Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente

David Alfonso **Páez**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
dpaez@cinvestav.mx
José **Guzmán** Hernández
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
jguzman@cinvestav.mx
José **Zambrano** Ayala
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
jzambrano@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se reportan las reflexiones de un profesor de matemáticas (grado 9) sobre los recursos usados en la comprensión y cálculo de la pendiente de rectas en el plano. Se trata de un estudio cualitativo, cuya recopilación de datos se efectuó en dos etapas: a) se video-grabaron las sesiones de clase en las que éste "enseñó" el concepto de pendiente –a sus alumnos– y se analizaron los datos recopilados tomando como marco conceptual la Aproximación documental; b) el investigador entrevistó al profesor con la finalidad de que reflexionara sobre sus recursos usados. Los resultados muestran que el profesor usó el recurso del cero como el valor de la pendiente de la recta paralela al eje de las abscisas para interpretar que ésta no tiene pendiente, dado que no hay ángulo de inclinación; pero, al reflexionar sobre éste se dio cuenta de que su justificación era incorrecta.

Palabras clave: recursos, pendiente, cero, reflexión, profesor, práctica docente.

Introducción y problema de investigación

De acuerdo con la literatura revisada, existen investigaciones en educación matemática acerca de la enseñanza del concepto de pendiente (e.g., Moore-Russo, Conner & Rugg, 2011;

Stump, 1999, 2001; Zaslavsky, Sela & Leron, 2002, entre otros), el cual se considera clave en la comprensión de otros conceptos relacionados con él (e.g., el de variación) y con implicaciones que van más allá de su uso algebraico; tal como indicador de la inclinación de una recta, respecto al eje de las abscisas, en un sistema de coordenadas cartesianas XY (Nagle, Moore-Russo, Viglietti & Martin, 2013). En la actualidad, se han desarrollado investigaciones centradas en analizar y caracterizar los conocimientos de los profesores acerca del concepto de pendiente. Al respecto, Stump (1999, 2001) y Moore-Russo et al. (2011) reportan 11 categorías relacionadas con representaciones y concepciones que tienen algunos profesores acerca de la pendiente de la recta trazada en el plano cartesiano; de las 11 categorías, Stump (1999) encuentra que los profesores suelen representarla como razón geométrica. En cambio, otros investigadores afirman que hay profesores con dificultades en la comprensión del concepto de pendiente y su cálculo, dadas ciertas rectas (e.g., Nagle et al., 2013; Stump, 2001; Walter & Gerson, 2007; entre otros). Por su parte, Zaslavsky et al. (2002) aseguran que algunos profesores manifiestan una falta de conocimiento acerca de la relación entre las representaciones algebraicas y geométricas de la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación. Mientras que para Stump (1999, 2001) y Walter y Gerson (2007), las dificultades de comprensión de este concepto matemático se deben a los diversos significados que los profesores asocian con la palabra pendiente (e.g., inclinación, declive, empinada, entre otras). Además, para Zaslavsky et al. (2002) tales dificultades pueden deberse a las inconsistencias que algunos libros de texto introducen respecto al estudio del concepto de pendiente.

Aunque la literatura revisada contribuye a esclarecer los diferentes tipos de dificultades de comprensión del concepto de pendiente, parece que aún falta mucho por hacer (Nagle et al., 2013; Stanton & Moore-Russo, 2012). Investigaciones recientes concuerdan en que se sabe poco de cómo los profesores abordan en aula de clases este concepto matemático (e.g., Stanton & Moore-Russo, 2012; Teuscher & Reys, 2010, entre otros). Al respecto, Stump (1999) asegura que: “los profesores […] necesitan oportunidades para examinar el concepto de pendiente, reflexionar sobre su definición [y] construir relaciones entre sus diversas representaciones” (p. 142). También, Adler, Ball, Krainer y Novotna (2005) sugieren que la reflexión de los profesores sobre su práctica docente puede propiciar el desarrollo de una “enseñanza de calidad” (p. 360). Interesados en la problemática antes descrita, en este artículo analizamos y reportamos la reflexión que un profesor de matemáticas de tercer grado de secundaria hace sobre los recursos usados en la comprensión y cálculo de la pendiente de rectas trazadas en el plano cartesiano; en particular, pretendemos responder la pregunta: ¿Qué justificaciones da el profesor, al reflexionar sobre sus recursos usados, para determinar que la recta paralela al eje de las abscisas tiene o no pendiente?

