

# UN ACERCAMIENTO ENTRE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN Y LAS TAREAS AUTÉNTICAS, PROPUESTA DE UN PROCESO DE MODELIZACIÓN DE LA FUNCIÓN SENO

**Percy Luján Rosadio**

**Cintya Sherley Gonzales Hernández**

percy.lujan@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

## Resumen

*El presente estudio recoge los planteamientos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a través de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), así como, las Tareas Auténticas formuladas desde la perspectiva del Aprendizaje Auténtico, con la finalidad de buscar elementos afines de tal manera que pueda generarse un acercamiento entre ambos planteamientos, y plantear situaciones o secuencias didácticas de mayor significado dirigidas a la enseñanza escolar. En el desarrollo del estudio se realiza una reflexión teórica acerca de las características en común de ambas posturas y se propone un proceso de modelización en torno una situación real donde se involucra la función seno y coseno, que integra tanto los procedimientos metodológicos de la formulación de los REI, así como, las características particulares de las Tareas Auténticas.*

**Palabras clave:** *Recorridos de estudio e investigación, tareas auténticas, función seno y coseno.*

## Introducción

Actualmente se vienen desarrollando y proponiendo mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje desde distintos marcos de investigación, entre ellos desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) perteneciente al programa epistemológico de investigación en enseñanza de las matemáticas en cuyo marco se plantea el estudio de la matemática en dos dimensiones, una vinculada a la Organización Matemática y otra relacionada a la Organización Didáctica. Desde este último aspecto se propone como dispositivo didáctico de mejor alcance los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), capaces de hacer frente al fenómeno denominado pedagogía de la monumentalización del saber y la visita de obras.

Así mismo, desde el marco del Aprendizaje Auténtico, se plantea las actividades denominadas Tareas Auténticas, las cuales vienen siendo empleadas y sugeridas inclusive desde el Ministerio

de Educación, como una oportunidad para poder obtener el logro de desempeños y el desarrollo de competencias matemáticas.

Si bien es cierto, ambas propuestas parten de concepciones donde existen diferencias importantes, el presente estudio realiza una reflexión teórica desde ambos enfoques e identifica elementos en común, para luego proponer situaciones de enseñanza y aprendizaje significativos y con mayores argumentos. En ese sentido se presenta un diseño de REI como parte del trabajo de tesis de maestría realizado por Lujan (2019), el cual por sus características se adecúa además a las cualidades de las Tareas Auténticas.

### **Aspectos teóricos**

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los REI planteado por Chevallard (2004, 2009) desde la pedagogía del cuestionamiento del mundo, proponen como punto de partida una cuestión generatriz  $Q$  de gran potencial, el cual es estudiado por un equipo de alumnos  $X$  y dirigidos por un profesor o equipo de profesores  $Y$ , en búsqueda de una respuesta  $R^*$ . Se produce entonces un sistema didáctico de la forma  $S(X;Y;Q)$  en el que se abordan distintas subcuestiones que provocan subrespuestas, obras y medios, cuya interacción debe producir una respuesta central  $R^*$  a la pregunta generatriz  $Q$ . García(2005) reconoce este funcionamiento; donde la actividad matemática está caracterizada por un conjunto de cuestiones problemáticas en torno a cierto ámbito de una realidad matemática o extramatemática, y para cuya respuesta es necesario el despliegue creciente de un conjunto de praxeologías; como características de una actividad de modelización matemática.

En ese sentido un REI es el camino que se da dentro de un proceso de modelización matemática, desde la cuestión generatriz hasta la respuesta central  $R^*$ , el cual brinda sentido y una razón de ser a los aprendizajes obtenidos por los estudiantes, teniendo la capacidad de enfrentar de manera sólida al fenómeno de la monumentalización del saber matemático y la visita de obras.

Para autores como Parra, Otero y Fanaro, (2013) los REI presentan algunas características esenciales:

- Los REI se generan por una pregunta  $Q$ , denominada pregunta generatriz, la cual es capaz provocar numerosas subcuestiones, obras, y respuestas, cuya obtención de la respuesta final moviliza un gran número de saberes incluido los procedentes de otras disciplinas, de ahí que los REI puedan servir para diseñar un programa de estudios.
- Los REI evitarían la enseñanza de la matemática como un conjunto disperso de elementos e impedirían la pérdida de sentido y del origen de las preguntas que allí se estudian. Esta característica, permite que la modelización matemática esté presente en los sistemas de enseñanza a través de los REI.

