Futuros profesores de matemáticas ejerciendo como tutores

Islenis Carolina **Botello** Cuvides
Universidad Industrial de Santander
Colombia
islenis.botello@gmail.com
Sandra Evely **Parada** Rico
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
sparada@matematicas.uis.edu.co

Resumen

Los programas de formación de profesores de matemáticas deben, entre otros aspectos, desarrollar aproximaciones que preparen a los estudiantes para profesor a aprender desde la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 2007). De aquí que en este documento se muestra el proceso de una investigación cualitativa cuyo propósito es caracterizar los aprendizajes que emergen en los profesores en formación dentro de un programa de seguimiento y acompañamiento académico, en el que ellos fungen como tutores; una experiencia que vislumbra las tutorías entre pares como un puente entre la teoría y la práctica. Para ello, en esta comunicación se presenta la estructura del modelo el cual es aplicado a dos casos de estudio, y se reportan algunos resultados del proceso tutorial en uno de ellos.

Palabras clave: profesores en formación, práctica docente, tutorías entre pares, pensamiento matemático.

Abstract

The programs of formation of professors of mathematics need, among others aspects, to develop approaches that prepare to the students for professor to learn from the practice to teach mathematics (Llinares, 2007). That's why in this document results of a qualitative investigation are exhibited whose intention was to characterize the learning's that emerge in the teachers in formation within a program from pursuit and academic support, in that they act like tutors; a experience that glimpses the positions of a peer tutoring like a bridge between the theory and the practice. For it, in this communication the structure of the model appears which is applied to two cases of study, and some results of the tutorial process in one of them are reported.

Keywords: teachers in formation, educational practice, peer tutoring, mathematical thinking.

Planteamiento del problema

En la universidad donde se desarrolla la investigación que se comunica en este documento (la Universidad Industrial de Santander, UIS, en Colombia), se ha notado con preocupación la alta tasa de deserción académica de sus estudiantes de primer semestre, especialmente los altos índices de deserción y reprobación en materias como Cálculo I (cálculo diferencial o cálculo de una variable). Para enfrentar dicha problemática años atrás la universidad ha planteado diferentes alternativas que han tratado de subsanar de una u otra forma dicha situación; sin embargo, éstas no han logrado generar un impacto relevante frente a este escenario. En Parada (2012) se plantea una serie de alternativas para tratar dicha problemática: alternativas curriculares, de formación de profesores y de atención a estudiantes. Con relación a las dos últimas, se ha asumido dicha problemática como una oportunidad para los profesores de matemáticas en formación y para los estudiantes de Cálculo I, la implementación de tutorías entre pares donde estudiantes para ser profesor de matemáticas funjan como tutores y estudiantes con dificultades en cálculo sean los beneficiarios de las mismas.

En el actual plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS se contemplan tres componentes: el matemático, el didáctico y el complementario; que hasta el final convergen en una práctica docente (realizada en los dos últimos semestres), desaprovechando una potencial articulación entre lo que van aprendiendo los profesores en formación dentro de sus cursos, y la práctica real [con la que se van a enfrentar en sus salones de clase]. Es por ello que en nuestra investigación se planteó la creación de un primer espacio que sirva como puente entre la teoría y la práctica, siguiendo las características que un programa de formación inicial debe presentar según Rico (2004).

Tras ver una problemática como una oportunidad, desde esta investigación se planteó responder a dos preguntas: i) ¿cómo los programas de tutorías académicas en los primeros niveles universitarios pueden constituirse en espacios de formación para los futuros profesores de matemáticas?; ii) ¿qué aprendizajes emergen de las actividades de seguimiento y acompañamiento académico en los profesores en formación?

Marco teórico

En la investigación de la cual se extracta este reporte, no se habla de conocimientos ni saberes, sino de pensamientos. El pensamiento, según Vega (1990), es una actividad global del sistema cognitivo que ocurre siempre que nos enfrentamos a una tarea o problema, con un objetivo y un cierto nivel de incertidumbre sobre la forma de realizarla. Por ello, nos centramos en el análisis de los profesores en formación, específicamente en el pensamiento matemático y en el pensamiento didáctico, esto intentando ver cómo las prácticas docentes preuniversitarias (tutorías entre pares) posibilitan la confrontación de los requerimientos de la práctica real con sus saberes (matemáticos y didácticos).

