

LA TASA DE VARIACIÓN: UNA MIRADA DESDE EL ETM PERSONAL DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Marco Antonio Ticse Aucahuasi*

Jesús Victoria Flores Salazar*

Elizabeth Montoya Delgadillo**

marco.ticse@pucp.pe, jvflores@pucp.pe, elizabeth.montoya@pucv.cl

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile**

Resumen

El siguiente reporte presenta un avance de investigación, parte de la tesis en ejecución realizada en la maestría en Enseñanza de las Matemáticas del primer autor, y tiene por objetivo estudiar el trabajo matemático personal que realizan los estudiantes de secundaria (16-18 años) en una institución educativa al resolver tareas sobre la tasa de variación de una función real de variable real. Para la ejecución consideramos el marco teórico de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) pues permite caracterizar el valor epistémico y cognitivo en el trabajo matemático personal del estudiante. Mediante un estudio de caso se utilizará el GeoGebra como recurso tecnológico en situaciones didácticas para contribuir a la aproximación de noción de derivada en los estudiantes.

Palabras clave: ETM, tasa de variación, velocidad.

El Cálculo, la derivada y la tasa de variación

El cálculo diferencial, también conocido como Cálculo, es una rama fundamental en el estudio de las matemáticas, siendo requisito obligatorio e indispensable en la introducción a muchas áreas de las ciencias exactas e ingenierías, así como en las ciencias administrativas y económicas. Sin embargo, un alto índice de estudiantes tiene dificultades en comprender conceptos relacionados a esta rama de estudios; sea en los tópicos de Números reales, funciones, límites y continuidad, derivadas y aplicaciones. (Artigue, 1995; Dolores, 2000).

Así mismo, en el trabajo realizado por Vivier y Okaç (2016) se muestra una vasta recopilación de investigaciones sobre el aprendizaje de nociones del cálculo en distintas latitudes; estas dan muestra de las dificultades y obstáculos que enfrentan estudiantes en nociones basales del cálculo. Por otro lado, las conferencias International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 2018) dan muestra de la investigación y las dificultades que tienen los estudiantes en el dominio del Análisis en la universidad, pero así también, de nociones que se

estudian a nivel del liceo y que no son construidos por todos los estudiantes, tales como la construcción de los Números reales o la densidad que es confundida como una continuidad.

Por su parte, diferentes autores (Artigue, 1995; Azcárate, 2000; Dolores, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008), a partir de reflexiones científicas referenciadas en opiniones de expertos en el área de la matemática y didáctica de la misma, han podido evidenciar algunas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de conceptos relacionados al cálculo. Los autores señalan algunas dificultades como: la construcción parcial de un saber y la falta de concepciones previas, donde la primera obstaculiza el desempeño académico y la segunda ocasionan aspectos contradictorios. Adicionalmente, describen a la enseñanza tradicional (en particular la superior) como practicas algorítmicas y algebraicas donde cantidades significativas de estudiantes no logran comprender tales conceptos. En otras palabras, existen dificultades sobre una comprensión satisfactoria de concepciones atañidos al cálculo.

Para delimitar nuestra investigación, dirigiremos nuestro interés en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la *derivada*, pues en palabras de Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008, p. 269), "es necesario comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada". Con respecto a las dificultades asociadas a este objeto, Dolores (2000) indica algunos hechos causales como: la planificación y ejecución del proceso de enseñanza (relación escasa entre los programas de estudio y fenómenos de variación física); asimilación de conceptos básicos (preconcepciones y obstáculos epistemológicos); y la formación de concepto (uso de ideas geométricas, aproximaciones y procesos infinitesimales).

Frecuentemente, tales dificultades se presentan en estudiantes en los primeros cursos de nivel superior, pues la derivada es uno de los primeros temas contenidos en programas de estudios correspondiente a diversas carreras profesionales. También, algunas instituciones educacionales de nivel secundario, como parte de sus programas curriculares, introducen la derivada repitiéndose las mismas dificultades. Producto de ello, diferentes autores (Silva, 2012; Vrancken y Engler, 2013; Villa-Ochoa, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Villa-Ochoa, Gonzáles-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017; Paragua et al. 2018) realizaron investigaciones a dichos niveles con el objetivo de solventar las dificultades mencionadas en el párrafo anterior. Tales investigaciones se caracterizan principalmente por coincidir y señalar que la *tasa de variación*, considerada como razón de cambio y velocidad, es el medio idóneo hacia la comprensión de la derivada en un punto.

