comprenden lo que se les pregunta), aspecto que por cierto, experimentó ella misma al no comprender lo que se pedía en el problema (ítems 1 y 2).

Por su parte, el profesor B señala como estrategias para motivar a los estudiantes la introducción de un material concreto: "planillas de Excel". Él lo explica así, *"…planillas de Excel, ya que permite modelar situaciones, y entrega fórmulas y gráficos asociados al problema*". El Profesor B, indica la utilización del ordenador, lo que nos lleva a inferir que él cree que su uso es de interés para los estudiantes y podría, por lo tanto, motivarlos.

Las facetas cognitiva y afectiva del CDM, juntas proporcionan una mejor aproximación y entendimiento de los conocimientos que deberían tener los profesores de matemáticas sobre las características y aspectos que están relacionados con la forma de pensar, conocer, actuar y sentirse, de los estudiantes dentro de la clase y a propósito de un problema matemático. En nuestro caso concreto, podemos observar que ambos profesores presentan un nivel bajo de conocimientos relativos esta sub-categoría del CDM.

Faceta interaccional. La *faceta interaccional del CDM* involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones, entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la fijación y negociación de significados (aprendizajes) de los estudiantes. Estas interacciones no sólo se establecen entre el profesor y los alumnos (profesor–alumno), sino también puede establecerse entre los alumnos (alumno–alumno), alumnos–recursos, y profesor–recursos–alumnos. El ítem 10 de la actividad requiere de conocimientos enmarcados dentro de esta faceta:

Ítem 10. ¿Qué estrategia, o estrategias, consideras pertinente/es para la implementación de esta actividad, considerando el nivel educativo que sugeriste en el ítem 6?

El profesor A sugiere el trabajo con elementos tangibles, para que a partir de la práctica los estudiantes puedan percibir la recurrencia que se da para cada situación. Podemos inferir que al indicar el uso de materiales concretos, el profesor piensa que para el nivel que sugiere los estudiantes tienen dificultad en lidiar con la abstracción, y por lo tanto, necesitan de materiales tangibles para una mejor comprensión.

Algo similar sugiere el profesor B, quien señala que como estrategia incorporaría un software que permita trabajar distintos tipos de representación –sugiere el tabular y el algebraico–. También señala que, previo a la introducción del software, y para que los alumnos puedan tener éxito cuando se enfrenten a problemas como el planteado, él "*comenzaría a trabajar con patrones numéricos, implementando diversos ejercicios donde se involucre el trabajo de secuencias e implementar una modelación a partir de trabajo manual*". Lo anterior nos habla de una estrategia en la cual, interpretamos que, a partir de la manipulación de materiales concretos daría a los estudiantes la oportunidad de identificar lo que él llama secuencias (patrones), a fin de llegar a la modelación matemática de la situación propuesta.

Las respuestas de los dos profesores (en todos los ítems) sugieren la indicación de un patrón de interacción en el que el estudiante se le da una cierta autonomía para construir su propio conocimiento. Esta opción de interacción indica un conocimiento (aunque puede ser tácito) de cómo nuestros sujetos piensan que los estudiantes aprenden.

Faceta mediacional. La *faceta mediacional del CDM* refiere a los conocimientos que debería tener un profesor para usar y evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje de un objeto matemático específico, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos de aprendizaje.

En lo que respecta a este punto, ambos profesores propusieron incluir, en una posible implementación de la actividad, materiales como la hoja de Excel y un software (profesor B), y materiales tangibles –cubos reales, quizá– (profesor A). Este tipo de elección revela un conocimiento de que el trabajo con los materiales concretos pueden facilitar (o dar más significado) el aprendizaje.

Reflexiones Finales

En este estudio ejemplificamos cómo el uso de algunas dimensiones y herramientas teórico-metodológicas propuestas por el *modelo del conocimiento didáctico-matemático* (CDM) pueden ser útiles para analizar los conocimientos de los profesores. Concretamente, en este documento hemos ejemplificado el uso de las *dimensiones matemática* y *didáctica* del CDM, así como el uso de la herramienta '*configuración ontosemiótica'* en su versión de *configuración cognitiva.*

A partir de respuestas, que en un principio parecían 'no tener nada que decir', y con la ayuda de las dimensiones y la herramienta señaladas, exploramos y describimos algunas características del conocimiento de dos profesores con "experiencia" en la enseñanza del tema aquí abordado. Dichas herramientas actúan como una "lente" que dirige la mirada posibilitando el que sean reveladas particularidades que de otra manera pasarían desapercibidas.

Cabe señalar que tanto las tres dimensiones propuestas por el CDM, como las herramientas de análisis, pueden ser contempladas dentro de cada una de las cuatro fases del diseño didáctico que se contemplan en el CDM: *estudio preliminar, diseño, implementación* y *evaluación* (Pino-Fan y Godino, 2014). De esta manera, tanto las preguntas planteadas en la actividad que presentamos, como las respuestas que dan los profesores de nuestro estudio, podría decirse que se corresponden al conocimiento didáctico-matemático que ellos deberían tener para el *estudio preliminar* y *diseño* (o planificación) de la actividad, que por supuesto, es previo a la implementación.

Como resultado del análisis, se evidencia que los profesores pueden resolver los ítems relacionados con el conocimiento común del contenido, pero presentan ciertas dificultades cuando se enfrentan a ítems que buscan explorar otras dimensiones de su conocimiento, por ejemplo, sobre el conocimiento ampliado del contenido, los recursos y medios o sobre los estados afectivos de los estudiantes. Esta discusión nos lleva a la formación de los profesores que a menudo privilegian las disciplinas teóricas a expensas de las disciplinas pedagógicas/metodológicas. Los resultados aquí obtenidos indican la necesidad de potenciar los antedichos tipos de conocimientos en la formación de profesores (inicial y continuada).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA*, *26*(42B), 483-511.

Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2014). *Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor.* Manuscrito enviado para su publicación. Disponible en: https://db.tt/VIiqGqR7

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, *8*(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (En prensa). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA*. Disponible en: http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/CDM_derivada_11%20junio%202014%20(2).pdf

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.