



Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real

Cristian Andrés **Hurtado** Moreno
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Cali, Colombia

cristian.hurtado@correounivalle.edu.co

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Área de Educación Matemática, Universidad del Valle
Cali, Colombia

ligia.torres@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación tiene como referente la experiencia pedagógica e investigativa del autor, la cual parte del reconocimiento de problemáticas en torno a las necesidades formativas que demandan los maestros de matemáticas para actuar sobre sus prácticas, y de las múltiples dificultades que encaran los estudiantes cuando se presentan las ecuaciones de primer grado con una incógnita como objeto de aprendizaje en las aulas. A partir de estas dos problemáticas, y tomando como referencia el marco teórico y metodológico de los organizadores del currículo, el conocimiento y el análisis didáctico, se diseña una propuesta de unidad didáctica relativa al objeto matemático en cuestión, la cual se nutre del estudio de múltiples organizadores, a saber: un estudio histórico, matemático, semiótico, fenomenológico, entre otros. La unidad didáctica es puesta en consideración por tres profesores de educación básica para realizar registros de análisis frente a su formación y a las necesidades de la misma.

Palabras claves: álgebra escolar, ecuaciones de primer grado, formación de profesores, unidad didáctica, organizadores curriculares, análisis y conocimiento didáctico.

Problema de investigación y antecedentes

La enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar ha sido y sigue siendo tema de interés y debate para la Educación Matemática. En efecto, con gran preocupación se evidencia la oposición que presentan los estudiantes al enfrentarse al aprendizaje del álgebra escolar pese al gran empeño que suele ponerse en su enseñanza. La experiencia pedagógica del autor de esta investigación, los resultados de las evaluaciones de los desempeños algebraicos de los estudiantes colombianos en pruebas externas como TIMSS, Censales y Saber (MEN, 1993, 1997), y la investigación en el campo de la didáctica del álgebra así lo evidencian y fundamentan (Kieran & Filloy, 1989; Filloy & Rojano, 1989; Socas & Palarea, 1997; Castro, 2012; Gallardo & Rojano, 1988; Amerom, 2002; entre otras).

En relación con las investigaciones revisadas, en ellas se hace relevante el estudio de las dificultades que se presentan desde el mismo momento de trascender de los estudios aritméticos al estudio y significación del álgebra y los procesos que ello alberga. Al respecto, ha sido ampliamente reportado la multiplicidad de obstáculos (didácticos y epistemológicos) y dificultades que se presentan, tanto para profesores como para estudiantes, en la transición de un modo de pensamiento aritmético a uno algebraico¹.

En efecto, en esta transición el modo de pensamiento aritmético arrastra necesariamente estrategias y enfoques que pueden ser útiles y correctos en este campo, pero pueden no serlo en los estudios del álgebra. Los estudiantes, dado su años de experiencia con cantidades numéricas, exactas y conocidas tienden a mantener interpretaciones aritméticas de la mayoría de las situaciones algebraicas, incluso en etapas avanzadas del estudio del álgebra (Kieran y Filloy, 1989) y no aceptan, con regularidad, la existencia de cantidades desconocidas, la emergencia de variables con múltiples significados y mucho menos, que el resultado mismo de una expresión puede ser una letra o una expresión simbólica (Ursini, 1996). La permanencia de una “cultura aritmética” en los estudios algebraicos, la recurrencia en el uso de métodos aritméticos para resolver problemas algebraicos, la carencia de conceptos, operaciones y propiedades necesarias para el estudio del álgebra, la falta de conciencia sobre el sentido operacional y estructural de los conceptos matemáticos, el reconocimiento multifacético de las letras entendidas como variables y no solamente como miembros de fórmulas o etiquetas (Escalante & Cuesta, 2012; Ursini & Trigueros, 2006), entre otras muchas cuestiones, son serias dificultades que los estudiantes deben superar para lograr darle sentido a sus estudios algebraicos.

Las dificultades mencionadas se resaltan aún más cuando se piensa, por ejemplo, en la necesidad de construir un nuevo lenguaje para poder expresar, en su máximo potencial, el pensamiento algebraico. Se crea la necesidad no solamente de un cambio de pensamiento en dos dominios matemáticos de naturaleza distinta, sino que también, de apropiarse de un lenguaje para expresar cada uno de estos pensamientos. Se habla en este sentido de la transición de un lenguaje aritmético a uno algebraico, lo cual supone de antemano la necesidad de dotar de un nuevo sentido a las nuevas operaciones y conceptos, lo que a su vez dotará de nuevos significados a las expresiones abordadas en álgebra (Rojano, 1994).