Marco conceptual

Como marco conceptual utilizamos la *Aproximación documental* (Gueudet & Trouche, 2009) y la *Reflexión-en-acción* (Gilbert, 1994).

Aproximación documental

Gueudet y Trouche (2009), inspirados en el trabajo de Adler (2000), proponen la Aproximación documental como una manera diferente de analizar la práctica docente del profesor de matemáticas; en particular, centran su atención en los recursos usados por éste ante una clase de situaciones (entendida como tarea o problema matemático). Para estos investigadores, los recursos son parte fundamental de la práctica docente del profesor porque con ellos se apoya para enseñar y facilitar el aprendizaje de las matemáticas, pero depende de cómo los use para que "permitan u obstaculicen el acceso al conocimiento matemático" (Adler, 2000, p. 214). Según la Aproximación documental, el profesor usa recursos físicos (e.g., el libro de texto, la calculadora, entre otros) y recursos no físicos (e.g., conceptos matemáticos y su simbolización), pero también llega a usar otro tipo de recursos no físicos (e.g., ya sea sus conocimientos –reflexión–, o bien, las discusiones académicas con sus colegas o estudiantes). Así, para Gueudet y Trouche, todo lo que es usado por el profesor es un recurso y no está aislado de otros, sino que pertenece a un conjunto de recursos disponibles para una clase de situaciones dada.

El profesor, de acuerdo con Gueudet y Trouche (2009), interacciona con sus recursos disponibles mediante un *trabajo documental*; además, moldea y define su trabajo en el aula. En esa interacción ocurre una *génesis documental*: proceso dinámico y dialéctico en el cual el profesor se apropia y transforma los recursos con los que interacciona en *documentos* [*instrumentalización*], y al mismo tiempo los recursos moldean e influyen la actividad y el conocimiento del profesor [*instrumentación*]. Para estos investigadores, la transformación de recurso a documento es gradual y continua, e intervienen *esquemas de utilización* construidos por el profesor durante su práctica docente. Los esquemas de utilización son conocimientos matemáticos o generales que guían y determinan la práctica docente del profesor; Gueudet y Trouche los definen como: "fuerzas impulsoras y resultados de la actividad del profesor" (2009, p. 205). Aunque podría interpretarse que un documento se reduce, por ejemplo, a una lista de ejercicios o problemas matemáticos que el profesor elaboró u obtuvo de algún lugar (e.g., libro de texto, páginas web, entre otros), no necesariamente es una entidad física; pues "está saturado con la experiencia del profesor" (p. 205). Así, para Gueudet y Trouche, un documento es un conjunto de recursos y esquemas de utilización de esos recursos.

Reflexión-en-acción

Investigadores como Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005) aseguran que el profesor al reflexionar sobre su práctica docente puede analizar y cuestionar sus conocimientos inmersos en esa práctica [en el uso de los recursos]. En particular, Gilbert (1994) asegura que el profesor efectúa una reflexión-en-acción, en la cual afecta el conocimiento implícito o explícito en las acciones que él pone en juego [práctica docente]. Para Gilbert, este tipo de reflexión se da cuando el profesor tiene un problema que le es conflictivo porque, en ese momento, no tiene el conocimiento adecuado para resolverlo. Por tanto, la reflexión-en-acción es un proceso de búsqueda de conocimiento para resolver ese problema conflictivo y, al mismo tiempo, mejorar la práctica docente (cursivas de los autores).

Metodología

La investigación aquí reportada es de corte cualitativo y la recopilación de los datos fue con seis profesores de matemáticas, de educación secundaria (grado 9), y se efectuó en dos etapas: observación no participativa (video-grabación de clases) y entrevista. En la primera etapa, video-grabamos las sesiones de clases en las cuales los profesores enseñaron el concepto de pendiente; además, analizamos los datos recopilados mediante una triangulación y tomando como referente el significado y características del concepto de recurso, dadas en la Aproximación documental (Gueudet &Trouche, 2009). El análisis estuvo centrado en identificar qué y cómo los recursos son usados por los profesores y cuáles son los esquemas de utilización inmersos en esos recursos; también nos permitió recuperar un extracto relevante de las video-grabaciones acerca de los recursos usados de cada profesor. En la segunda etapa, elaboramos un protocolo de entrevista para cada profesor con el objetivo de que, al ser entrevistado por el investigador (Inv-Ent), reflexionara sobre los recursos usados (Gilbert, 1994). De acuerdo con el extracto de las video-grabaciones de cada profesor, el protocolo de entrevista incluyó preguntas abiertas acerca del uso, justificación y argumento de los recursos usados. Después, cada profesor –junto con el investigador– observó ese extracto y fue entrevistado en torno al uso de sus recursos. Durante la entrevista, de acuerdo con las respuestas del profesor, el investigador le planteó otras preguntas ajenas a las del protocolo de entrevista.