- Los REI desarrollan un proceso de modelización que involucra básicamente cinco momentos: observar las respuestas dadas, analizarlas, evaluarlas, desarrollar una nueva respuesta, y finalmente, defender la nueva respuesta producida.
- Los REI al ser desarrollados expresan gestos didácticos denominados dialécticas, cuya interacción interna aparentemente contradictoria permite la obtención de saberes y el avance del REI.

### *Las Tareas Auténticas*

Por otro lado, autores como Herrington, Reeves, Oliver y Woo (2004), proponen un enfoque centrado en el estudiante a través de las Tareas Auténticas, como una mejor oportunidad de producir aprendizajes. Dichas actividades al poseer autenticidad, complejidad e incertidumbre pueden proporcionar significatividad a saberes al desplegarse en la resolución de problemas reales de forma colaborativa, de donde se desprendan productos y una evaluación integral y formativa de mediano y largo plazo, adecuándose también a planificaciones curriculares dirigidas a una unidad, módulo o curso.

Herrington, Oliver y Reeves (2002) revisan la producción de distintos autores referentes a las Tareas Auténticas e indican las siguientes características particulares:

- Tienen relevancia en el mundo real.
- Se presentan abiertas, en el sentido de que requieren que los estudiantes definan las tareas y subtareas necesarias para completar la actividad.
- Las actividades auténticas expresadas como tareas complejas deben ser investigadas por los estudiantes durante períodos de tiempo significativos (unidades, bimestres, ciclos), no a corto plazo.
- Pueden ser abordadas desde diferentes perspectivas, utilizando una variedad de recursos.
- Brindan la oportunidad de realizar actividades colaborativas en contacto con el mundo real.
- Se pueden integrar y aplicar de manera interdisciplinaria.
- Se adecuan con la evaluación formativa.
- Culminan en la creación de un producto completo.
- Las actividades auténticas permiten soluciones competitivas y diversidad de resultados.

Como podemos observar son muchos las propiedades en común entre los REI y las Tareas Auténticas, sin embargo, una observación importante podría alinearse a lo manifestado por Chevallard (2013) cuando señala que las obras obtenidas por un REI no están previamente establecidas a diferencias de otras propuestas de investigación empleadas en las escuelas, en

donde se busca reunir a estudiantes para estudiar una obra brindada indirectamente por el docente.

Al respecto se puede decir que de acuerdo a las características de las tareas auténticas señaladas por Herrington, Oliver y Reeves (2002), estas poseen rangos de libertad cercanos a los teóricamente planteados en los REI, y distan a su vez de otros planteamientos donde se promueve la investigación o indagación para la obtención de aprendizajes de manera más dirigida. Cabe señalar además que el REI surge como mejora de los procesos dados en la Actividad de Estudio e Investigación (AEI) los cuales presentaban limitaciones respecto a la topogénesis de los estudiantes, es decir, respecto a su accionar autónomo al momento de la construcción y producción de saberes. En ese sentido, los REI procuran una mayor procognición y potestad para los estudiantes, sin embargo, no son pocas las investigaciones que describen que al momento de realizar un REI se presentan aún tanto en los estudiantes como en los docentes rasgos del paradigma de la monumentalización del saber, donde se espera la pauta y validación del docente como autoridad para poder dar cada paso. Es por ello que en las investigaciones realizadas con los REI se ha observado niveles distintos en la libertad o restricción del accionar del docente y del estudiante (topogénesis) siendo algunos trabajos más flexibles que otros en estos aspectos señalados, de ahí que sea necesario realizar más investigaciones que puedan otorgar mayor claridad acerca de las condiciones efectivas para implementar un REI.