La necesidad de construir un nuevo simbolismo, un nuevo lenguaje, para representar conceptos y expresiones que pueden o no ser nuevos para los estudiantes conlleva

¹Los modos de pensamientos aritméticos y algebraicos se distinguen en tanto en el primero se trabajan con cantidades concretas o conocidas, mientras que lo que caracteriza el pensamiento algebraico es la manera como se trabaja las cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012).

necesariamente a la emergencia de diversas dificultades. Entre las múltiples dificultades que se ponen de manifiesto en este ámbito sobresale, entre otras, la falta de comprensión en los estudiantes para abordar métodos y símbolos que expresen procesos de generalización y, con ello, mayores niveles de abstracción que los que usualmente se encontraban en sus estudios aritméticos. Tal problema se resalta, por ejemplo, cuando se presenta la necesidad de operar las incógnitas en las ecuaciones y, por tanto, de entender que lo que cobra importancia en los estudios algebraicos son las relaciones puestas sobre lo representado, las operaciones, y no la(s) letra(s) en sí misma(s), las cuales son comúnmente pensadas como números particulares.

Otro aspecto que ratifica las dificultades que presentan los estudiantes en relación con la significación de las ideas algebraicas y particularmente con el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, pero desde un ámbito local, son los resultados de los desempeños que logran en las evaluaciones externas. Tomando como referencia los resultados en álgebra del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y ciencias (TIMSS) (MEN, 1997) y de las pruebas SABER (MEN, 1993), se pone de relieve la carencia conceptual, e incluso procedimental, que los estudiantes logran del trabajo algebraico, incluso después de varios años de dedicación. Entre las dificultades que sobresalen en estos resultados se encuentra, por ejemplo, la falta de desempeño adecuado de los estudiantes para resolver problemas en diversos contextos en los que las ecuaciones resultan como modelos de estos.

Las diversas dificultades que presentan los estudiantes en sus estudios algebraicos no solamente se relacionan con el objeto de conocimiento en sí mismo, sino que también estas se ven en gran parte tensionadas por la manera como se presentan las ideas algebraicas en las aulas, es decir, por la manera como se enseña el álgebra. En efecto, investigadores como Gascón (1999) y Godino & Font (2003) cuestionan la forma tradicional² de ser enseñada el álgebra en las escuelas. Los profesores a cargo de estos procesos siguen con frecuencia una manera convencional de enseñar álgebra, una manera que logra restringir el pensamiento algebraico al uso exclusivo de letras, números y unos modos de actuar sobre ellas. Tal situación pone de relieve que después de varios años gastados en el aprendizaje de reglas y operatividades mecánicas con expresiones algebraicas y ecuaciones los maestros esperan mucho más de lo que realmente los estudiantes pueden llegar a hacer con su aprendizaje algebraico.

La manera como abordan generalmente muchos maestros las ecuaciones de primer grado con una incógnita real en las escuelas, priorizando tratamientos procedimentales y rutinarios, alejados, por ejemplo, de una reflexión conceptual sobre dichos procedimientos, resalta en ellos la carencia de elementos teóricos y didácticos necesarios para la enseñanza de este concepto matemático, con lo que tal enseñanza puede quedar, en muchas ocasiones, fundamentada en la experiencia o sujeta a los libros de texto. De este modo, el quehacer cotidiano de los maestros queda sujeto a una práctica artesanal, esto es, basada en la generación de hábitos adquiridos por medio de la práctica. Así, la planificación curricular es vista como la secuenciación de contenidos matemáticos y la enseñanza como el recubrimiento de estos, quedando relegado el conocimiento didáctico sobre tales contenidos.

²Entiéndase por forma tradicional de enseñar álgebra en la escuela el enfoque que inicia con la presentación de las llamadas expresiones algebraicas a la par de unas reglas sintácticas para manipularlas. El énfasis en esta manera de introducir el álgebra escolar está puesto sobre la manipulación simbólica, la mayoría de las veces sin sentido (Amerom, 2002).

En este orden de ideas, es necesario que los profesores en ejercicio, con mayor razón, se apropien de modelos teóricos y de esquemas fundados que organicen el conocimiento didáctico de los contenidos, pero además, que brinden elementos de análisis y actuación sobre el diseño, implementación y evaluación de actividades de aula en torno a dichos contenidos. En general, la apropiación de estos modelos debe permitirles a los maestros tomar decisiones en el momento de actuar en el aula de clase, en el momento de adoptar y adaptar la estructura curricular que implementará con sus estudiantes.

