



Valoración de la idoneidad de las matemáticas enseñadas

Vicenç **Font** Moll

Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica, Universitat de Barcelona
Espanya

vfont@ub.edu

Marta **Adán** Gómez

Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica, Universitat de Barcelona
Espanya

marta.adan@hotmail.com

Susana **Ferreres** Valls

Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica, Universitat de Barcelona
Espanya

susanaferreres@ub.edu

Resumen

En esta comunicación se explica cómo se ha investigado el desarrollo de uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico del futuro profesor de matemáticas (identificación de potenciales mejoras, con relación a la calidad de las matemáticas enseñadas, de un proceso de instrucción en nuevas implementaciones) en el Máster de Profesor de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona. El principal resultado es que se observa una evolución de los criterios usados para valorar la calidad de las matemáticas enseñadas que van desde el “no cometer errores” al de “representatividad”.

Palabras clave: competencia, idoneidad, matemáticas, formación de profesores.

Marco teórico

En este apartado comentamos los elementos teóricos que se han tenido en cuenta en esta investigación.

Competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción

En la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz (Wilson, Cooney y Stinson, 2005; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008).

Entre las agendas de investigación que ponen el énfasis en las competencias que deben desarrollar los profesores para realizar procesos de instrucción de calidad hay que resaltar: 1) Las que consideran que el profesor debe desarrollar la competencia “mirar con sentido”; la cual le permite ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002), y 2) Las que se desarrollaron en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción, cada uno de ellos con sus respectivas herramientas:

- a) Análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción.
- b) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas.
- c) Análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción.
- d) Identificación del sistema de normas y metanormas que regulan el proceso de instrucción.
- e) Utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo.

Este tipo de análisis didáctico tiene por objetivo que el profesor tenga instrumentos para describir, explicar, valorar y mejorar dichos procesos (Font, Godino y Planas, 2010; Pochulu y Font, 2011).

Estas investigaciones coinciden (o al menos no contradicen) en que una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora.

El desarrollo y evaluación de la competencia en análisis didáctico implica analizar las prácticas profesionales de los futuros profesores de secundaria de matemáticas para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de niveles de desarrollo a dicha competencia. En este proceso el diseño de tareas tiene un papel muy relevante.

Diseño de tareas

Recientemente ha aumentado mucho el interés sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad. Este interés se manifestó en la creación, en el *The International Congress on Mathematics Education* del 2008, *del Topic Study Group, Research and development in task design and analysis*; y en la celebración de un *ICMI Study* específico sobre este tema en el año 2013, siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores.

Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los alumnos; éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. La investigación sobre el diseño de tareas se interesó por diferentes aspectos. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas;

Charalambus (2010) el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez, Font y Vanegas (2013) en el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Calidad matemática

Las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden sobre esta calidad y que, por tanto, se trata de una noción multidimensional. En este trabajo se han tenido en cuenta dos aproximaciones que si bien consideran la calidad matemática de una manera multidimensional ponen el acento, según nuestra opinión, en dimensiones diferentes. Por una parte, las que destacan como elemento central de la calidad matemática el descriptor “riqueza matemática” y, por otra parte, las que toman como elemento central el descriptor “representatividad de las matemáticas enseñadas”.

Un ejemplo relevante del primer tipo de aproximaciones son los trabajos de Hill y colaboradores. Según Hill et al (2008) se puede definir la calidad matemática de la instrucción como un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas y observaciones relacionadas. Estos autores han desarrollado un sistema de categorías para medir la calidad matemática de la instrucción (Hill, 2010). Estas son: a) Formato del segmento, b) El trabajo en las clases está conectado a las matemáticas, c) La riqueza de las matemáticas, d) Trabajo con los estudiantes, e) Errores e imprecisiones en el lenguaje, f) Participación de los estudiantes. A su vez para cada categoría se tienen subcategorías. Por ejemplo, para la riqueza de las matemáticas, se tiene: 1) Explicaciones matemáticas, 2) Múltiples procedimientos o métodos de resolución, 3) El desarrollo de generalizaciones matemáticas, 4) El lenguaje matemático, 5) Riqueza de las matemáticas en general.