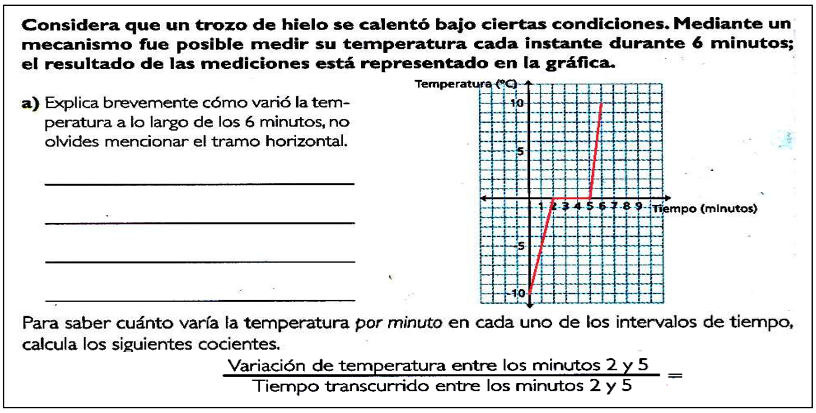
Uno de los profesores observado y entrevistado fue Carlos (pseudónimo). De acuerdo con el análisis de los datos recopilados, los seis profesores usaron recursos físicos y no físicos en la enseñanza y cálculo de la pendiente de la recta, pero Carlos –a diferencia de sus colegas– incluyó una recta paralela al eje de las abscisas. A continuación, exponemos el análisis y discusión de éste y otros recursos usados por él, y de sus reflexiones sobre los recursos usados.

Análisis de datos

Recursos de Carlos en la enseñanza y cálculo de la pendiente de la recta

En el aula de clases, Carlos dispone de un conjunto de recursos para enseñar y calcular la pendiente de la recta (Gueudet & Trouche, 2009). Tres de los recursos provienen de una Actividad del libro de texto (ver Figura 1), y con los cuales Carlos interacciona mediante su trabajo documental: un contexto acerca de la variación de la temperatura de hielo respecto al tiempo, una recta paralela al eje de las abscisas, y la expresión

$$\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}}.$$


Considera que un trozo de hielo se calentó bajo ciertas condiciones. Mediante un mecanismo fue posible medir su temperatura cada instante durante 6 minutos; el resultado de las mediciones está representado en la gráfica.

a) Explica brevemente cómo varió la temperatura a lo largo de los 6 minutos, no olvides mencionar el tramo horizontal.

Para saber cuánto varía la temperatura *por minuto* en cada uno de los intervalos de tiempo, calcula los siguientes cocientes.

$$\frac{\text{Variación de temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}} =$$

Figura 1. Parte de la Actividad del libro de texto (García & Mendoza, 2008, p. 51).

La gráfica de la Figura 1 está conformada por tres rectas, con pendiente diferente, y muestra la relación entre la temperatura del hielo –al aplicarle calor– y el tiempo transcurrido (seis minutos). Los autores del libro de texto introducen en la Actividad el término *variación* para referirse al cambio de temperatura respecto al tiempo (García & Mendoza, 2008), y sugieren para cada recta calcular esta variación [de temperatura]. Una de las rectas es paralela al eje de las abscisas (incluso coincide con este eje) y Carlos interpreta en ella que la temperatura es constante: "De dos a cinco minutos, ¿qué pasó con la temperatura? Se mantuvo constante, cero grados". Esta interpretación se debe al esquema de utilización de Carlos en torno a que la recta representa una función (*f*) entre las variables tiempo (*t*) y temperatura (*T*), $f : t \in [2,5] \rightarrow 0_T$, en la cual 0[°C] es la imagen de cada instante en el intervalo $[2,5]$ (e.g., les pregunta a los estudiantes: “En dos minutos [*Señala el 2 del eje de las abscisas*], la temperatura del hielo ¿cuál es?”, y ellos responden que es “cero”, esto lo hace Carlos para cada minuto en el intervalo, cuyo valor es un minuto.

