ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

Gilder Samuel Vargas Vargas
Mihály Martínez-Miraval
samuel.vargas@pucp.edu.pe, martinez.ma@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El estudio forma parte del trabajo de maestría desarrollado por el primer autor. El objetivo es mostrar que las identidades trigonométricas tienen un papel importante en la historia de la matemática y pueden ser consideradas como un ente articulador de las nociones trigonométricas seno y coseno. Se presenta un recorrido histórico-epistemológico de estas nociones desde las antiguas civilizaciones de Oriente hasta la época medieval, donde adquieren el estatus de objetos matemáticos; este recorrido incluye a los principales exponentes, sus respectivos aportes en el campo de la trigonometría, se identifica el desarrollo y uso de las identidades trigonométricas. Del estudio realizado, concluimos que dichas identidades forman parte de la génesis de la trigonometría y permitieron su avance, a través de la articulación de diferentes etapas de su desarrollo.

Palabras clave: *Identidades trigonométricas, seno, coseno, estudio histórico-epistemológico.*

Introducción

La historia de las matemáticas permite conocer el origen, la evolución y el desarrollo de las definiciones y representaciones asociadas al seno y coseno, las condiciones y problemáticas que determinan su emergencia, así como las preguntas que se plantean para resolver dichas cuestiones. Para este estudio se asume una postura epistemológica en el sentido que le otorgan Sierpinska y Lerman (1996), es decir "como una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, sobre los procesos y condiciones de su desarrollo, sobre las características de la actividad matemática actual y pasada" (p. 22).

Las nociones trigonométricas seno y coseno están estrechamente ligadas al origen de la trigonometría. Esta nueva rama de las matemáticas surge motivada por el deseo de construir una astronomía cuantitativa, que luego sería utilizada para predecir trayectorias y posiciones de algunos cuerpos celestes, para la medición del tiempo, para la navegación y la geografía (Kline, 1972).

Tal como lo afirma Montiel (2005) se cree que los conceptos trigonométricos emergen en la astronomía, se desarrollan en la trigonometría esférica y plana, y pasan a formar parte del análisis matemático, dando explicación a diversos fenómenos astronómicos, físicos y químicos, los mismos que están relacionados con los movimientos, el sonido y el calor.

La trigonometría evoluciona desde las antiguas civilizaciones de occidente, como la egipcia y la babilónica, donde se encontraron papiros y tablillas de arcilla que contienen ciertos rudimentos trigonométricos, posteriormente la cultura árabe introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y desarrolla nuevas identidades trigonométricas como las transformaciones trigonométricas. Finalmente, se analiza la época medieval, donde el seno y coseno adquieren el estatus de objetos matemáticos tal como se conocen en la actualidad y pasan a formar parte del análisis funcional.

Desarrollo histórico-epistemológico de las nociones trigonométricas seno y coseno

A continuación, se presentan en orden cronológico cómo se desarrollaron las nociones de seno y coseno, los principales representantes del campo de la trigonometría, sus trabajos y demostraciones para algunas identidades trigonométricas.

Edad Antigua

Los primeros vestigios de trigonometría aparecen en la civilización egipcia y babilónica con ciertas proporciones entre números y entre los lados de triángulos semejantes (Lobo Da Costa, 1997).

En la cultura egipcia encontramos los documentos matemáticos más importantes que han sobrevivido hasta nuestros días: el papiro de Rhind, descubierto por el escocés A. Henry Rhind en 1858 y que se conserva en el British Museum, y el papiro de Moscú, que se encuentra en un museo de la capital rusa (Kline, 1972).

En el problema 56 del papiro de Rhind, se encuentra uno de los primeros vestigios de lo que podría ser una razón trigonométrica. En dicho problema se pide calcular el seket de una pirámide que tiene 250 codos de altura y 360 codos de largo en su base (Boyer, 1986). El término seket significa “la separación horizontal de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura” (Boyer, 1986, p. 40).