Sin embargo, Rico (1997) y Rico & Segovia (2001) han detectado que una fuente de dificultad permanente para los profesores se presenta cuando deben actuar sobre su planificación curricular local, puesto que con regularidad se asume desde ámbitos globales, es decir, se diseñan actividades para un tema de las matemáticas escolar particular a tendiendo, por lo regular, a los objetivos, contenidos, metodología, y esquemas de evaluación de la asignatura en general, lo que conlleva a que los maestros vean la planificación de clases como una secuencia de contenidos matemáticos.

La situación descrita se percibe también en la experiencia del autor de este trabajo, pues esta deja entrever que aún nos encontramos lejos del perfil de profesor sistemático y reflexivo, con capacidades para atender los problemas de diseño curricular local. Por el contrario, muestra un profesor que generalmente basa sus prácticas de aula en su experiencia, en libros de texto y en una forma estandarizada, muy cuestionada, de enseñar matemáticas, esto es, por selección y cubrimiento de los contenidos a enseñar.

Lo anterior pone de relieve dos problemáticas centrales, por un lado, aquella que gira en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de álgebra escolar, en particular, de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, por otro lado, y no menos preocupante, la problemática que gira alrededor de la formación del profesor de matemáticas, específicamente, la falta de elementos teóricos y didácticos base para la enseñanza del objeto matemático en cuestión por parte de los docentes encargados de direccionar este proceso. En esta dirección interesó en el trabajo de investigación determinar dos cuestiones, a saber:

¿Qué conocimientos didácticos requiere un profesor de matemáticas para diseñar una Unidad Didáctica en torno a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real? y ¿Qué conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos se reconocen en un grupo de profesores de la Educación Básica Secundaria al analizar la Unidad Didáctica relativa a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real diseñada a partir del análisis didáctico adoptado?

Marco de referencia conceptual

Para dar respuesta a las preguntas planteadas en el trabajo, se tomó en consideración los referentes teóricos, conceptuales y metodológicos presentados y desarrollados por el grupo PNA de la Universidad de Granada (España), a la cabeza del Dr. Luis Rico, en los cuales se toma postura en relación con la manera como los profesores deberían planificar, diseñar, implementar y evaluar *unidades didácticas* (UD) (Rico & Segovia, 2001; Bedoya, 2002) en torno a un concepto matemático específico en un grado de escolaridad particular. Así, Se toma el *análisis didáctico* (AD) (Rico, 2013; Gómez 2007) como propuesta metodológica para tal fin, los *organizadores del currículo* (OC) (Rico, 1997; Rico & Segovia, 2001; Bedoya, 2002) como los elementos que permiten la configuración del AD, y el *conocimiento didáctico* (CD) (Gómez 2007; Lupiáñez, 2009) como aquel conocimiento que se genera del desarrollo del AD.

El AD, en tanto propuesta metodológica, articula a su vez cuatro tipos de análisis saber: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y de actuación, siendo los tres primeros análisis a priori al diseño de unidades didácticas, mientras que el cuarto se le considera a posteriori. De manera general, en el análisis de contenido el centro de atención es el tema objeto de enseñanza, este se caracteriza por ser el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares. En el análisis cognitivo el foco de atención es el aprendizaje, en este se estructura lo que el profesor espera que los estudiantes aprendan, así como las posibles “limitaciones” que estos pueden tener en su proceso de aprendizaje. En el análisis de instrucción el centro de atención es la enseñanza, el cual parte del conocimiento didáctico fruto de los dos análisis anteriores (de contenido y cognitivo); en este, el profesor diseña, produce o ajusta la UD que constituye la actividad de enseñanza y aprendizaje del concepto matemático de instrucción. El análisis de actuación es el último de los análisis, en donde el profesor luego de implementar la unidad didáctica identifica en qué medida se lograron las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas y las dificultades que surgieron en los estudiantes al implementar la unidad didáctica.

Cada uno de los cuatro análisis que conforman el AD, en particular los tres primeros, se llevan a cabo a partir de los elementos teóricos que gana el profesor cuando documenta su práctica, es decir, cuando incorpora organizadores del currículo que la fundamenten. Los organizadores del currículo son pues aquellos elementos teóricos y conceptuales que el profesor adopta como componentes necesarios para articular el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas relativas a un determinado tema matemático. De este modo, los OC se cristalizan en el aula de clase en virtud de la ejecución de la propuesta metodológica del AD; tal ejecución genera un campo de conocimientos en el profesor que se gesta del estudio y análisis de los OC que toma en consideración, así pues, el CD es aquel conocimiento de la didáctica de la matemática que gana el profesor cuando pone en juego el AD.