En la Figura 1 se bosqueja nuestro marco conceptual, el cual nos permitió comprender los elementos teóricos en los que se fundamenta esta investigación y algunas consideraciones tanto para la parte metodológica como del análisis de los datos obtenidos en el trabajo de campo.

Pensamiento matemático escolar. De acuerdo a Parada (2011, p.55) este pensamiento surge de la necesidad del profesor al hacer uso de sus conocimientos de la matemática escolar para desarrollar sus prácticas profesionales: i) proponer tareas; ii) seleccionar, usar y diseñar recursos; iii) comunicarse en el aula; iv) hacer adaptaciones curriculares; v) evaluar; vi) colaborar; y vii) profesionalizarse.

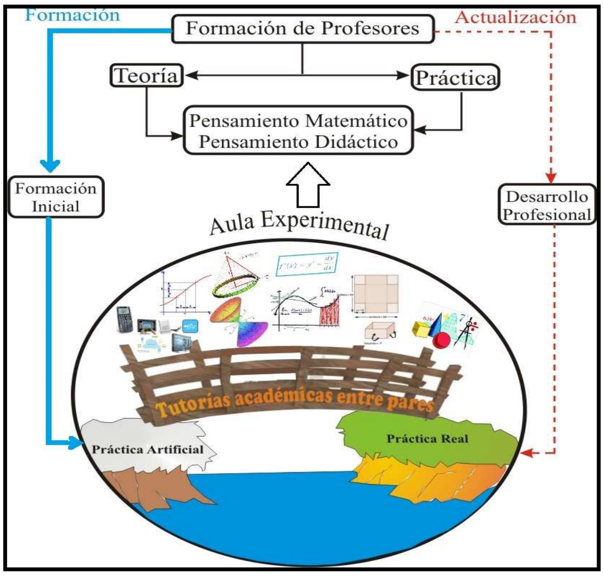

Figura 1. Esquema que condensa los elementos teóricos de la investigación.

Pensamiento didáctico de la matemática escolar. Según Parada (2011) este pensamiento se da cuando el profesor de matemáticas se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes, buscando las formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los alumnos.

Aula experimental. Desde esta investigación acerca de la formación de los futuros profesores de matemáticas, se entiende por aula experimental como el espacio de práctica real y tangible para los profesores en formación (tutores), cuyo objetivo es que ellos construyan el conocimiento necesario para enseñar matemáticas mediante la implementación de sus saberes adquiridos en su formación.

Tutorías entre pares. Para Cieza (2011, p.1) este tipo de tutorías puede ser considerada como una modalidad de “aprendizaje entre iguales”, pero sobre todo como una modalidad de acción tutorial en la que un compañero, más experimentado y conocedor del medio universitario y con mayores competencias a nivel académico, tras un proceso de entrenamiento o formación y a través de un marco de relación asimétrica exteriormente planificado por un equipo de profesores, proporciona ayuda, apoyo, guía, orientación, asesoramiento, supervisión, consejo, acompañamiento y seguimiento a un alumno nuevo y recién llegado a la universidad (primer curso) y por tanto con menos conocimiento de la institución universitaria.

Aspectos metodológicos

La investigación que se está reportando en este documento es de carácter cualitativo y comprendió un trabajo de campo de un año (durante dos semestres académicos consecutivos), con una población conformada por estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que llevan un curso denominado Didáctica del Cálculo. Se sistematizaron los datos obtenidos a partir de: videograbaciones, formatos de seguimiento tutorial, bitácoras, y otros. Para el diseño, recolección, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la alternativa se siguieron las siguientes fases:

Fase 1. Estudio preliminar, este consistió en el análisis del contexto a nivel nacional e internacional, y la exploración de programas tutoriales en la UIS.

Fase 2. Diseño e implementación de un programa tutorial (Atención, Seguimiento y Acompañamiento - ASAE), en esta fase se diseñó la estructura curricular del programa para su posterior implementación.

Fase 3. Análisis de los resultados de la Fase II, de la primera implementación se analizó el funcionamiento del programa y la relación tutor- estudiante.

Fase 4. Rediseño e implementación de un programa tutorial, de la fase anterior se reestructuró el programa para una nueva implementación.

Fase 5. Análisis de los resultados de la Fase IV buscando responder a la segunda pregunta de investigación (¿qué aprendizajes emergen de las actividades de seguimiento y acompañamiento académico en los profesores en formación?).