Para calcular la variación de la temperatura por minuto, Carlos usa como recursos la expresión $\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}}$ (ver Figura 2) y la definición de cociente, los cuales están orientados por esquemas de acción instrumentada (Rabardel, 1995). Carlos cree que al comprender el uso de esa expresión, se tendrá un conocimiento de la razón de cambio (e.g., les menciona a sus estudiantes: “Un cociente es una división, es el resultado de una división. Si comprenden esta parte [*se refiere a calcular la variación por minuto*], van a comprender qué es una razón de cambio”.

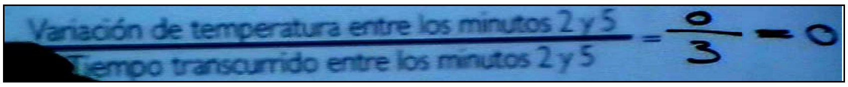


Figura 2. Variación de la temperatura del hielo por minuto.

La definición de cociente es un recurso usado por Carlos para darle significado en la recta al resultado de dividir la variación de la temperatura entre el tiempo transcurrido (3 minutos), y está orientado por esquemas de utilización acerca de la división como algoritmo: el cociente es resultado de dividir y comparar dos valores. Aunque usa este recuro, no le es útil cuando el cociente es cero porque no considera la unidad de medida (°C/min.) para interpretarlo como 0°C por minuto; por ejemplo:

Carlos: Cero dividido entre una constante es cero. ¿Eso [*cociente 0*] qué quiere decir? Que no varió nada. ¿Cómo podemos decir? En el intervalo de dos a cinco minutos la variación de la temperatura fue constante, no varió nada.

La variación de la temperatura respecto al tiempo es 0°C/min. ($\frac{|T_{final} - T_{inicial}|}{|t_{final} - t_{inicial}|}$), pero Carlos muestra confusión al interpretar el cociente obtenido. Al considerar la variación de la temperatura como una constante en el intervalo de tiempo $[2,5]$, interpreta que ésta no varía porque siempre toma el valor 0°C. De acuerdo con la recta, hay dos ceros involucrados con significado diferente. El primero se refiere al valor de T asociado con cada valor de t en el intervalo $[2,5]$, y el segundo es la razón de cambio de T respecto a t (0°C/min.). Sin embargo, Carlos los interpreta de igual manera (0°C) y, por ende, determina que no varía la temperatura. De igual forma, en términos Gueudet y Trouche (2009), hay una instrumentación del libro de texto hacia Carlos en torno a formalizar la razón de cambio como una característica de la recta llamada pendiente. Sin reflexión alguna, él determina que el cociente calculado es “una razón que indica la variación de la temperatura por minuto” llamada “razón de cambio de la temperatura”, y afirma que “la razón de cambio de una recta es su pendiente” (García & Mendoza, 2008, pp. 50-51). Así, la pendiente de la recta paralela al eje de abscisas es cero, pero Carlos interpreta este valor como ausencia de pendiente para esa recta. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Carlos: ¿[…] Y las rectas que están así [*se refiere a la recta paralela al eje de las abscisas*]? No hay pendiente, la pendiente es cero.

Aunque Carlos posee conocimiento matemático básico en torno a la pendiente de rectas trazadas en el plano cartesiano, no muestra coherencia entre su interpretación y la representación geométrica del cero como el valor de la pendiente, pues considera que la recta paralela al eje de abscisas no tiene pendiente dado el valor cero. Esta interpretación de Carlos, suponemos, se debe a su esquema de utilización acerca de la recta. Además, es importante destacar que el cero como valor de la pendiente tiene como característica, en su representación geométrica, que la recta sea paralela al eje de abscisas; la interpretación de Carlos al respecto es la ausencia de pendiente.