En suma, el CD se constituye finalmente como el conocimiento que le permite al profesor de matemáticas desarrollar la planificación de su actividad curricular local a partir de la puesta en acto del AD, para lo cual debe seleccionar los OC que lo compondrán. Lo anterior tiene como resultado directo el diseño de unidades didácticas en torno a un concepto de las matemáticas escolares. En este orden de ideas, el marco de referencia conceptual que vertebró la investigación que aquí se reporta, toma en consideración como dimensión teórica el CD y los OC, y como dimensión metodológica el AD.

Metodología

A efectos de responder las dos preguntas planteadas en la investigación, el trabajo se desarrolló en tres grandes etapas. En la primera se realizó la propuesta de UD para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, para lo cual se empleó el modelo metodológico de AD ya descrito. La segunda etapa contempló el encuentro con los tres maestros en ejercicio, así como el diseño de dos talleres que junto con la UD fueron los instrumentos empleados para la recolección de la información en dicho encuentro, en particular, se realizaron dos sesiones de trabajo con los maestros en las que se les entregaba la unidad didáctica y los talleres, uno por sesión, para que estos fueron desarrollados; estos talleres apuntaban, de manera general, a que los maestros identificaran elementos de tipo matemático, didáctico y curricular que era posible rastrear en la propuesta de UD diseñada, en otras palabras, los profesores seleccionados analizaron la propuesta generada orientados por los talleres

presentados. A propósito de la selección de los maestros, se debe señalar que una de las variables que más se tuvo en cuenta para elegirlos fue el hecho de que trabajaron o trabajan en la enseñanza del concepto matemático centro de interés en esta investigación. Finalmente, la tercera etapa comprendió el proceso en virtud del cual se analizó la información obtenida en las dos etapas anteriores, lo cual permitió responder a las preguntas planteadas, uno y dos, respectivamente, así como realizar las conclusiones de la investigación.

Ahora bien, el desarrollo de cada uno de los análisis que componen el AD relativo a las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, junto con la delimitación curricular en el contexto nacional colombiano como momento previo a este desarrollo, a fin de diseñar la unidad didáctica y de dar respuesta a la primera pregunta de la investigación, se determinó de la siguiente manera:

Tomando como base las políticas públicas nacionales, en particular, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se caracterizó la propuesta curricular que se ofrece, particularmente, en el primero de estos documentos, la cual parte de reconocer que toda propuesta de aula debe contemplar de manera coherente y sistémica una estrecha relación entre: unos conocimientos básicos (los cuales refieren al pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento aleatorio y sistemas de datos), unos procesos generales de pensamiento (tales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos), y finalmente unos contextos (que pueden ser de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas o de otras ciencias); tales propuestas deben presentarse en el aula de clase por medio de situaciones problemáticas, las cuales se convierten en una manera de abordar significativamente la construcción de conocimiento matemático. Los anteriores elementos permitieron ubicar y delimitar la propuesta de UD diseñada en términos de este referente curricular, así, se privilegió el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos; el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, y la comunicación; y los contextos de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas.

Por su parte, el estudio del segundo documento oficial permitió seleccionar los estándares de competencias matemáticas que con el diseño de UD se apunta a que los estudiantes logren, pero además, permitió evidenciar la coherencia vertical y horizontal que la propuesta misma guarda en relación el estudio de las ecuaciones de primer grado tanto en los distintos niveles de escolaridad como en diversos tipos de pensamiento matemático. En general, un referente importante surge del estudio de estas políticas públicas para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones, en la cual se hace especial énfasis en el estudio de fenómenos de variación y cambio como una posible manera de abordar el estudio de este concepto matemático en el aula de clase.