En la pirámide de base cuadrada $ABCD$ de la figura 1, donde Fes su centro, Hsu vértice yEes el punto medio del lado BC, el seket sería igual al cociente entre la longitud del segmento EFy la altura FH, que es equivalente a la cotangente del ángulo formado entre la base $ABCD$ y la cara lateral BHCde la pirámide (Maor, 1998).

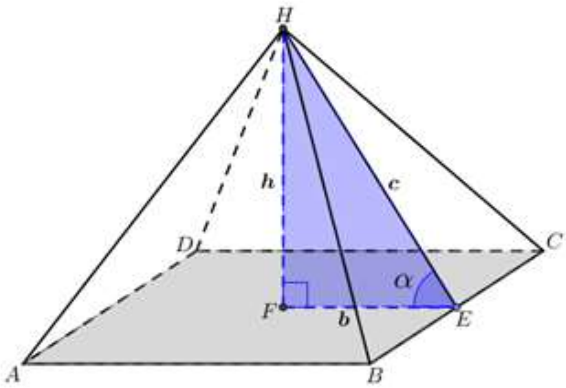

Figura 1. Relación entre "Seket" y la actual cotangente. Vargas (2019, p. 31)

Los egipcios usaban la noción de seket para mantener la pendiente constante de las caras de las pirámides; sin embargo, no se puede ubicar en su matemática el nacimiento de la trigonometría, debido a que su cálculo era netamente numérico y aun no se tenía la noción de ángulo.

Los babilonios desarrollaron un sistema numérico posicional y sexagesimal bastante avanzado para su época, el mismo que se ha podido evidenciar gracias a las tablillas de arcilla encontradas al sur de Irak. Según Maor (1998) se cree que el grado sexagesimal como unidad de medida angular se originó con ellos. Además, conocían algunas relaciones para los lados de un triángulo rectángulo y trigonometría básica (Raiol, 2014).

La tablilla Plimpton 322 que se conserva en la Universidad de Columbia, contiene otro "germen" de las razones trigonométricas. En dicha tablilla se puede observar una lista de ternas pitagóricas formadas por números enteros positivos y aparece también la razón entre la hipotenusa y un cateto que sería el equivalente a nuestra actual secante.

En consonancia con Da Fonseca (2015), la trigonometría tiene sus inicios con el estudio de los triángulos, donde se observan lados y ángulos que deben ser medidos. Luego, con la observación y la comparación entre triángulos de diferentes tamaños, comienza la percepción y la sistematización de las primeras propiedades para la configuración geométrica de la trigonometría, es decir, la semejanza de triángulos.

El conocimiento matemático de los egipcios y babilonios fue superado por los grandes matemáticos griegos quienes fueron unos de los primeros en presentar un estudio sistemático y organizado de las relaciones entre los ángulos centrales de una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que las subtienden (Boyer, 1986).

Dentro de estos matemáticos griegos tenemos a Hiparco de Nicea (180 a. C. – 125 a.C.) considerado como el gran astrónomo de la antigüedad y padre de la trigonometría por haber sido uno de los primeros en elaborar una tabla de cuerdas trigonométricas.

Según Bressoud (2010), Euclides calculó longitudes de cuerdas al trabajar con polígonos regulares como pentágonos y decágonos, y al calcular sus lados. Para calcular cuerdas correspondientes a otros ángulos, Hiparco utiliza los resultados geométricos que en lenguaje actual serían como las que aparece en la figura 2.