Reflexión de Carlos sobre los recursos usados

En la entrevista, Carlos reflexiona sobre sus recursos usados y da su argumento para justificar que la recta paralela al eje de abscisas carece de pendiente, dado el valor cero. Su argumento se refiere a la percepción visual del ángulo de inclinación de la recta. Carlos posee un conocimiento matemático respecto a la pendiente de la recta como la tangente de su ángulo de inclinación, cuya representación simbólica es $m = \tan\theta$ (ver Figura 3). Además, su conocimiento involucra una relación entre la pendiente y la razón de cambio, dados puntos de la recta, al considerar que esta última se expresa como la pendiente de la recta ("una razón de cambio […] se puede manifestar como pendiente"). Esta relación la justifica con el uso de la trigonometría, en la cual la $\tan\theta$ del triángulo rectángulo es la razón de cambio del lado vertical entre el lado horizontal, cuyos lados hacen referencia a la variación de las coordenadas de *x* respecto a las de *y*.

Figura 3. Representación geométrica y algebraica de la pendiente de una recta dada por Carlos.

Carlos tiene claro que, aunque el valor es el mismo, la razón de cambio y la pendiente tienen diferente interpretación en la recta; sin embargo, su discurso es impreciso al determinar que esta última se refiere al ángulo de inclinación de la recta, lo cual es incorrecto ("la pendiente sólo es el ángulo de inclinación y la razón de cambio es cómo va variando ésta [variable y] con el paso del tiempo [variable *x*]"). Es importante mencionar que Carlos no define la pendiente de la recta como el ángulo de inclinación de ésta, pues sabe cuál es su definición, $\tan\theta$; suponemos que se refiere, más bien, a determinar en la representación geométrica si la recta tiene pendiente al percibir visualmente el ángulo de inclinación, de manera que al no verlo deduce la ausencia de pendiente. Para ello, dos de las preguntas que el entrevistador le hizo estuvieron centradas en ubicar la pendiente en el ángulo de inclinación de la recta (ver Figura 3), y calcular la pendiente de la recta paralela al eje de las ordenadas, pues tiene ángulo de inclinación. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: Esta recta tiene una pendiente positiva [*(ver Figura 3)*], ¿yo la ubicaría aquí [*señala el ángulo de inclinación de esa recta*]?

Carlos: No. La pendiente es […] la tangente de un ángulo […]

Inv-Ent: La recta que tiene un ángulo de inclinación de 90°, ¿cuál sería su pendiente?

Carlos: [*Guarda silencio por unos segundos*]… Quizás aquí falta algo más, puedo encontrar que el ángulo de inclinación es de 90° […]. Debo encontrar la tangente de este ángulo para saber su pendiente.

El razonamiento de Carlos muestra una falta de dominio del concepto de pendiente en rectas paralelas a los ejes cartesianos. Su argumento es una idea de ver o no el ángulo de inclinación para determinar que la recta tiene pendiente, y no un argumento matemático aun cuando la define como la $\tan\theta$ (ver Figura 4). Este argumento es recurso que usa para justificar que la recta paralela al eje de las abscisas “no tiene pendiente” y está sustentado de manera visual. Suponemos que el razonamiento se debe a su esquema de utilización de la recta paralela al eje de las abscisas (Gueudet & Trouche, 2009). El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado:

Inv-Ent: ¿Qué pasa cuando la recta […] es paralela al eje de las abscisas?

Carlos: No hay pendiente, porque dijimos que la pendiente es el ángulo de inclinación. Y aquí no hay pendiente, o sea, no hay ángulo de inclinación.

Inv-Ent: Entonces, ¿si la recta no tiene ángulo de inclinación no tiene pendiente?

Carlos: Así es… [*Se muestra serio y pensativo mientras observa dos rectas perpendiculares trazadas en un solo plano cartesiano (ver Figura 4)*].

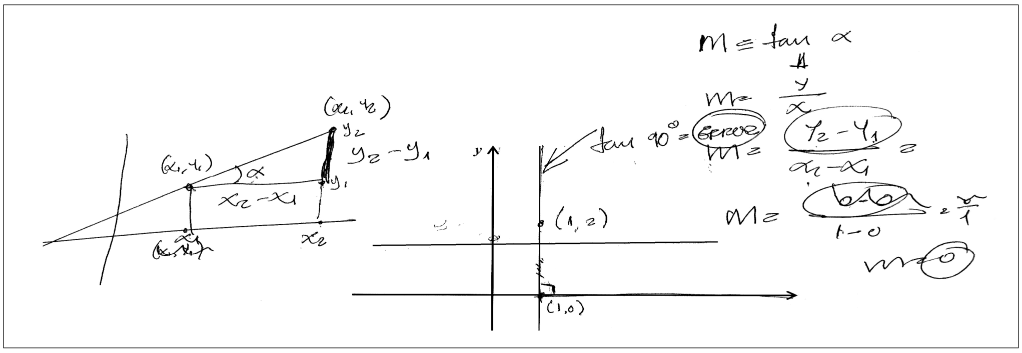


Figura 4. Relación entre pendiente y ángulo de inclinación de una recta vertical, dada por Carlos.