En ese sentido, Dolores (2000), Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008) y Vrancken y Engler (2013) y Vara y Salazar (2018) justifican la afirmación anterior al señalar a la razón de cambio como idea fundamental en el cálculo, pues el análisis de la variación en los fenómenos dinámicos condujo al estudio de la derivada. Se añade a esta justificación que conceptos como pendiente, velocidad y tasa de variación media son importantes en sí mismos y constituyen la estructura del cálculo frente a las habilidades en el manejo de símbolos y expresiones algebraicas. (Azcárate, 2000, p. 259)

Por otro lado, es importante enfatizar que existe una ausencia de libros de textos dirigidos al nivel secundario concernientes a la tasa de variación y derivada. Sin embargo, mediante una breve síntesis a tres textos en la literatura del cálculo (Leithold, 1998; Stewart, Redlin y Watson, 2008; Stewart, 2018) se observa que la noción de derivada es asociada al *problema de las tangentes*, como se puede ver en la figura 1. Los textos describen una breve imagen de tasa de variación en la introducción a la conceptualización de la derivada en un punto, sin embargo, no presentan tareas en las que el estudiante pueda construir la noción de derivada; por el contrario, la tasa de variación es presentada en aplicaciones matemáticas posterior a la definición formal de la derivada.

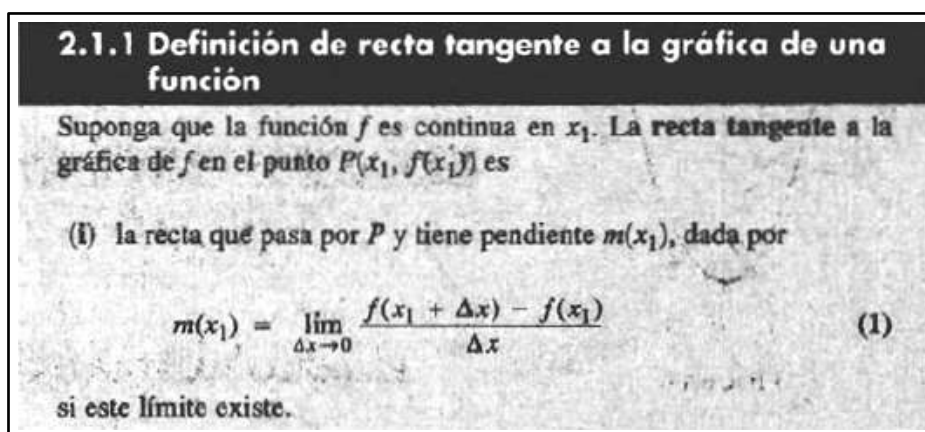


Figura 15. Definición de recta tangente a la gráfica de una función (Leithold, 1998; p. 102)

A partir de lo expuesto, planteamos como punto de partida que la tasa de variación no es lo que se privilegia al momento de enseñar la derivada, por lo que surge nuestra problemática en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada como tasa de variación en estudiantes (16-18 años) de nivel secundario. Por lo tanto, el objetivo de esta investigación es estudiar, en el tránsito hacia la construcción de la noción de derivada en un punto como tasa de variación, el trabajo matemático realizado por los estudiantes. Particularmente, nos desplazaremos entre la tasa de variación media e instantánea a través de secuencias de tareas mediadas de un recurso tecnológico. En consecuencia, declaramos necesario y relevante hacer este estudio pues nos permitirá conocer “el qué hacer” de los estudiantes de secundaria cuando realizan tareas que lo dirigen a construir la noción de derivada como tasa de variación.

Para llegar al objetivo planteado, nos encaminaremos hacia una aproximación teórica que nos permita caracterizar el trabajo matemático del estudiante. Así, utilizaremos como referente teórico el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), pues este marco permite caracterizar el valor epistémico y cognitivo del sujeto cuando se enfrenta a tareas, en este caso relacionadas a la tasa de variación.

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

Como ya habíamos anunciado, los análisis de la presente investigación se sustentan bajo la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM de aquí en adelante) formulada por Kuzniak en el año

2011, la cual fue desarrollada a partir de la generalización del espacio de trabajo geométrico iniciada por Houdement y Kuzniak en 1996 y 2006, respectivamente.

Esta teoría se subraya como una estructura organizada que permite observar y detallar las actividades de los individuos cuando se enfrentan a problemas matemáticos. Según, Gómez-Chacón et al. (2016, p. 5): "el espacio de trabajo matemático y su estudio deben permitir dar cuenta de cómo un determinado conjunto de tareas y actividades terminan por estructurar (o no) un trabajo matemático complejo y rico por parte de profesores y estudiantes". El ETM consiste en la articulación de dos planos: epistemológico y cognitivo, los cuales interactúan entre sí a través de un proceso de génesis. (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016).