Ahora bien, en relación con la puesta en acto del AD para el diseño de la UD, en el análisis de contenido que ahí se contempla se realizó, en primera instancia, un estudio de la estructura conceptual del concepto matemático abordado. Para ello, se puso especial énfasis tanto en la estructura matemática³ que el concepto configura y aquella de la que este forma parte, como en

³Se asume este concepto en el sentido propuesto por Gómez (2007), el cual se caracteriza porque: a) el interés de la exploración se centra en el contenido matemático escolar; b) esta exploración enfatiza en las relaciones que se establecen en las estructuras matemáticas relacionadas con un concepto y c) se aborda

las relaciones conceptuales que se dan cita entre la diversidad de conceptos que permiten configurar las dos estructuras. Además de esto, se hizo un estudio del concepto matemático escolar atendiendo a tres campos o dimensiones complementarias: conceptual, procedimental y actitudinal; lo que permitió el reconocimiento de términos, notaciones, convenios, resultados, conceptos, destrezas, razonamientos y estrategias que se configuran a partir del aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Todo lo anterior permitió no solamente exhibir los conceptos junto con sus relaciones que emergen en el estudio del objeto matemático en cuestión, sino también, considerar elementos importantes que se presentan en su aprendizaje.

Dentro de este mismo análisis se contempló el análisis histórico del concepto matemático, para lo cual, dos momentos históricos que se consideraron claves en la constitución de las ideas algebraicas en general y de las ecuaciones en particular fueron estudiados, el álgebra árabe en los trabajos de al-Khwarizmi, y la del Siglo XVII en los trabajos de Descartes. Además de esto, se realizó también algunas consideraciones previas a estos dos momentos tomando como base el trabajo de los babilónicos y el trabajo de Cardano & Vieta, respectivamente. En particular se hizo especial énfasis en las maneras como los babilónicos resolvían ecuaciones de primer grado; los rasgos de una teoría de ecuaciones que se pudo develar en el trabajo del árabe; el propósito de Cardano al estudiar las ecuaciones, junto con algunos obstáculos que para la época existían y tensionaban el tratado que este italiano intento consolidar; los aportes de Vieta al trabajo algebraico; y los elementos fundamentales de la obra cartesiana que le permitieron a su autor resolver diversos problemas de orden geométrico, en donde las ecuaciones tuvieron capital importancia. De este estudio importantes consideración de orden didáctico se lograron obtener, entre ellas, que la necesidad de generalizar y dar solución a ciertos problemas de manera cada vez más estandarizada, fue una ruta efectiva para la construcción de ecuaciones; que el álgebra escolar debería seguir la aproximación de la solución de problemas y enfocarse en la construcción y resolución de ecuaciones; que el estudio de las ecuaciones debería, al menos inicialmente, estar ligado a referentes geométricos y aritméticos; que es necesario poner a dialogar el campo semántico y sintáctico de las ecuaciones de primer grado para que de esta forma cobre sentido en los estudiantes los tratamientos simbólicos que realizan, entre otras.

Un tercer organizador que hizo parte del análisis de contenido, fue el estudio de los sistemas de representación, en este se puso especial interés en tres sistemas de representación que permiten dar cuenta de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, estos son: el lenguaje natural, el simbólico algebraico, y el gráfico funcional. En el primero de estos se hizo énfasis en el estudio de campos de enunciados que dan cuenta del concepto matemático en cuestión y de distintos fenómenos asociados al proceso de traducción de este sistema al simbólico-algebraico; en el segundo, se presentaron algunos rasgos distintivos de las ecuaciones aritméticas y algebraicas en el sentido propuesto por Gallardo & Rojano (1988), y el tercero de los sistemas estudiado toma en consideración una perspectiva funcional para la comprensión de las ecuaciones de primer grado, esto es, como una igualdad de dos relaciones funcionales. El estudio de estos tres sistemas de representación permitió realizar consideraciones importantes en torno a la articulación de entre ellos, las cuales, por supuesto, se recogen en el diseño de la UD.

El cuarto y último organizador del currículo abordado en este análisis fue el fenomenológico, este permitió tomar en cuenta el campo de fenómenos para los cuales las

con un sentido “informal”. En este orden de ideas, se debe resaltar que no se pretende aquí la idea de estructura matemática en el sentido del estructuralismo del grupo Bourbaki

ecuaciones de primer grado con una incógnita real hace las veces de modelo matemático, pero además, estudiar las situaciones, contextos y subestructuras que distintos fenómenos dan a lugar. Tal estudio permitió delimitar estos tres elementos que se privilegiaron en el diseño de la UD. Así, las situaciones consideradas fueron de tipo personal, educativa y matemática; el contexto fue el de resolución de problemas; y las subestructuras presentadas de tipo $ax + b = c$, $ax = b$ y $ax + b = cx + d$.