Un ejemplo relevante del segundo tipo de aproximaciones es el EOS, principal referente teórico de esta investigación. Este enfoque propone herramientas para, primero, describir las matemáticas implicadas en un proceso de instrucción y, segundo, valorar su calidad. Para la descripción propone herramientas que permiten analizar las prácticas matemáticas y los objetos primarios y procesos matemáticos activados en ellas. Para valorar la calidad de las matemáticas se propone el constructo “criterios de idoneidad”, en especial el criterio de idoneidad epistémica:

1. Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”.
2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. Idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101)

Para cada una de las seis idoneidades hay un conjunto de indicadores. A continuación siguen los indicadores de la idoneidad epistémica: Muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); uso de

diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

La noción de idoneidad (calidad) epistémica propuesta por el EOS está muy centrada en la idea de representatividad de las matemáticas enseñadas con relación al significado holístico del objeto matemático que se quiere enseñar, entendido como el conjunto de pares (prácticas matemáticas, objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas). La determinación de dicho significado global u holístico requiere de la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión. Así mismo se deben tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dichas configuraciones de objetos primarios.

Objetivos y metodología

Partimos de las siguientes hipótesis (Font, 2011):

H1) La competencia profesional del futuro profesor que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias: a) La competencia matemática y b) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción.

H2) hay un núcleo de la competencia en análisis didáctico que entendemos como: Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Y podemos encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia y de cómo se relaciona con las otras competencias profesionales del futuro profesor de matemáticas de secundaria (competencia digital, competencia en modelización, etc.).

Nos planteamos los siguientes objetivos:

- 1) Diseñar e implementar ciclos formativos para el desarrollo de la competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción con relación a la valoración de la idoneidad didáctica, en especial la idoneidad de las matemáticas enseñadas.
- 2) Investigar cómo se desarrollan la competencia del objetivo anterior en la implementación del ciclo formativo. Dicho desarrollo, se constata en cuanto los futuros docentes incorporan y herramientas para la descripción, explicación y valoración de procesos de enseñanza.

La investigación es cualitativa. Estamos interesados primero en describir, sobre todo, el desarrollo de un aspecto parcial de la competencia en análisis didáctico de los futuros profesores (analizar y valorar la calidad matemática de procesos de instrucción). Las muestras han sido intencionales. El experimento de enseñanza se desarrolló con alumnos del máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de Universitat de Barcelona durante los cursos 2010-11, 2011-12, 2012-13 y 2013-14. El registro de la información fue la grabación en video de las clases impartidas, la documentación grabada en la plataforma MOODLE (presentaciones,

lecturas, tareas y respuestas de los alumnos a las tareas, cuestionarios y respuestas de los alumnos a los cuestionarios) y material impreso.

Se trata de una investigación que tiene además un componente de desarrollo ya que se pretende, por un lado, proporcionar conocimiento detallado sobre el estado actual de la formación de futuros profesores de secundaria y la identificación de los factores condicionantes de la misma, y, por otro lado, se pretende elaborar recursos didácticos específicos para mejorar la formación de estos profesores.

Experimentación de un ciclo formativo

El ciclo formativo tuvo por objetivo el desarrollo de la competencia en análisis didáctico. A continuación comentamos la secuencia que se siguió en tres asignaturas del máster para contribuir al desarrollo de dicha competencia. En la asignatura de *Innovación e investigación sobre su propia práctica* se siguió la siguiente secuencia:

a) *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propuso a los alumnos el análisis de un episodio de aula, que se debía realizar a partir de sus conocimientos previos sobre análisis didáctico. El proceso seguido fue el siguiente: 1) Análisis didáctico del episodio de clase en grupo. 2) Elaboración de conclusiones. 3) Presentación en el gran grupo de las conclusiones.

b) *Emergencia de los niveles de análisis didáctico* propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos, completada con la técnica de “otras voces”, permitió observar como el gran grupo contemplaba de alguna manera los cinco niveles de análisis que siguen, aunque cada grupo sólo contempló alguno de ellos: 1) Análisis de las prácticas matemáticas. 2) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados y emergentes de las prácticas matemáticas. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos. 4) Identificación del sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa). 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Se trata de los niveles de análisis propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011).