Por lo mencionado se puede considerar que tanto lo REI y las Tareas Auténticas poseen rasgos sustantivos en común, en la formulación y desarrollo, respecto al carácter abierto de tratamiento de las tareas, a períodos de tiempo de mediano o largo plazo, a ser abordadas desde distintas perspectivas y obteniendo diversos resultados, a la posibilidad de desarrollarse de manera interdisciplinaria y tomando problemas del mundo real. No obstante, la fortaleza en el planteamiento de los REI lo constituye el estudio de la organización matemática de los objetos involucrados, identificando y articulando praxeologías, las que en conjunto y dentro de un proceso de modelización fortalecen la consecución de saberes con sentido y con una razón de ser, mientras que en las tareas auténticas no se hace explícito esa necesidad.

### **Procesos metodológicos para el diseño de un proceso de Modelización matemática.**

Macías y Romo-Vásquez (2014), Guzmán (2016), Siero y Romo-Vásquez (2017) plantean una metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en la modelización matemática en el campo de la ingeniería, las que pueden adaptarse de manera particular para el presente trabajo para el quinto grado del nivel secundario:

- Elección del contexto matemático o extra matemático de la actividad
- Análisis praxeológico
- Análisis de la organización matemática identificada y su relación con la enseñanza
- Formulación del entorno en donde la cuestión generatriz será presentada

## Diseño del proceso de modelización matemático

### *Elección del contexto extramatemático de la actividad*

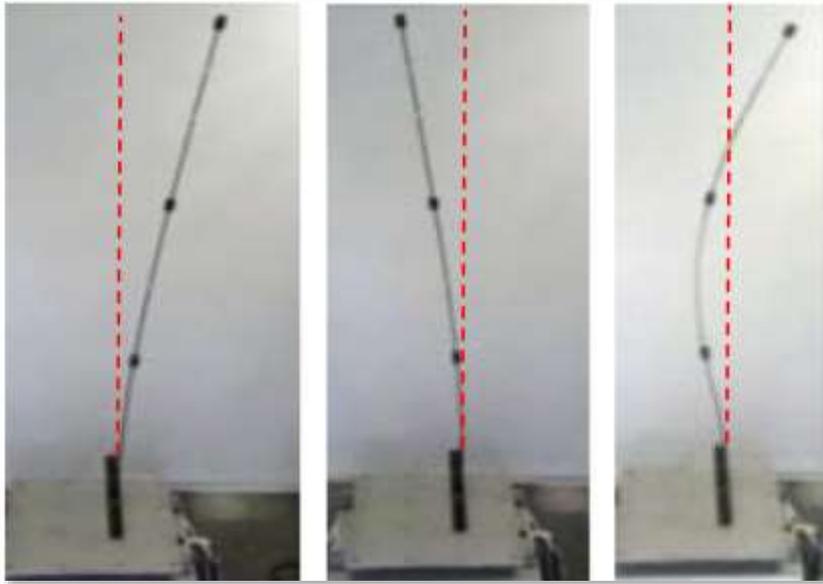
Para el presente estudio se recoge la propuesta de Lujan (2019), quien plantea una problemática que pone atención sobre el movimiento de los edificios como respuesta frente a un sismo, correspondiente dentro del campo de la ingeniería estructural. Al respecto Domínguez (2014) manifiesta que los edificios se mantienen en movimiento constante, por la acción del viento, la vibración del paso de vehículos, etc., sin embargo, es frente a un sismo donde el movimiento del edificio se hace perceptible y sus estructuras se ponen a prueba, siendo, los desplazamientos horizontales los más críticos. En el caso de que los edificios poseen un solo nivel y actúen como una sola unidad, vibran desplazándose a cada lado del eje vertical.



*Figura 1. Vibración de un pórtico de un piso o péndulo simple.*

*Fuente: Domínguez (2014, p.2)*

Por otro lado, también existen edificaciones con varios pisos o niveles, en ese caso la primera reacción de la estructura es conjunta y oscila como si fuera una sola unidad de un lado a otro del eje vertical que parte del punto de apoyo, sin embargo, paulatinamente la estructura se va deformando hasta que algunos segmentos se encuentran a un lado del eje vertical mientras otros se encuentran al otro lado, tal como se aprecia en la figura 2.