El análisis cognitivo desarrollado permitió delimitar las expectativas de aprendizaje que se tenían en torno al diseño de la UD, y además, las dificultades y errores que se preveían podían encarar los estudiantes al trabajar la unidad. El primer asunto permitió concretar los procesos generales que, de acuerdo con las políticas públicas nacionales, eran relevantes para el diseño: estos fueron: la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, además de ello, se plantearon tipos de habilidades y sus desempeños asociados para el desarrollo de la unidad didáctica, así como los propósitos para los cuales fue propuesta. En relación con el segundo asunto, se debe resaltar que tomando en consideración la literatura existente en didáctica del álgebra interesada particularmente en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se propuso una serie de dificultades y errores asociados a estas, esto ciertamente dio pautas para el diseño de las actividades que hicieron parte de la unidad, pues dichas actividades se plantearon pensando en atender muchas de las dificultades y errores previstos.

El análisis de instrucción, tal y como se anotó, tuvo por objetivo el diseño de la unidad didáctica, es decir, conformar el grupo de actividades y tareas que se configuraron para la enseñanza y aprendizaje del concepto matemático en cuestión, pero además, caracterizar los dos enfoques que se privilegiaron para tal diseño, el de resolución de problemas, favorecido por el estudio histórico y varios de los antecedentes consultados, y el funcional, que se toma consideración a partir de las propuestas de políticas públicas nacionales, en donde se proponen, entre otras cuestiones, el estudio de fenómenos de variación y cambio para el desarrollo de pensamiento variacional. Es importante resaltar que, de acuerdo a los objetivos trazados en la investigación y las preguntas planteadas en la misma, en análisis de actuación no fue realizado, pues la implementación de la UD no se llevó a cabo con los estudiantes.

En síntesis, el trabajo metodológico desarrollado permitió la configuración de una unidad didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, lo que a su vez fue un instrumento, junto con los talleres, para el trabajo de campo con los maestros estudio de caso. Lo anterior, es decir, el diseño de la UD y el trabajo con los maestros, permitió realizar importantes consideraciones en torno a los conocimientos didácticos que se considera un profesor demanda para diseñar y gestionar unidades didácticas relativas al concepto matemático en cuestión, y a los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos que se lograron identificar en los maestros seleccionados para la investigación.

Discusión de resultados y conclusiones

A partir de la investigación realizada, se reportan a continuación algunos resultados y conclusiones obtenidas:

Se logró identificar que desde el punto de vista histórico un profesor debería tener en cuenta que la solución de problemas ha sido el método por excelencia para la actividad algebraica, en particular, para la emergencia de las ecuaciones; que el referente geométrico y aritmético permitieron dotar de campo semántico el sistema de símbolos algebraicos y sus

tratamientos; que la consolidación de un sistema propiamente simbólico-algebraico fue una práctica lenta y producto de múltiples actividades del hombre; que la búsqueda de mayores niveles de generalidad en el estudio del álgebra fue fundamental para su consolidación; que en el estudio de las ecuaciones se proponen y presentan relaciones entre su estructura, sus raíces y grado; que es posible usar con fines didácticos el método cartesiano para la solución de ecuaciones; y que estas se pueden plantear, tal como lo hizo Descartes, desde una perspectiva funcional.

Desde la perspectiva fenomenológica es importante que el profesor reconozca que es fundamental identificar los fenómenos para los cuales las ecuaciones de primer grado son un modelo matemático que permite describirlos, expresarlos y cuantificarlos; la diversidad de estos permite que sean susceptibles de experiencia, de estudio en las matemáticas mismas o en otras ciencias, tales como fenómenos de determinar edades, precios, cantidades, de medidas, de variación y cambio en algún contexto particular, entre otros. Cada uno de estos fenómenos devela subestructuras particulares como $ax = b$, $ax \pm b = c$ o $ax \pm b = cx \pm d$ de la estructura de ecuación de primer grado, motivo por el cual se deben propiciar espacios en el aula para abordarlas de manera articulada y en relación con el estudio de fenómenos en contextos variados.