Los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta ¿Qué se debería hacer?

c) *Teoría (criterios de idoneidad)*. De los cinco niveles anteriores se focalizó la atención en el quinto, para ello se dieron elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explicó los criterios de idoneidad propuestos en el EOS.

d) *Análisis de episodios de clase videograbados utilizando los criterios de idoneidad*.

e) *Lectura y comentario de partes de algunos trabajos final de máster de cursos anteriores*, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los criterios de idoneidad para valorar la unidad didáctica que implementaron en el prácticum II

En las asignaturas *Prácticum II* y *Trabajo Final de Máster* los alumnos utilizaron los criterios de idoneidad para:

f) *Diseñar y valorar su propia práctica*, en concreto la unidad que han diseñado e implementado en el Prácticum II.

En la asignatura *Trabajo Final de Máster* los alumnos:

g) *Diseñaron una propuesta de mejora de la unidad didáctica implementada en el Prácticum II* que mejoraba algunos de los aspectos que la valoración realizada indicaba que se debían y podían mejorar. Esta propuesta debía estar justificada en literatura científica.

Nuestro objetivo era investigar durante el ciclo formativo, sobre todo, cómo aparecían y se conectaban en los futuros profesores criterios sobre la calidad matemática (idoneidad epistémica) del tipo: “falta de errores del profesor o libro de texto”, “coherencia”, “resolver correctamente las dudas de los alumnos”, “representatividad” “cumplir el currículum”, “riqueza matemática” etc.

Un ejemplo de cómo aparecen estos criterios en las producciones de los alumnos son los siguientes párrafos extraídos de la memoria del trabajo Final de Máster de dos alumnos en los que justifican la falta (o no) de la idoneidad epistémica de su unidad didáctica, implementada en su periodo de prácticas, en términos de falta (o no) de representatividad. El primer alumno reflexiona sobre la falta de representatividad de los significados parciales de pendiente que utilizó para enseñar las funciones de proporcionalidad directa y las afines. En cambio la segunda alumna justifica la representatividad de la colección de problemas que propuso a sus alumnos para estudiar la media aritmética.

Alumno 1: Con relación al segundo bloque (la función de primer grado), vistos los resultados del aprendizaje de los alumnos, posiblemente me he confiado al pensar que se trata de un tema que no presentaba grandes dificultades para los alumnos. Después de (1) reflexionar sobre las dificultades de los alumnos, (2) comentar el tema con los tutores y (3) realizar una mínima búsqueda bibliográfica, que me ha permitido conocer los diferentes sentidos de la pendiente, pienso que las actividades propuestas no daban cuenta de la complejidad del concepto pendiente.

Mi conclusión con relación al segundo bloque de contenidos es que la forma de introducir la pendiente se debe mejorar ya que no he tenido en cuenta los diferentes sentidos que tiene este concepto, o no los he trabajado con la suficiente profundidad.

(...) La nueva secuencia de tareas que propongo es igual a la anterior hasta la actividad 7bis. En las actividades 7 y 7bis se presenta un problema contextualizado de proporcionalidad directa en el que de manera implícita aparecen, sobre todo dos sentidos diferentes del concepto de pendiente (inclinación de la recta, número que multiplica a la x en la fórmula). El significado concreto que tiene la pendiente en estos dos problemas es el precio por hora de una moto acuática.

A continuación propongo una actividad experimental con el fin de ver un caso real de relación de proporcionalidad directa entre magnitudes (Actividad B1). Esta actividad pretende aumentar la motivación de los alumnos, aunque soy consciente que les será difícil encontrar la fórmula porque las longitudes no serán exactas (les ayudaré a encontrar la regularidad). Con esta actividad se trabaja, sobre todo un sentido del concepto de pendiente (número que multiplica a la x en la fórmula). El significado concreto que tiene la pendiente es el aumento de longitud del muelle por unidad de peso.