*Figura 18. Oscilación de péndulos segmentados*

*Fuente: Adaptado de Domínguez (2014, p.4)*

### *Análisis praxeológico*

Es necesario además determinar las praxeologías en el contexto de la ingeniería estructural, ello implica, a su vez, abordar el movimiento oscilatorio en el campo de la física. En ese sentido, a continuación, se presenta algunos elementos del bloque tecnológico-teórico, descritos a partir de las publicaciones de Medina (2009) y Silva y Farina (2016).

Ambos autores coinciden en que la proyección de la posición de un cuerpo que posee un movimiento circular uniforme sobre el eje de abscisas se obtiene un desplazamiento horizontal equivalente al de un cuerpo en movimiento armónico simple y viene dado por  $x = A\cos\theta$ .

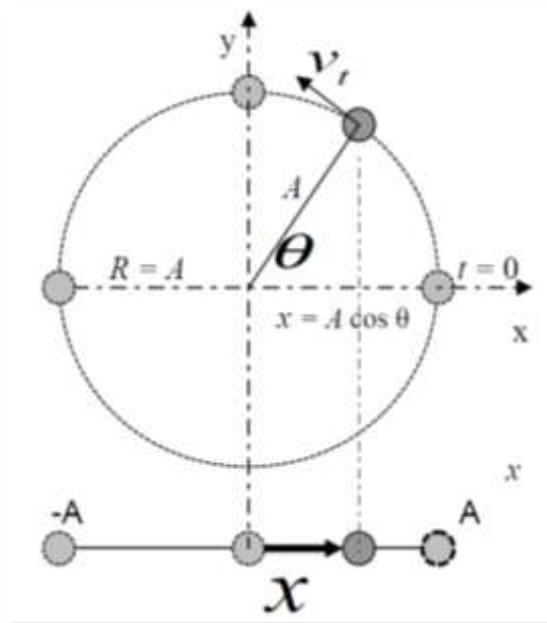


Figura 3. Relación entre el MAS y el MCU.

Fuente: Silva y Farina (2016. p. 5)

Sin embargo, dado que  $\theta = \omega t + \theta_0$ , es decir la posición angular  $\theta$  equivale a la velocidad angular  $\omega$  multiplicada por el tiempo  $t$ ; la componente  $x$  del vector que describe el movimiento de la partícula está dada por:

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

Donde: A: Amplitud o elongación máxima

$\theta_0$ : Fase inicial, su valor determina la posición en  $x$  para  $t = 0$ .

#### *Análisis de la organización matemática identificada y su relación con la enseñanza.*

Para poder analizar el proceso de estudio de la función seno y coseno dentro de una organización didáctica OD, es necesario considerar la organización matemática OM en torno a la función seno y coseno. Para ello, y conforme lo expresa Chevallard (1999), se propone un modelo descriptivo que sirva de referencia denominado Organización Matemática, el cual indica de manera hipotética y provisoria el probable recorrido matemático que emprenderán y abordarán los estudiantes durante el proceso de investigación. A continuación, se indica una organización praxeológica matemática de referencia señalando además las instituciones involucradas y las principales cuestiones previstas.