El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM al situar los objetos y/o herramientas que permiten desenvolver el trabajo matemático y está conformado por tres polos: el representamen, el artefacto y el referencial. Por otra parte, el plano cognitivo permite estructurar y dar cuenta del espacio de trabajo del individuo a través de sus tres polos también llamados procesos: la visualización, la construcción y la prueba (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016). La articulación de dichos planos se da mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que no son independientes una de otras. y deben ser entendidas como una coordinación entre dos o más génesis que componen los llamados planos verticales. Estas composiciones planares varían según las génesis involucradas; en diferentes trabajos (Kuzniak y Richard, 2014; Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016), se describe: el plano semiótico-instrumental ([Sem-Ins]), que asocia a la génesis semiótica e instrumental, el plano instrumental-discursivo ([Ins-Dis]), que asocia a la génesis instrumental y discursiva y por último el plano semiótico-discursivo ([Sem-Dis]), que asocia las génesis semiótica y discursiva (ver figura 2).

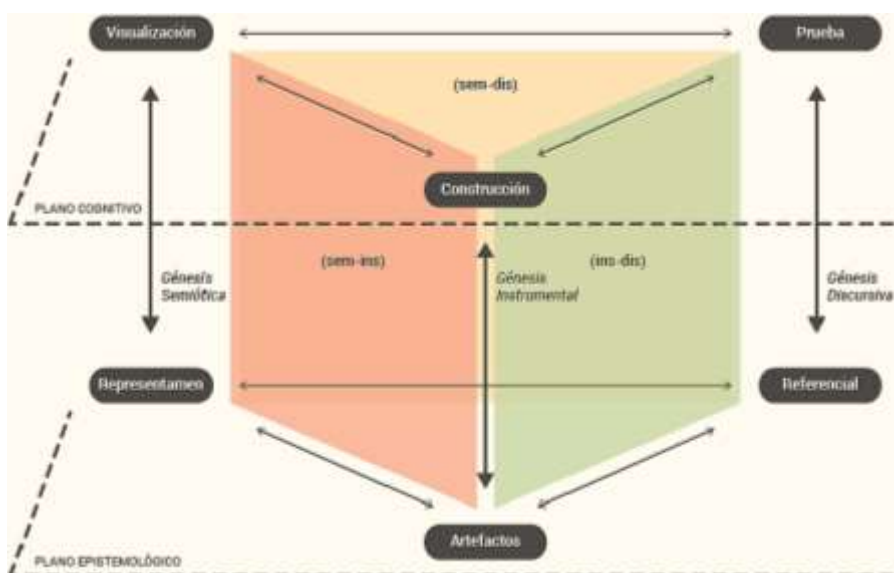


Figura 16. Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático

Otro aspecto que este modelo teórico considera es la noción de paradigma que en palabras de

Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier: "es el conjunto de creencias, técnicas y valores compartidos por un grupo científico" (2016, p. 5). Este término orienta, caracteriza y participa en la estructuración del ETM en un dominio específico. Particularmente, en el dominio del análisis se distinguen los siguientes paradigmas: análisis geométrico-aritmético (AG), que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real; análisis calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos; y el análisis real (AR) que es caracterizado por un trabajo a partir de nociones matemáticas con reglas que depende de la topología usada (Montoya-Delgadillo y Vivier; 2016).

Por otro lado, esta teoría caracteriza tres niveles de espacios de trabajo matemático: el ETM de referencia, que se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que se refiere al espacio definido en términos didácticos; y el ETM personal, que se refiere al trabajo efectivo de quien resuelve un problema matemático. Para nuestra investigación nos situaremos en el dominio del análisis y nos basaremos en el ETM personal del estudiante asociado al objeto matemático: tasa de variación de una función real de variable real. Puntualmente analizaremos las circulaciones emergentes intencionadas en el ETM entre los planos verticales, pues dicha circulación propicia el conocimiento. (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2012)

En virtud a nuestra problemática y el referencial teórico a utilizar, nos planteamos la siguiente pregunta que encamina esta investigación: ¿Cuál es el trabajo matemático personal que realizan los estudiantes de último año de secundaria al resolver tareas sobre la tasa de variación de una función real de variable real? Por consiguiente, para responder tal interrogante, nos propusimos: diseñar, aplicar y registrar una situación de aprendizaje a estudiantes de último año de secundaria en una institución educativa de nivel medio; e identificar y caracterizar la activación las génesis, la circulación entre planos verticales y paradigmas involucrados, que están en el trabajo matemático de los estudiantes de secundaria al resolver tareas que involucran tasa de variación.