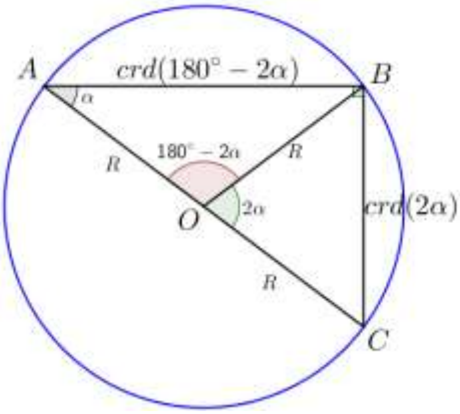

Figura 2. Triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia. Adaptado de Oliveira (2010, p. 31)

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC, tenemos:

$$crd^2(2\alpha) + crd^2(180° - 2\alpha) = (2R)^2$$

$$crd(180° - 2\alpha) = \sqrt{(2R)^2 - crd^2(2\alpha)}$$

Mediante resolución de triángulos en el triángulo OBC podemos relacionar la longitud de la cuerda BC con el radio de la circunferencia es decir $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$, que usaremos en la expresión anterior: $2Rsen(90° - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - (2Rsen(\alpha))^2}$

$$2Rcos(\alpha) = \sqrt{(2R)^2 - (2Rsen(\alpha))^2}$$

$$(2R)^2cos^2(\alpha) = (2R)^2(1 - sen^2(\alpha))$$

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Esta expresión viene a ser una de las identidades fundamentales de la trigonometría. Hiparco también estableció el siguiente teorema:

$$crd^2(\alpha) = R(2R - crd(180° - 2\alpha)).$$

Utilizando convenientemente la relación $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$, tenemos:

$$\left(2Rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 = R\big(2R - 2Rsen(90° - \alpha)\big)$$

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

Con estos resultados Hiparco fue capaz de construir la primera tabla trigonométrica de cuerdas para ángulos que son múltiplos de 7,5°. Por ejemplo, el ángulo de 15° se obtenía a partir del ángulo de 30°, el mismo que se puede obtener fácilmente del ángulo de 60°.

Hiparco representa la transición entre la astronomía babilónica y gran matemático Claudio Ptolomeo (85 d. C. – 165 d. C.). Uno de los mayores aportes de Ptolomeo es el *Almagesto*, que es un resumen de la astronomía desarrollada hasta su época, conformado por trece libros, al igual que los Elementos del Euclides. Ambas obras han ejercido una enorme influencia sobre las matemáticas; sin embargo, "a diferencia de los Elementos, que hasta la actualidad constituye el núcleo de la geometría clásica, el *Almagesto* perdió gran parte de su autoridad cuando el sistema heliocéntrico de Copérnico fue aceptado" (Maor, 1998, p. 25).

Para el cálculo de sus cuerdas Ptolomeo usa el siguiente teorema:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

En otras palabras, la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo inscrito, es igual al producto de sus dos diagonales (ver Figura 3).

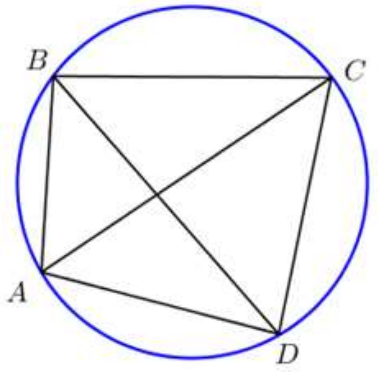

Figura 3. Teorema de Ptolomeo.

Con base en este teorema, Ptolomeo deduce las primeras identidades para la suma y diferencia de dos ángulos y que son usados con mucha frecuencia dentro de la trigonometría.

En la figura 4, se tiene una circunferencia de centro O y radio R, donde 2α y 2β son las medidas del ángulo centrales AOC y AOB respectivamente.