Se identificó desde el estudio de las representaciones que el profesor debe tener en cuenta que es indispensable, tal como lo corroboran múltiples investigaciones, la necesidad de articular distintos sistemas de representación para el estudio de las ecuaciones de primer grado, y que si bien es el sistema simbólico-algebraico es potente para representarlas y tratarlas, su estudio no puede quedar reducido a las transformaciones posibles en dicho sistema. Además de esto, es también necesario que el profesor reconozca la complejidad misma que se reviste en la traducción de un sistema de representación a otro, que van desde la designación misma de todas las cantidades involucradas en el problema hasta el planteamiento de la igualdad; y que atender el estudio de las ecuaciones desde un enfoque funcional, en correspondencia con el llamado realizado por los referentes curriculares colombianos, puede permitir abordar el sistema de representación gráfico – cartesiano, haciendo especial énfasis en los procesos de variación y en que la solución de las ecuaciones en este sistema está dada por la abscisa del punto de intersección de las rectas que representan las relaciones funcionales del fenómeno estudiado.

Desde el punto de vista matemático el profesor requiere saber que la enseñanza/aprendizaje de las ecuaciones de primer grado articula una diversidad de conceptos, procesos, y propiedades tales como: el concepto de igualdad como relación de equivalencia, el concepto de incógnita, igualdad, raíces o soluciones, grado de la ecuación; el proceso de resolución de estas y, con ello, las propiedades uniforme de la igualdad respecto a la suma y la multiplicación en \mathbb{R} , que, junto con los axiomas de este conjunto numérico que conforman un grupo abeliano, validan matemáticamente la producción de ecuaciones equivalentes; además, se debería re-conocer que estos y otros conceptos se articulan para formar redes complejas de conocimiento en torno a conceptos más generales como el de ecuación de primer grado con una incógnita real, y como a su vez estas redes se articulan con otras, motivo por el cual el maestro debe tener una buena formación matemática y contar con la disponibilidad de materiales que le colaboren en esta tarea.

Se logró identificar que para el diseño de actividades de aula en torno a las ecuaciones de primer grado con una incógnita es necesario que el maestro identifique, desde su experiencia y la investigación en didáctica del álgebra, la pluralidad de dificultades que enfrentan los estudiantes cuando este concepto se vuelve objeto de enseñanza y aprendizaje; las cuales se pueden clasificar

de manera general en tres grandes grupos, las que surgen en la traducción de un sistema de representación a otro, las que emergen en las transformaciones del sistema simbólico - algebraico para hallar sus raíces y las que se presentan en la validación de dicha raíz; y que todas estas dificultades a su vez proponen una gran cantidad de errores en las producciones de los estudiantes.

En la Unidad Didáctica planteada se logra articular elementos fundamentales que surgieron del análisis didáctico desarrollado sobre las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, de tal forma que la propuesta rompe con esquemas mecánicos y rutinarios de aprendizaje sin sentido de este concepto matemático. Sin embargo, es evidente que el diseño realizado no cristaliza todos los conocimientos didácticos fruto del análisis didáctico realizado, empero, sí confluyen elementos fundamentales que hacen posible brindar una pauta y orientar las prácticas de diseño de situaciones aula por parte de los maestros en ejercicio. En este sentido, la Unidad didáctica realizada es “una” propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las ecuaciones de primer grado y no “la” propuesta, pues no agota el estudio realizado ni desconoce la posibilidad de articular otros organizadores del currículo que nutran la propuesta generada.

La propuesta de Unidad Didáctica presenta costos y consecuencias didácticas importantes de resaltar: una concepción amplia de currículo, tiempos necesarios para el aprendizaje, los roles de los agentes del sistema didáctico – maestro y estudiantes – la concepción de la actividad matemática misma, y tal vez a título personal la más compleja, la apropiación de elementos teóricos y conceptuales fundamentados por parte de los maestros.

En relación con los conocimientos matemáticos que manifiesta los maestros al analizar la UD, fue posible evidenciar que para uno de ellos (maestro 1) el reconocimiento del concepto de ecuación que se moviliza en dicha unidad fue imperceptible, y además, no logra apreciar la diversidad de conceptos y procedimientos que en las situaciones confluyen debido a que estos no se exponen de manera explícita en las situaciones, en general, él antepone las características que presentan las situaciones para la enseñanza del concepto matemático que moviliza ante los conceptos y procedimientos que en ellas se presentan. Otro de los maestros (maestro 2) pudo reconocer algunos conceptos que son fundamentales en las situaciones tales como el de ecuación, ecuación equivalente, variable, función, raíz de la ecuación y dominio de la variable, y además, logra reconocer procedimientos que también son relevantes en la Unidad. No obstante, es importante señalar que en sus respuestas este maestro deja por fuera otros conceptos que también se presentan en las situaciones y que cobran especial sentido, como por ejemplo, el de igualdad y grado de la ecuación. Finalmente, el maestro restante (maestro 3) logró identificar conceptos y procesos propiamente matemáticos, algunos de los cuales son centrales en las situaciones pero otros no tanto. De igual manera, se notó que este maestro presenta algunas confusiones entre algunos conceptos o procedimientos matemáticos y representaciones que emergen de las situaciones.