Para caracterizar dichos aprendizajes decidimos usar como categorías el Pensamiento Matemático y el Pensamiento Didáctico. Reconocemos así que los alumnos-docentes (tutores) que llegan al curso de Didáctica del Cálculo han adquirido saberes propios de ambos pensamientos; no obstante, encontramos que esos saberes pueden constituirse en sus fortalezas y/o debilidades para su futura inserción profesional.

Para analizar los posibles aprendizajes que emergieron en los futuros profesores de matemática formados en nuestra institución, a partir de su participación en el programa ASAE, definimos ciertos criterios que nos ayudaran a analizar sus progresos. Para ello requerimos caracterizar dichas fortalezas en cada pensamiento, así:

Fortalezas en el Pensamiento Matemático (FPM). De acuerdo a Hitt (2005) un sujeto presenta aptitudes en cálculo, las cuales se ven reflejadas en su conocimiento y pensamiento matemático si: i) tiene clara la diferencia entre función y ecuación; ii) entiende la diferencia al hablar de un conjunto continuo y uno discontinuo; iii) comprende el concepto de límite; iv) hace una correcta lectura de gráficas con respecto al límite; v) muestra ideas intuitivas de los conceptos del cálculo diferencial; vi) promueve un pensamiento visual articulado a los procesos algorítmicos. Asimismo para Artigue (1995) es importante que se desarrolle la flexibilidad entre la función vista como un “proceso” y la función vista como una “entidad conceptual”; y comprender las rupturas entre los procesos algebraicos y los procesos subyacentes del cálculo.

En el tema de derivadas, Cortés, García y Núñez (2003) sostienen la importancia de asimilar y comprender los diferentes acercamientos al concepto de derivada (función, límite y la pendiente de la recta tangente); mientras que para Jiménez (2003) se debe: i) se debe comprender la definición clásica de derivada; ii) entender que la derivada es una razón de cambio para cualquier valor permitido de la variable independiente; y iii) la pendiente de la recta tangente a cualquier punto que pertenece a la gráfica de la función.

Fortalezas en el Pensamiento Didáctico (FPD). En diversos reportes de investigación se pueden encontrar ciertos aspectos que caracterizan las fortalezas en el pensamiento didáctico. Se dice que un sujeto presenta fortalezas en este pensamiento sí, por ejemplo resalta la importancia que tiene la transición por las diferentes representaciones de una función (gráfica, tabla, expresión algebraica) en un sujeto (Hitt, 2001); o realiza un tratamiento numérico (tabla de valores) y gráfico del concepto de razón de cambio para abordar el concepto de derivada, un acercamiento que permite crear una idea intuitiva del concepto (Cortés, García y Núñez, 2003).

Se muestra como fortaleza en aquella persona que destaca la importancia al otorgarle significado a: i) el signo "=" en la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; y ii) la demostración en el contexto del tema de límites, para el debido trabajo en el cálculo (Hitt y Páez, 2005). Asimismo, la necesidad de estimular rupturas entre los procesos algebraicos y los procesos subyacentes del cálculo según Artigue (1995). Un aspecto que ha tomado auge con las Tecnologías Digitales (TD), es la implementación de software matemáticos para la construcción de la noción de derivada y así obtener una visualización dinámica de este concepto (Jiménez, 2003).

Como ya lo hemos mencionado un sujeto puede mostrar fortalezas en los pensamientos matemático y didáctico, sin embargo, también puede presentar debilidades en ellos: Debilidades en el Pensamiento Matemático (DPM) o Debilidades en el Pensamiento Didáctico (DPD). Por lo tanto, de lo anterior nos lleva a hablar de cuatro posibles perfiles de los futuros maestros, estos serían: i) el alumno-tutor que posee FPM y FPD; ii) el alumno-tutor quien presenta FPM y DPD; iii) el alumno-tutor que tiene DPM y FPD; iv) el alumno- tutor que muestra DPM y DPD.