Metodología

A partir de la pregunta que nordea esta investigación, se ha considerado una metodología de carácter cualitativo y se empleará el método de investigación estudio de caso. En términos de Yin (1989, p. 29, citado en Martínez, 2006, p 179) para desarrollar una investigación basada en tal estudio se propone un diseño que considera: la pregunta de investigación, las proposiciones teóricas, la unidad de análisis, la vinculación lógica de los datos a las proposiciones y los criterios para la interpretación de los datos.

En consecuencia, el caso será *La tasa de variación de una función real de variable real* pues a partir de exploraciones se pretende averiguar lo que sucede en el camino a la construcción de la noción de derivada cuando los estudiantes trabajaban con este objeto matemático.

Consideraciones del experimento

Diseñamos *una secuencia de tareas (divididas en dos partes) relacionadas a la tasa de variación de una función real de variable real*. La secuencia está dirigida a un grupo de cinco estudiantes entre los 16 y 18 años de una institución de educación secundaria; estos estudiantes tienen nociones previas de velocidad rectilínea uniforme y geometría analítica (rectas y pendientes). La secuencia está estructurada para ser implementada en dos sesiones de aula con una duración de sesenta minutos cada una, donde a cada estudiante se le entregará una ficha de trabajo, laptops y applets de GeoGebra. También, para la recolección de información, se utilizarán cámaras de video (GoPro) y el software aTube Catcher.

Análisis preliminar

En este apartado presentaremos el análisis a preliminar de la secuencia de tareas; hemos tomado aspectos de la teoría de espacios de trabajo matemático (ETM) y considerado los resultados y experiencias de diferentes autores (Silva, 2012; Ruiz, Córdoba y Rendón, 2014; Villa-Ochoa, González-Gómez y Carmona-Mesa, 2017; Viseu, 2017).

Secuencia de tareas - Parte N°1:

En la primera parte, la secuencia tuvo la intención de que el estudiante desarrolle intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación y la tasa de variación media (velocidad media), afirmando que la tasa de variación media en relación a un intervalo de tiempo corresponde a la pendiente de la recta secante correspondiente a tal intervalo. Esta parte tiene una duración 60 minutos y contiene 8 tareas (incluida la construcción de gráficos en el Applet de GeoGebra).

Las cuatro primeras tareas están destinadas a estudiar e interpretar la diferencia de valores en un intervalo como la variación de cantidades, calcular el valor de la velocidad en un intervalo y significar la velocidad media a partir de la velocidad en un intervalo. La quinta tarea está direccionada a graficar una curva, trazar rectas secantes en par de puntos fijos y determinar la pendiente a cada una de ellas. Las siguientes dos tareas encaminan al estudiante a relacionar la pendiente de la recta secante y la velocidad media en un intervalo de tiempo. La tarea final dirige al estudiante a cuestionarse sobre la velocidad en un punto específico.

Secuencia de tareas - Parte N°2:

En la segunda parte, la secuencia tuvo como intención desarrollar intuitivamente el tránsito entre la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea (velocidad instantánea), identificando la pendiente de la recta tangente de una función (curva) en un punto como la tasa de variación instantánea. Esta parte tiene una duración de 60 minutos y contiene 10 tareas (incluida la construcción y manipulación de herramientas en el Applet de GeoGebra).

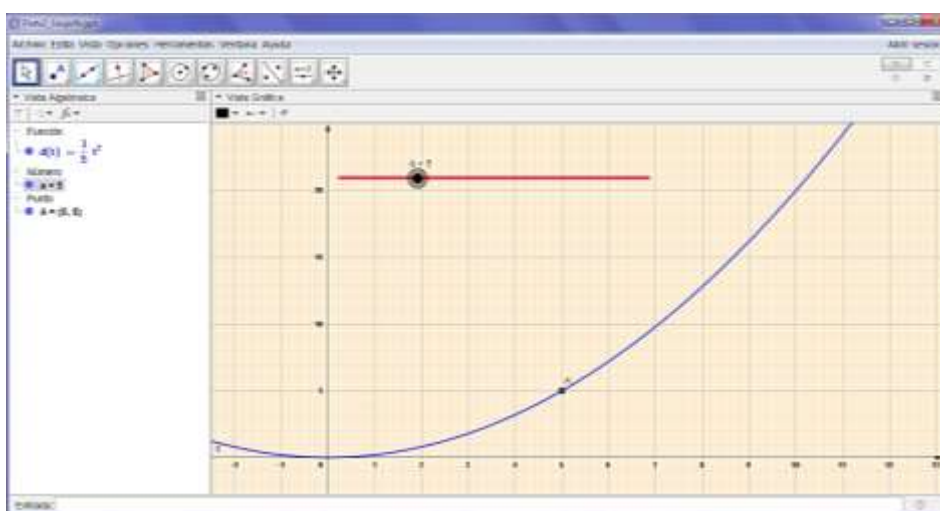


Figura 17. Imagen del archivo Parte2_GrupoN.ggb: Curva d, deslizador a y punto A.