Desde el punto de vista didáctico fue posible concluir que el maestro 1 manifestó conocimientos en torno a los contextos y fenómenos que presentan las situaciones, asimismo, que conoce dificultades centrales que se presentan en el proceso de traducción de un sistema de lengua natural a uno propiamente simbólico-algebraico en relación con las ecuaciones. De igual manera, es también necesario señalar que este maestro tiene cierto desconocimiento de las representaciones que se hacen uso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para acceder a sus objetos de estudio.

Desde el punto de vista didáctico es posible indicar que el maestro 2 conoce tipos de representaciones matemáticas y el proceso de articulación o traducción que debe haber entre ellas para contemplar el estudio de las ecuaciones, además de tener conocimiento frente a algunas dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de resolución de ecuaciones. También es posible reconocer cómo este maestro reconoce aspectos importantes del análisis fenomenológico de las ecuaciones de primer grado que se presentan en la UD, sin embargo, aunque valora el estudio de fenómenos de variación y cambio en la unidad y aspectos fundamentales del enfoque funcional para el estudio del álgebra no logra identificar cómo a partir de ese estudio es posible llegar a las ecuaciones de primer grado.

En relación con los conocimientos didácticos que el maestro 3 manifestó al analizar la Unidad es posible indicar que muestra cierto conocimiento por el proceso de modelación y resolución de problemas, reconociendo sus presencias en las situaciones. Asimismo, que tiene conocimiento frente a algunas representaciones que se usan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este mismo maestro también reconoce algunas dificultades que se presentan en la articulación entre sistemas de representación. Asimismo, también manifestó que reconoce distintas interpretaciones para las variables, resaltado el hecho que se presente en una misma situación la variable como incógnita específica y en relación funcional. Es posible también concluir que él reconoce, aunque sea de manera implícita, algunos de los contextos en los que se presentan las situaciones problemáticas.

En relación con los conocimientos de tipo curricular que manifiestan los maestros 1, 2 y 3 fue posible evidenciar que, aunque sea de manera implícita, el primero de ellos reconoce la coherencia horizontal que presenta las situaciones problemáticas en términos de los estándares que moviliza, el 2, por su parte, da cuenta de la coherencia vertical que se presenta en las situaciones que la componen y el 3 reconoce algunas relaciones entre estándares de distintos pensamientos y en distintos conjuntos de grado, motivo por el cual es posible afirmar que él identifica la coherencia vertical y horizontal que se presenta en la Unidad.

Limitaciones del estudio y prospectiva

Queda abierta la posibilidad de seleccionar otros organizadores del currículo que enriquezcan la propuesta realizada, pero además, implementar la unidad didáctica con estudiantes con el ánimo de identificar tanto el alcance que presenta en relación con las expectativas de desempeño, como las dificultades que puede generar en los estudiantes para el aprendizaje del concepto matemático que moviliza. De este modo, está latente la posibilidad de retroalimentar, ajustar y validar el diseño de UD que en este trabajo se presenta. En este sentido, la investigación reportada aquí deja pendiente realizar el análisis de actuación cerrando así el ciclo del análisis didáctico para dar paso a uno nuevo.

Referencias

- Amerom, B. (2002). Learning and teaching of school algebra. En B. Amerom, *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* (pp. 3-32). Holanda: Freudenthal Instituut.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.

- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Jaén: SEIEM.
- Escalante, V., & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transitions from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 19-25.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, 9, 155-188.
- Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemáticas*, 11(1), 77-88.
- Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros, director: Juan D. Godino. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26(46), 483-511. Rio Claro.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Lupiañez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada, España.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1993). *SABER. Sistema nacional de la evaluación de la calidad de la educación. Primero resultados: matemáticas y lenguaje en la básica primaria*. Santafé de Bogotá, D.C.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1997). *Análisis y resultados de las pruebas matemáticas. TIMSS*. Santafé de Bogotá, D.C.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Rico, L., & Segovia, I. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.
- Rico, L. (Coord.) (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje: nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 12(1), 45-56.
- Socas, M., & Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar. *UNO: revista de didáctica de la matemática*, 14, 7-24.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación matemática*, 18(3), 5-38.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. *Educación Matemática*, 8(2), 33-40.