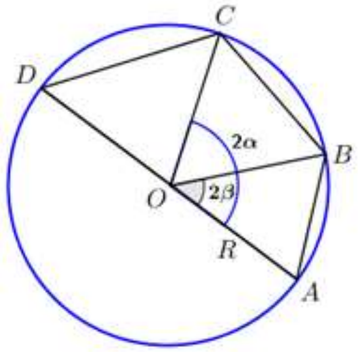

Figura 4. Deducción de la cuerda para la diferencia de dos arcos. Adaptado de Oliveira (2010, p. 35)

En el cuadrilátero $ABCD$ inscrito en la circunferencia de diámetro AD por el teorema de Ptolomeo, se tiene: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

Las longitudes de las cuerdas en términos de los ángulos quedarían de la siguiente manera:

$$crd(2\beta) \cdot crd(180° - 2\alpha) + crd(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = crd(2\alpha) \cdot crd(180° - 2\beta)$$

$$crd(2\alpha - 2\beta) \cdot 2R = crd(2\alpha) \cdot crd(180° - 2\beta) - crd(2\beta) \cdot crd(180° - 2\alpha)$$

Como $crd(2\alpha) = 2Rsen(\alpha)$ y $sen(90° - \theta) = cos\theta$, de la ecuación anterior podemos deducir la siguiente expresión moderna:

$$2Rsen(\alpha - \beta) \cdot 2R = 2Rsen\alpha \cdot 2Rsen(90° - \beta) - 2Rsen\beta \cdot 2Rsen(90° - \alpha)$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sen\beta$$

Ptolomeo conocía, a partir de los pitagóricos, el valor de la cuerda del ángulo de 36°, que viene a ser el lado del decágono regular inscrito en una circunferencia. Así, por cálculo de la diferencia de cuerdas, él fue capaz de calcular la cuerda de $6°$ como la diferencia de $36° - 30°$. Luego por bisecciones, llegó a las cuerdas de $3°$, de $1{,}5°$, y de $0{,}75°$. De ahí en adelante construyó una tabla de cuerdas con variaciones de $0{,}75°$ en $0{,}75°$ (Oliveira, 2010).

Edad Media

Una contribución importante de la cultura india a la trigonometría fue la introducción del equivalente a la función seno para reemplazar a las tablas de cuerdas griegas, las mismas que figuran en los Siddhantas y en el Aryabhatiya (Boyer, 1986). En estas tablas se dan valores del seno para ángulos menores o iguales a 90° en intervalos que van de $3\frac{3}{4}°$ cada uno.

Según Esteban, Ibañez y Ortega (1998) ya en los inicios del siglo VI los matemáticos de la india desarrollaron algunos conceptos de algunas razones trigonométricas. Usaron la palabra jya-ardha para semicuerda y su abreviatura (jya o jiva) se empleó para denominar a la razón seno (ver figura 5).

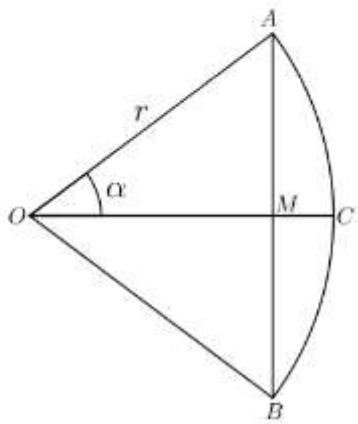

Figura 5. Arco de un ángulo. Adaptado de Esteban, Ibañez y Ortega (1998, p. 61)

Los matemáticos indios definieron y desarrollaron la teoría de tres razones trigonométricas, cuyos equivalentes modernos a partir de la resolución de triángulos rectángulos sería los siguientes:

$$jya(\alpha) = AM = rsen(\alpha)$$

$$kojya(\alpha) = OM = rcos(\alpha)$$

$$ukramajya(\alpha) = MC = OC - OM = r[1 - cos(\alpha)]$$

La trigonometría árabe, según Boyer (1986), se construyó en base al estudio de la llamada función seno y fue gracias a ellos que pasó a Europa como la trigonometría del seno.

El imperio musulmán o árabe logra importantes avances en las ciencias y en las artes entre los siglos VIII y XI, debido a la difusión de la lengua árabe, que sustituye al griego como lengua universal. Esta influencia árabe se inicia con la fundación de la Escuela de Bagdad en el siglo IX, siendo uno de sus máximos exponentes Al Battani conocido como el Ptolomeo de Bagdad (Lobo Da Costa, 1997).