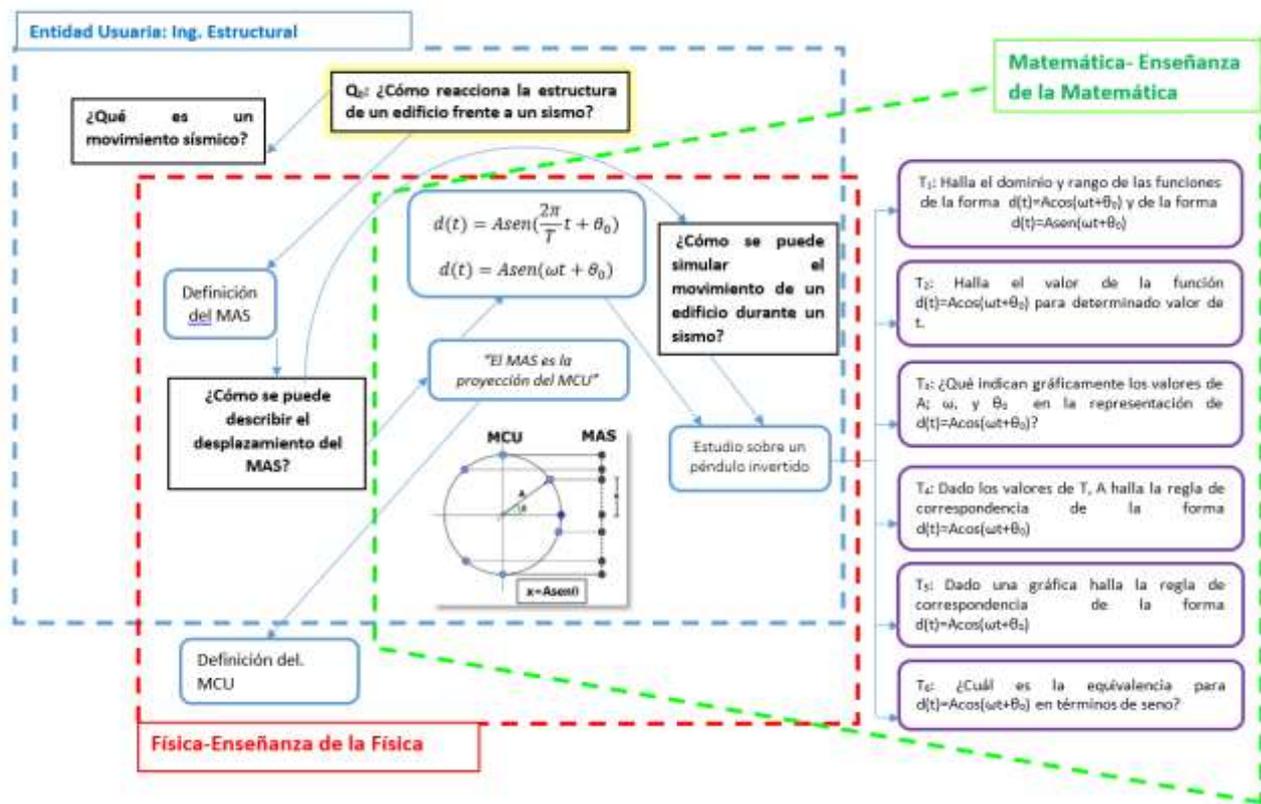


Figura 4. Análisis del modelo matemático identificado y su relación con la enseñanza.

Dentro del análisis previo del desarrollo del REI, se espera que los estudiantes asuman la cuestión generatriz  $Q_0 = \text{¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?}$  y se contacten principalmente con el Movimiento Armónico Simple (MAS), el cual para ser descrito se relaciona con el Movimiento Circular Uniforme (MCU). Es en esta relación donde emerge la función seno, a partir de la cual se pueden realizar nuevos recorridos a partir de subcuestiones hasta llegar a una organización matemática local que incluye tipos de tareas articuladas a la función seno y coseno, todo ello se desenvuelve involucrando la presencia de instituciones partiendo desde la institución usuaria la ingeniería estructural donde se ubica la cuestión generatriz, luego a la Física como institución interdisciplinaria del saber pero luego aterrizando finalmente en la Matemática como institución disciplinaria y de enseñanza, en donde se atenderán la organización praxeológica.

#### Formulación del entorno en donde la cuestión generatriz será presentada

Los análisis realizados en las tres etapas anteriores permiten presentar una cuestión generatriz capaz de generar un cuestionamiento cada vez más profundo, a partir de la cual se obtengan una secuencia de cuestiones y respuestas derivadas. El entorno en el cual la cuestión generatriz será presentada es el siguiente:

“Actualmente podemos ver tanto en las noticias como en los simulacros escolares mayor atención por la prevención frente a los sismos. Nuestro país se encuentra en una zona sísmica y no es extraño experimentar temblores, algunos de gran magnitud que han provocado grandes pérdidas, humanas y materiales, la mayoría de veces causado porque buena parte de las edificaciones son proclives a desplomarse por su antigüedad o la negligencia al momento de haber sido construidas. Sabemos además que nuestra capital, se encuentra en silencio sísmico por muchos años, lo que quiere decir que se espera pronto un sismo de alta magnitud. En ese sentido, se les propone realizar una primera investigación en la que deben responder:

**Q<sub>0</sub>: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?**

Deberán además seguir las siguientes consignas:

- Ver más allá de los aspectos superficiales
- Sistematizar la información
- Buscar aportar o resaltar algún conocimiento de utilidad
- Tomar decisiones

Para caracterizar el proceso de desarrollo a priori del REI, se indicarán seis etapas que no coinciden necesariamente con los momentos didácticos, pero sí expresan partes del proceso de investigación desarrollado por los estudiantes dadas las circunstancias particulares que posee, es decir al plantear una problemática extra matemática y al tener un carácter interdisciplinario con la Física, las praxeologías matemáticas no son abordadas en los primeros momentos sino posteriormente. Estas etapas son las siguientes:

1. Exploración de la problemática.

En donde es presentada la situación y se generan las primeras subcuestiones.

2. La relación entre el MAS y el MCU como una razón de ser para la función seno.

3. Construcción de una regla de correspondencia para el movimiento armónico simple.

4. Simulación y validación de la regla de correspondencia, a través de un trabajo con péndulos invertidos y captura de fotogramas y otros recursos que afloren y que permitan a los estudiantes realizar mediciones, tabulaciones, establecer reglas de correspondencia, así como validarlas.

5. Estudio de la regla de correspondencia tomando en cuenta a sus parámetros.

6. Transferencia a otras situaciones.

Se estima entonces que los estudiantes puedan seguir estas etapas en su investigación, de tal manera que se puedan analizar sus acciones a futuro, dentro de un marco de acción, en los que

seguramente emanarán gestos didácticos particulares los cuales pueden ser motivo de un trabajo de investigación adicional.

### **Consideraciones finales**

Teniendo en cuenta las características formuladas en los aspectos teóricos se puede afirmar que existen elementos afines entre los REI y las Tareas Auténticas, respecto al planteamiento y a las consignas de desarrollo, por medio de un proceso de investigación o indagación de un problema en el mundo real, sin embargo, los REI exigen además un estudio de la organización matemática involucrada, lo que no es declarado en el caso de las tareas auténticas.

Se ha planteado un escenario didáctico referido a un REI y que se adecúa a las cualidades de las Tareas Auténticas, ello permitirá que pueda ser observado desde ambos enfoques dando apertura a un análisis más amplio.

### **Referencias**

- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=45](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45)
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. IUFM Toulouse, Francia. Recuperado de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=161](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161)
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.
- Dominguez, M. (2014). Períodos de vibración de las edificaciones. *Revista Arquitectura e Ingeniería*, 8(2), 1-8.
- García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis de doctorado). Universidad de Jaén, Jaén, España.
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros*. (Tesis de doctorado). Instituto Politécnico Nacional, México, D. F., México. Recuperado de <https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/26322>.
- Herrington, J., Oliver, R., & Reeves, T.C. (2002). *The suspension of disbelief in authentic online learning environments*, Paper presented at the Australasian Society for Computers in Learning in Tertiary Education Conference, Auckland, New Zealand.

- Herrington, J., Reeves, T. C., Oliver, R., & Woo, Y. (2004). Designing authentic activities in web-based courses. *Journal of Computing in Higher Education*, 16(1), 3-29.
- Luján, P. (2019). *Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo*. (Tesis de maestría en proceso de sustentación), Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.
- Macías, M. y Romo, A. (2014). Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en la modelación matemática. . *En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 461,469). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Medina, H. (2009). *Física 2*. Recuperado de <http://biblioteca.pucp.edu.pe/fisica-1-y-fisica-2-de-hugo-medina-en-version-digital/>.
- Parra, V. E., Otero, M. R., & Fanaro, M. D. L. Á. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación.
- Siero, L. y Romo-Vázquez, A. (2017). Didactic sequences teaching mathematics for engineers with focus on differential equations. In M. S. Ramírez & M. A. Domínguez (Eds.). *Driving STEM learning with educational technologies*, 129–151.
- Silva, C., & Farina, J. (2016). *7501-16 FÍSICA Oscilaciones Mecánicas*. Recuperado de <https://rehip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/5674/7501-16%20FISICA%20Oscilaciones%20Mec%C3%A1nicas%20.pdf?sequence=2>.