Hasta este momento los alumnos han trabajado sobre todo el sentido algébrico del pendiente de manera implícita (la pendiente como número que multiplica a la x). Las siguientes actividades tienen por objetivo profundizar en el sentido de la pendiente como el número que determina la inclinación de la recta e institucionalizar por primera vez el término pendiente. Se propone utilizar un applet que permite variar el valor de la pendiente y ver el efecto que dicho cambio produce en la inclinación de la recta. También permite profundizar en el significado algébrico de la pendiente ya que permite variar un punto de la recta y observar como la ordenada es igual al producto de la pendiente por la abscisa. También permite conectar los dos sentidos (algebraico y geométrico de la pendiente).

Alumno 2: (...) para tratar el concepto de media aritmética primero se presentó una situación contextualizada en la que se utilizaba este concepto para resolver el problema planteado. Se hizo mediante la proyección de un capítulo de la serie “Àlia” (<http://www.phobos.xtec.cat/creamat>). Luego para seguir trabajando este concepto matemático, se estudiaron cinco tipos de problemas:

P1. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

P2. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6'2, 6'0, 6'0, 6'3, 6'1, 6'23, 6'15, 6'2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

P3: Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Alumno	Altura saltada en cm.									
	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gia	Hilda	Ines	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

P4: La altura media de los alumnos de un colegio es 1'40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1'38, 1'42, 1'60, 1'40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

P5: Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

(...) Se trata de una muestra representativa de los tipos de problemas que se pueden solucionar con el concepto media aritmética

Resultados

Como resultado del estudio, hemos profundizado en lo que denominamos tareas profesionales para promover competencia de análisis didáctico. En particular, hemos constatado la potencialidad de analizar estudios de caso basados en estudiantes de los cursos anteriores, que pone de manifiesto la complejidad del análisis que debe realizar el profesor para valorar su propia práctica para ir más allá de narraciones y descripciones.

Con relación a la valoración de la calidad matemática, los futuros profesores inicialmente consideraban la idoneidad epistémica como “la falta de errores del profesor o libro de texto”. A continuación emergió el criterio “riqueza matemática”, entendido como el diseño e implementación de tareas que permitían activar procesos matemáticos relevantes. Después surgió el criterio “coherencia”, por ejemplo este criterio no se podía aplicar cuando se definía la mediatriz como la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y a continuación se explicaba un procedimiento de construcción en el que se utilizaba que la mediatriz era el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento. Por último fue apareciendo el criterio “representatividad”, en el sentido de que la secuencia didáctica debía ser, dentro de lo posible, representativa de la complejidad del objeto matemático que se quería explicar.

Consideración final

La mirada compleja sobre los objetos matemáticos, como la que realiza el EOS, lleva a pensar no en un objeto simple sino en un sistema complejo formado por partes o componentes.

La idea de representatividad, como criterio de calidad matemática de una secuencia de tareas, es una consecuencia de esta mirada compleja y de ella se derivan otros criterios que están relacionados con la articulación de los elementos en los que se descompone la complejidad, como son los de conexión y coherencia. En los principios y estándares del NCTM (2000) se propone como un proceso importante el proceso de conexión. Precisamente la noción de conexión – entendida más como la articulación entre diferentes partes de las matemáticas que como conexión de las matemáticas con la realidad extramatemática – se puede utilizar como puente entre los dos principales criterios de calidad matemática considerados en nuestra investigación (representatividad y riqueza de procesos matemáticos).

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del siguiente proyecto: EDU2012-32644, “Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas”, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias y bibliografía

- Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and tasks. *Journal of Teacher Education*, 60(1-2), 21-34.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Giménez, J.; Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process . En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 581-589). Oxford, UK: ICMI
- Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Hill, H. C. (2010). Mathematical Quality of Instruction (MQI) (Manuscrito no publicado). *Learning Mathematics for Teaching*. University of Michigan: Michigan
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The Council: Reston, Virginia.
- Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 14(3), 361-394.
- Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 217-237.
- Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 83-111.