No obstante, a la luz de los datos obtenidos en nuestro trabajo de campo (primer y segundo semestre de 2012) pudimos identificar dentro de la población bajo estudio representantes de dos perfiles: i) alumnos- tutores con FPM y DPD, y ii) alumnos- tutores con DPM y DPD. No encontramos, un tutor que manifestara DPM y FPD generando como inquietud: ¿se podrán tener fortalezas en el Pensamiento Didáctico mientras se presenten debilidades en el Pensamiento Matemático? Al respecto, Shulman (1987) dice que para que un profesor tenga una instrucción efectiva, debe comprender y un conocimiento de lo que enseña; luego surge la duda de que un tutor que tenga una efectiva instrucción mientras no domine el contenido matemático que esté enseñando.

Por otro lado, no encontramos en los 27 alumnos-tutores (que participaron del proceso) un caso que pudiera representar claramente el primer perfil, aunque todos estos estudiantes se encuentran matriculados en los últimos niveles de la Licenciatura en Matemáticas, los cuales han superado la línea del Cálculo (cálculo I, II y III, y ecuaciones diferenciales) y han visto por lo menos dos asignaturas de la línea de Didáctica. Vale la pena aclarar que no estamos diciendo que no tenemos estudiantes o egresados de la Licenciatura con este perfil, sino que en nuestra muestra no identificamos uno de esos casos.

Para el análisis de los datos recuperados, elegimos usar el estudio de casos que se ubicaron en dos de los perfiles: i) alumno-tutor con debilidades en el Pensamiento Matemático y debilidades en el Pensamiento Didáctico; y ii) alumno-tutor con fortalezas en el Pensamiento Matemático y debilidades en el Pensamiento Didáctico. Por ello elegimos dos estudiantes que en nuestra opinión, representan cada uno de esos perfiles y que además, nos permiten evidenciar aprendizajes emergentes del proceso tutorial en cada uno de los pensamientos que fueron tomados como categorías de análisis.

Ellos son: Julieta (estudiante de sexto nivel del programa, con 23 años de edad. Ella aprobó la asignatura de Cálculo Diferencial la primera vez que la matriculó y manifiesta no haber tenido inconvenientes de aprendizaje en la línea del Cálculo) y Eduardo (un jóven de 23 años, estudiante de sexto nivel quien ya se ha desempeñado como tutor de Cálculo I de manera ocasional y particular para ayudarse con sus gastos personales. Para él no era necesario planificar las sesiones de tutorías por lo que no diseñó materiales o talleres para sus alumnos-tutorados; según él en las tutorías se debía era responder las preguntas de los sus estudiantes).

Fase 6. Documentación del programa ASAE, descripción de los procesos del programa tutorial;

Fase 7. Institucionalización del programa en la universidad.

En esta contribución daremos a conocer parte de los resultados del caso de Julieta, quien representa al alumno-tutor con debilidades en el Pensamiento Matemático (PM) y debilidades en el Pensamiento Didáctico (DPD). Julieta se caracterizó por presentar dificultad en los temas que representaron un problema para sus alumnos-tutorados. En las primeras sesiones Julieta intentó llegar a las tutorías a responder inquietudes de sus alumnos, nos obstante ante las dificultades que ella misma estaba experimentando tuvo que diseñar actividades sobre los temas que estaban trabajando en las clase.

Una descripción más detallada de los casos de Eduardo y Julieta se encuentran reportados en Botello (2013), donde se analizan episodios desde las categorías de análisis: Pensamiento Matemático y Pensamiento Didáctico.

Aportes de las tutorías en el desarrollo del Pensamiento Matemático de Julieta

A continuación se presentarán dos episodios de las tutorías de Julieta en las que se da cuenta del desarrollo del pensamiento matemático y del pensamiento didáctico en dos sesiones tutoriales. En una de las sesiones Julieta plantea algunos ejercicios con los cuales espera desarrollar las temáticas de: límites infinitos, límites en el infinito y límites infinitos en el infinito. Los límites propuestos son los siguientes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+3x^2+2}{2x+3x^2+6};\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2-5x+1}{4-x^3};\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x$$

Julieta saca una hoja de apoyo donde tiene algunas indeterminaciones y señala que serán de gran utilidad para evaluar los límites propuestos. Después de tener el material de apoyo, la tutora pide a sus alumnos-tutorados resolver el primer límite. Ellos comienzan su tarea considerando dividir toda la función por una potencia de x. El estudiante Alfredo[1] toma la iniciativa escribiendo lo siguiente (ver Figura 2):

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+3x^2+2}{2x+3x^2+6} = \frac{\frac{3x^3}{3x^2}+\frac{3x^2}{3x^2}+\frac{2}{3x^2}}{\frac{2x}{3x^2}+\frac{3x^2}{3x^2}+\frac{6}{3x^2}}}$$

Figura 2. Desarrollo del límite realizado por Alfredo.