La primera tarea está dirigida para que el estudiante construya, sobre el applet, la recta secante de dos puntos (uno fijo y el otro asociado al deslizador) y la pendiente de la misma. Las siguientes cinco tareas se encaminan a calcular la variación de la velocidad media o pendiente de la recta secante en un intervalo de tiempo cada vez más pequeño. La tarea seis y siete está destinada a expresar y relacionar matemáticamente la velocidad media en cualquier intervalo, en particular cuando es muy pequeño (casi 0). Las últimas tres tareas corresponden a establecer la relación entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea.

Consideraciones finales

A partir de las producciones obtenidas en la implementación de la secuencia de tareas (ambas partes), notamos la activación de los planos epistemológicos y cognitivos en el ETM. En la primera parte los estudiantes relacionaron la pendiente de una recta secante como la velocidad media en un intervalo de tiempo a través de representaciones graficas proporcionadas por el software GeoGebra; este hecho evidencia la activación de la génesis semiótica y la génesis instrumental. En la segunda parte, notamos que los estudiantes tuvieron dificultades para representar algebraicamente ciertas expresiones (por ejemplo, la tasa de variación media en el intervalo $[a, a + h]$). Sin embargo, observamos las circulaciones en el espacio de trabajo matemático personal del estudiante al familiarizarse con la construcción de la noción de derivada. Se le suma a ello, que el artefacto utilizado en la segunda parte tuvo una participación esencial.

En esta investigación se pudo observar lo fundamental que se vuelve el artefacto utilizado (deslizador), debido a que gracias a él se pueden visualizar de manera más económica y concreta las rectas secantes con sus respectivas pendientes en intervalos cada vez más pequeños. Además, este artefacto induce a que el estudiante conjeture, de forma natural, sobre aproximaciones cuando un número se acerca a 0 (nociones de límite). En consecuencia, se cuenta con una herramienta que auxilia la interpretación grafica del objeto y promueve la génesis instrumental.

Finalmente, esta investigación nos permitió estudiar el trabajo matemático personal de los

estudiantes cuando transitan entre la tasa de variación, tasa de variación media y tasa de variación instantánea como velocidad; es decir, cuando construyen la noción de derivada como tasa de variación.

Agradecimientos

A la Pontificia Universidad Católica del Perú y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso por el apoyo brindado en el marco de la realización de la tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas del primer autor. Del mismo modo, agradecemos al Programa de Intercambio Universitario CINDA.

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas)* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. (1998). El pre cálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. *Las matemáticas del Siglo XX, una mirada en 101 artículos.*, 101, 259-262. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=571226>
- Dolores C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal. Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. (Coord.). México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 155-181.
- Gómez-Chacón, Inés M., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 1-22. Recuperado de: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v30n54/1980-4415-bolema-30-54-0001.pdf>
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4-1), 5-39.
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, pp. 237-251.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20, 165-193.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. (2012). Los artefactos y la visualización: en

un ambiente geométrico y algebraico.

Leithold, L. (1998). *El cálculo*, Harla, México: Oxford University Press.

Oktaç, A., & Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition in research about analysis. In B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J. B. Lagrange (Eds.), *The didactics of mathematics: approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (pp. 87–122). New York: Springer.

Ruiz, K., Córdoba, Y., y Rendón, C. (2014). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1 (1), 125-130.

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 11 (2), 267-296.

Silva, E. (2012). *Uma Proposta Para o Ensino da Noção de Taxa de Variação Instantânea no Ensino Médio*. (Tesis de Maestría) Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Disponible en: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10934>

Stewart, J. (2018). *Cálculo Trascendentes Tempranas* (8 ed.). México: Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2008). *Precálculo. 5ª. Edición*. México: Cengage Learning.

Vara, T. N. P., & Salazar, J. V. F. (2018). Mathematics Education Art and Architecture: Representations of the Elliptic Paraboloid. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 643-655. <https://doi.org/10.12973/ejmste/80628>

Villa-Ochoa, J. A., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. A. (2017). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 11(2), 25-34. DOI: 10.4067/S0718-50062018000200025

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. *Zetetiké*, 25(2), 265-288.

Vrancken, S., y Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (5)33, 53-70.