Al Battani (850 d. C. – 929 d. C.), en su libro titulado *Sobre el movimiento de las estrellas*, deja algunas fórmulas trigonométricas como la siguiente $b = \frac{asen(90° - A)}{senA}$, donde aparecen el seno y la función seno verso (Boyer, 1986). Estas expresiones ya son ideas básicas de la trigonometría moderna. Además, introduce la circunferencia de radio igual a la unidad y demuestra que la razón jiva es válida para cualquier triángulo rectángulo, independiente del valor de la longitud de la hipotenusa (Lobo Da Costa, 1997).

Según Lobo Da costa (1997), Al Battani estaba interesado en calcular la altitud del sol, para lo cual fue necesario construir tablas trigonométricas en intervalos de un cuarto de grado.

Abu'l-Wefa (939-998) trabaja la tangente en una circunferencia de radio igual a la unidad y demuestra las fórmulas para el seno del ángulo doble como y el ángulo mitad, además formula el teorema de senos para triángulos esféricos (Boyer, 1986). También construye una nueva tabla trigonométrica de senos en intervalos que van de un cuarto de grado ($15'$), con hasta ocho decimales, también introdujo las funciones secante y cosecante y con esto definió todas las razones trigonométricas en la circunferencia unitaria, pues hasta entonces, dichas relaciones solo habían sido trabajadas en el triángulo rectángulo (Raiol, 2014).

Ibn-Yunus (m. 1008) introdujo la fórmula $2cosxcosy = cos(x + y) + cos(x - y)$, que en la actualidad se le conoce como una identidad trigonométrica para la transformación de producto de cosenos a suma de cosenos. Según Boyer (1986), esta fórmula se usó en Europa durante el siglo XVI antes de la invención de los logaritmos, para convertir productos en sumas.

Jamshid Al-Kashi (1390-1450), al igual que sus predecesores Abu'l-Wefa y al-Biruni, también calculó el $sen1°$ con un altísimo grado de aproximación, aplicando la identidad del seno para el ángulo triple.

De lo anterior, se puede concluir que una de las principales tareas en la edad media fue la construcción de tablas trigonométricas para lo cual era necesario el cálculo de los valores del seno y coseno con varias cifras decimales; en un primer momento mediante técnicas asociadas a las construcciones geométricas de polígonos regulares inscritos en circunferencias, en donde se asociaba las cuerdas con los ángulos, y en una segunda instancia, con las identidades trigonométricas que aparecen al trabajar los triángulos rectángulos en la circunferencia de radio igual a la unidad.

Edad Moderna

La trigonometría inicia su periodo de consolidación como una rama independiente de las matemáticas a mediados del siglo XV.

Johann Müller (1436 - 1476), astrónomo y matemático de origen alemán más conocido como Regiomontano, es considerado como el padre de la trigonometría moderna. En 1464 presenta su obra titulada *De triangulis omnimodis*, donde se exponía de forma sistematizada los métodos de resolución de triángulos (Boyer, 1986). Asimismo, trabajó "en una nueva versión corregida del Almagesto y en 1471 calculó una nueva tabla de senos y de tangentes" (Stewart, 2008, p. 95) utilizando como radios 600 000 y 100 000 unidades respectivamente.

François Viète (1540 - 1603), con su trabajo *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* publicado en 1579, es uno de los primeros en hacer un tratamiento sistemático para resolver triángulos planos y esféricos, utilizando las seis funciones trigonométricas (Montiel, 2011). Además, desarrolla las otras tres fórmulas para las identidades trigonométricas de transformación de suma de senos y cosenos a producto; por ejemplo, $senA + senB = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

La trigonometría de Viète, así como su álgebra, tienen como característica principal la generalización. Además, fue el fundador del enfoque analítico para la trigonometría, introdujo la noción del triángulo polar en el estudio de la trigonometría esférica (Boyer, 1986).