A partir del desarrollo de Alfredo surge una discusión sobre su procedimiento, el cual se muestra a continuación.

Julieta: ¿Por qué dividió por $3x^2$?

[1] Seudónimo.

Alfredo:	Se debe dividir por el término de la x que tenga la mayor potencia en el numerador y en el denominador.
Julieta:	¿Cuál es el grado del polinomio del denominador?
Alfredo:	Seis [señalando la constante del polinomio del denominador].
Julieta:	El grado del exponente es el índice que tiene el término de la x.
Alfredo:	Entonces es dos.
Julieta:	¿Cuál es la potencia del numerador?
Alfredo:	Tres.

Según Bautista, Mantilla y Parada (2009) el lenguaje matemático es un aspecto relevante sobre el cual el maestro precisa reflexionar, pues éste determina la comprensión de los contenidos matemáticos específicos, además se considera que el desconocimiento del mismo complica la caracterización de los objetos matemáticos de estudio y la actividad matemática que se promueve en la clase de matemáticas. En este caso la tutora definió el grado del polinomio como "el índice que tiene el término de la x" y el alumno-tutorado comprendió lo que quiso expresar la alumna-tutora, se debe entender al grado del polinomio como el grado máximo de los exponentes de los monomios que lo componen, luego la palabra índice[2] no es la correcta.

Igualmente, Julieta generó inquietud en el grupo sobre *qué se tiene que dividir y por quién*, debido al desconocimiento por parte de la tutora de las reglas, y la confusión generada por lo que decían sus alumnos-tutorados, sus interpretaciones y de lo que ella se acordaba. Por otra parte, en el *formato de tutoría* de esta sesión, Julieta manifiesta lo siguiente:

> "Para esta ocasión les llevé algunas indeterminaciones y en esta oportunidad se presentó un inconveniente, es que les dije que para los primeros dos límites se dividía en la mayor potencia sin importar donde estaba, es decir, en el numerador o denominador; pero como no estaba segura le pregunté a Carolina" [la investigadora].

Esta confusión se generó al no tener un acuerdo con sus alumnos-tutorados acerca del significado de las palabras: término, mayor potencia, índice del término, grado del exponente. Baldor (1998, p.14) indica que un término es una expresión algebraica que consta de un sólo símbolo, o varios símbolos no separados entre sí (por ejemplo, ax^n). Luego, el estudiante al tratar de resolver el límite toma el término que tenga el mayor grado y coincida tanto en el numerador como en el denominador, para luego dividirlo por los polinomios que conforman la función racional, en este caso $3x^2$.

De acuerdo al grado de los polinomios que se encuentren en el numerador y en el denominador de una función racional, la tutora les señala a sus alumnos-tutorados las "reglas" para observar el comportamiento de la función racional dependiendo de tales grados, con el fin de obtener el límite de la función (ver Figura 3).

Límites infinitos
Numerador > denominador → ∞
Numerador < denominador → ∞
Numerador = denominador → coeficientes

Figura 3. Reglas para aplicar al resolver límites infinitos.

[2] Número o letra que se coloca en la abertura del signo radical y sirve para indicar el grado de la raíz (Real Academia Española, 2013).

A través de esas "reglas" la alumna-tutora pudo aclarar sus ideas, al igual que encontrar una manera simple de entender el procedimiento que debía emplear en este tipo de situaciones para explicarles a sus alumnos-tutorados. Aunque la manera "simple" de ver el procedimiento les permitió resolver el límite, aquí nuevamente encontramos que la tutora pretende sintetizar y reducir pasos del procedimiento, sin antes darle significado al concepto matemático que está en juego en este tipo de ejercicios.

Posteriormente, Julieta y sus alumnos-tutorados proceden a resolver los límites, encontrándose la solución en la Figura 4.

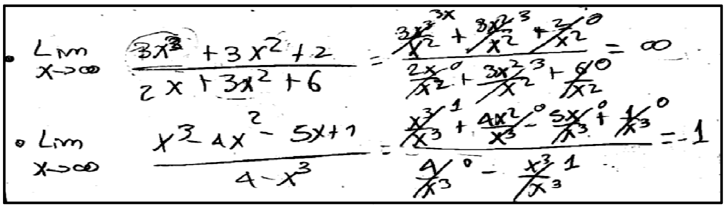

Figura 4. Desarrollo de los límites por parte de Alfredo.