De acuerdo con este episodio, consideramos que la pregunta del investigador, en torno a inferir que no hay pendiente cuando “no hay ángulo de inclinación”, genera en Carlos un cierto conflicto, en términos de Gilbert (1994), y se evidencia cuando guarda silencio. Esta acción de guardar silencio corresponde a la búsqueda de conocimiento para resolver ese conflicto (Gilbert, 1994). La reflexión de Carlos sobre sus recursos se advierte al considerar si se puede calcular la tan90° y al asegurar que tiene “una confusión”. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: En la recta con un ángulo [de inclinación] de 90°, usted menciona que tiene pendiente cero.

Carlos: La tangente de 90° es… Tengo una confusión, parece ser que es al revés lo que estoy diciendo [*Se refiere a que la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente y la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente*]. ¿En qué momento es cero y en qué momento no hay pendiente? Aquí no hay ángulo [*señala la recta horizontal*]. […] Aquí [*señala la recta paralela al eje de las* *ordenadas*] no existe la tangente de 90° […]. Pero la recta horizontal no tiene ángulo de inclinación y no tiene pendiente.

Como puede observarse en el episodio, la reflexión de Carlos lo lleva a dudar sobre su afirmación y darse cuenta de que la recta paralela al eje de las abscisas, en efecto, tiene pendiente cero, pues en un primer momento se percata de que tan90° no está definida (Figura 4). Sin embargo, dado que la idea aún persiste en torno a ver o no el ángulo de inclinación de la recta, Carlos no está seguro de esta contradicción y continúa con su búsqueda de conocimiento; en particular, mediante su reflexión, busca darse cuenta de "en qué momento [la pendiente] es cero y en qué momento no hay pendiente". Para esta reflexión, dos preguntas fundamentales por parte del investigador fueron calcular la "pendiente" de la recta paralela al eje de las abscisas y darle significado a esa recta partir de su "pendiente". El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: ¿Qué significa que ésta [*la recta paralela al eje de las ordenadas*] tenga pendiente cero?

Carlos: [*Traza una recta en otro plano cartesiano y, dados* (x_1, y_1) y (x_2, y_2), *construyó un triángulo rectángulo (ver Figura 4)*] Estoy tratando de analizar o encontrar una relación del triángulo para analizar el ángulo….

Inv-Ent: Para la recta [*paralela al eje de las ordenadas*], ¿podría calcularme su pendiente, sabiendo que es cero?

Carlos: [*Ubica* $(1, 2)$ y $(1, 0)$ *en la recta y mediante la expresión* $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *intenta calcular su "pendiente", pero no tiene éxito (ver Figura 4)*]… Entonces, es cierto, […] aquí no hay pendiente porque no puedo obtener el otro punto para formar el triángulo, del eje de las ordenadas.

En esa búsqueda de conocimiento, observamos que Carlos corrobora su duda anterior al darse cuenta otra vez de que la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente y al intentar calcularla mediante la expresión de la razón de cambio y en ambiente de lápiz y papel. En particular, esta toma de conciencia se da cuando uno de los puntos de la recta no es equivalente a (x_2, y_2) para tener una razón de cambio, lo que para Carlos es "no poder obtener el otro punto para un triángulo rectángulo", y al tener $|x_1 - x_1| = 0$ como denominador en la expresión de la razón de cambio (ver Figura 4). Sin embargo, de acuerdo con el discurso de Carlos, este recurso no es útil para darse cuenta de si la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: Supongamos que usted les pide a sus estudiantes que calculen la pendiente de esta recta [*recta paralela al eje de las abscisas*], sabiendo que no la tiene. ¿Cómo la calcularían?