Según Boyer (1986), en su obra *Canon mathematicus* (1579), Viète calculó tablas trigonométricas para intervalos de un minuto y en su *Variorum de rebus mathematicis* (1593) encontramos un teorema equivalente a la actual ley de tangentes $\frac{a+b}{a-b} = \frac{tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$.

La transición de las razones trigonométricas a las funciones periódicas comenzó con Viète en el siglo XVI, tuvo un nuevo impulso con la aparición del cálculo Infinitesimal en el siglo XVII y culminó con los trabajos de Euler.

En la obra póstuma *Harmonia mensurarum* de Roger Cotes (1682- 1716), "se reconoce el carácter periódico de las funciones trigonométricas, apareciendo quizás por primera vez en forma impresa los ciclos de las funciones tangente y secante" (Boyer, 1986, p. 536), quien señala que se trataría de uno de los primeros textos que sistematiza el cálculo aplicado a las funciones circulares y logarítmicas.

Según Boyer (1986), el famoso teorema de Abraham de Moivre (1667- 1754) que relaciona al seno y coseno $(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$ no viene dado de forma explícita, pero sí se puede reconocer a través de sus obras. Por ejemplo, en las *Philosophical Transactions* de 1707 y en su *Miscellanea analytica* de 1730 aparecen las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{2}\left(senn\theta + \sqrt{-1}cosn\theta\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(senn\theta - \sqrt{-1}cosn\theta\right)^{\frac{1}{n}} = sen\theta$$

$$(sen\theta \pm icos\theta)^{\frac{1}{n}} = cos\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right) \pm isen\left(\frac{2k\pi \pm \theta}{n}\right)$$

La última expresión era utilizada para descomponer $x^{2n} + 2xcos\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2xcos\theta + 1$.

Leonhard Euler (1707-1783), en su obra *Introductio,* realiza el estudio analítico de las funciones trigonométricas donde, por ejemplo, el seno de un ángulo "ya no era un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o bien el número definido por la serie" (Boyer, 1986, p. 558). Con Euler la trigonometría toma su forma actual, cuando adopta como medida del radio de la circunferencia a la unidad y define funciones aplicadas a números reales y no a ángulos como se hacía hasta entonces.

A través de este recorrido histórico, se puede evidenciar que la trigonometría nace como una rama auxiliar de la astronomía, luego se independiza y pasa a formar parte del análisis matemático expresando relaciones entre números complejos, sin la necesidad de recurrir a ángulos o arcos (Lobo Da Costa, 1997).

Conclusiones

Del estudio realizado, se concluye que la razón de ser de las nociones trigonométricas seno y coseno a lo largo de la historia son las identidades trigonométricas porque están presentes en la génesis de la trigonometría, y porque han permitido el avance de la misma, logrando ser el ente articulador entre las diferentes etapas de su desarrollo, en un primer momento mediante técnicas asociadas a las construcciones geométricas de polígonos regulares inscritos en circunferencias y, en una segunda instancia, al trabajar los triángulos rectángulos en la circunferencia trigonométrica, razón por la cual su estudio debe estar presente en las organizaciones matemáticas a enseñar.

Referencias

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Costa, N. M. L. D. (1997). *Funções Seno e Cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do" Mundo Experimental" e do Computador*. (Tesis de Maestría). Universidade de Sao Paulo. Brasil.

Da Fonseca, L. (2015). *Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França.* (Tesis de Doctorado). Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press.

Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.

Montiel, G. (2005) Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. (Tesis de Doctorado no publicada). CICATA-IPN. México.

Oliveira, C. (2014). *Trigonometria: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente*. (Tesis de Maestría). Universidade Federal de Campina Grande. Brasil.

Raiol, E. (2014). *O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas*. (Tesis de Maestría) Universidad federal do Pará. Brasil.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Springer, Dordrecht.

Vargas, G. S. (2019). *Propuesta de un modelo praxeológico de referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria.* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.