Carlos: La pendiente tiene que ver con el ángulo de inclinación, sino no tengo ángulo de inclinación no puedo encontrar las coordenadas de *x* y *y* o ese desplazamiento de ese *y*-sub-uno y *y*-sub-dos […]. Déjame checar algo [*en una calculadora registra tan90°*]. Ésta [*Se refiere a la recta paralela al eje de las ordenadas*] no tiene pendiente, y ésta [*Se refiere a la recta paralela al eje de las abscisas*] la pendiente es cero [*en la calculadora registra tang0*]. La

> tangente de 90 no está definida; en este caso, la tangente de cero es cero. Así es, la [*recta*] que es paralela al eje de las abscisas no hay ángulo de inclinación y sí hay pendiente.

Observamos en el discurso de Carlos falta de conocimiento respecto al uso de la razón de cambio para calcular la pendiente de la recta paralela al eje de abscisas, y se debe a la necesidad de representar de manera geométrica esa razón de cambio, dados puntos de la recta; de manera que vea el desplazamiento de x_1 a x_2, y de y_1 a y_2. Ante esta falta, el recurso físico de la calculadora fue fundamental en la reflexión de Carlos, pues le permitió darse cuenta y argumentar por qué, al no poder calcular tan90, la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero y reafirmar su razonamiento matemático en torno al concepto de pendiente en este tipo de rectas trazadas en el sistema de coordenadas cartesianas.

Conclusiones

De acuerdo con lo sucedido en el aula de clases y en la entrevista, estamos en condiciones de poder dar respuesta a la pregunta de investigación de este artículo. Podemos decir que Carlos, en términos de Gilbert (1994), al observar su clase video-grabada y al entrevistarlo, efectuó un proceso de reflexión sobre sus recursos usados en la enseñanza y el cálculo de la pendiente de rectas paralelas al eje de las abscisas (Gueudet &Trouche, 2009). Carlos argumentó y se mostró convencido de por qué ese tipo de rectas “no tiene pendiente”. En este proceso de reflexión, durante la entrevista, él usó otros recursos que le permitieron, en un primer momento, razonar de manera incorrecta y aseverar que la recta paralela al eje de las abscisas no tiene pendiente. Consideramos que su idea en torno a la ausencia del ángulo de inclinación respecto al eje de las abscisas y querer representar geométricamente la razón de cambio en la recta, dado dos puntos, no le permitieron darse cuenta de que la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero. Estos recursos están sustentados por percepciones visuales de Carlos: querer ver el ángulo de inclinación y considerar que no hay razón de cambio en la recta, ya que no se puede representar de manera geométrica.

Entre sus argumentos, en el proceso de reflexión, la razón de cambio fue un recurso matemático potencial para que Carlos se percatara de que, en efecto, la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente; sin embargo, este recurso impidió que identificara la pendiente de la recta paralela al eje de las abscisas. El uso de la calculadora fue un recurso importante en la reflexión de Carlos, pues al usarla fue consciente de qué recta tiene pendiente cero. En general, Carlos reflexionó (Gilbert, 1994) sobre sus recursos usados en clases al buscar argumentos válidos que justificaran el hecho de que la recta, en la representación geométrica, tuviera pendiente. Esta reflexión le permitió darse cuenta de que su razonamiento inicial sobre la pendiente de la recta horizontal al eje de las abscisas en un plano cartesiano era incorrecto. Podemos ver que aunque Carlos reflexiona sobre su práctica docente, continúa con su idea de no ver el ángulo de inclinación de la recta. En este sentido, Guzmán y Kieran (2013) describen esta situación como “vacíos matemáticos” del recurso, el proceso de toma de conciencia y superación de estas deficiencias (p. 185).

Referencias y bibliografía

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 205-224.

Adler, J., Ball, D. L., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 359-381.

García, S., & Mendoza, T. (2008). *Fractal 3.* México: SM.

Gilbert, J. (1994). The construction and reconstruction of the concept of the reflective practitioner in the discourses of teacher professional development. *International Journal of Science Education, 16*(5), 511-522.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Guzmán, J., & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1,2), 163-190.

Moore-Russo, D., Conner, A. M., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 3-21.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(6), 1491-1515.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand.

Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: a review of state standards. *School Science and Mathematics, 112*(5), 270-277.

Stump, S. L. (1999), Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal, 11*(2), 124-144.

Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behaviour, 20,* 207-227.

Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 65,* 203-233.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 119-140.