Tanto en la Figura 2 como en la Figura 4 se muestran aspectos relevantes que no tuvo en cuenta Julieta en el desarrollo de la tutoría. El primero cuando Alfredo no escribe la expresión $\begin{matrix} lim \\ x \to \infty \end{matrix}$, señalando que al evaluar los límites el estudiante se restringe a implementar una técnica algebraica reduciendo el proceso a una sustitución (Hitt, 2005), hecho que Julieta no detecta ni indica durante la tutoría. El segundo aspecto es la sustitución inmediata del tipo $\frac{a}{x} \equiv 0$ [donde $a \in \mathbb{R}$] que hace el estudiante exhibiendo un procedimiento totalmente mecánico y sin entender el concepto de límite al infinito, para lo cual la tutora no realiza ninguna intervención que clarifique el proceso de evaluar este tipo límites.

La evaluación de límites al infinito propuestos en esta tutoría hizo que Julieta se enfrentara a un conocimiento matemático que ella ya había estudiado años atrás y que tuvo que recordar para explicárselo a sus alumnos-tutorados. No obstante, Julieta no se sentía segura al no tener claro este tema y por eso tuvo que contrastar sus conocimientos con el material de apoyo que había traído y el texto guía, permitiéndole afianzar las reglas que había aprendido durante su formación matemática a pesar de que aún no ha podido asimilar y comprender el concepto matemático involucrado en los ejercicios planteados.

Aportes de las tutorías en el desarrollo del Pensamiento Didáctico de Julieta

En otra sesión tutorial Julieta diseñó un taller con una estructura que comprende la información teórica y ejercicios. La parte teórica tenía definiciones de máximo, mínimo (tanto absoluto como local) y puntos críticos; al igual que el teorema del valor extremo y el teorema de valor medio. En el apartado de ejercicios ella propone lo siguiente:

1. Trace la gráfica de $f(x) = 8 - 3x, x \geq 1$, y úsela para encontrar los valores de máximos y mínimos.
2. Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+1}$.

Para esta parte Julieta, al ver que otros de sus compañeros tutores implementaron el software GeoGebra para explicar a sus alumnos-tutorados decide también hacerlo, para ello con una de sus compañeras diseña un taller en el que hace uso de este recurso, ella menciona lo siguiente:

> “Esta actividad la diseñé con mi compañera Margarita, en la cual vimos la necesidad de recalcar dichos conceptos pues los estudiantes no comprendían muy bien las diferencias entre ellos (por ejemplo, máximo local y máximo absoluto). Utilicé el software GeoGebra para mostrarle gráficamente un mínimo y máximo global. En los ejemplos hice énfasis en el uso de los intervalos abierto y cerrado para evitar confusión” [entre local y absoluto].

Debido a las confusiones que presentaban sus alumnos-tutorados en sus clases y que fueron manifestadas por ellos mismos, la alumna-tutora señala la importancia de tener claro estas nociones (valor máximo y mínimo, ya sea global o local), y por ello decide usar GeoGebra para favorecer procesos de visualización matemática. Al respecto Jiménez (2003) señala que la implementación de software matemático para visualizar dinámicamente un concepto, permite construir la noción del mismo.

En dicha sesión, Julieta inicia explicando las definiciones consignadas en el taller (ver Figura 5).

Una función f tiene un **máximo absoluto o global** en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio. El número $f(c)$ se llama valor máximo de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D; el número $f(c)$ se denomina valor mínimo de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

Una función f tiene un **máximo local** en c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c; (esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c). De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c.

Figura 5. Definiciones consignadas por la tutora en el taller.

Luego, ella procede a utilizar GeoGebra para graficar la función $f(x) = 8 - 3x;\ x \geq 1$ y brindarle un ejemplo a su estudiante Alexandra, para mostrarle cómo se puede calcular el mínimo y el máximo empleando el software con los siguientes comandos: Mínimo [<Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>], y Máximo [<Función>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>] (ver Figura 6). De donde <*Valor de x Inicial*> corresponde al valor extremo izquierdo de un intervalo cerrado, y el <*Valor de x Final*> al valor extremo derecho del mismo.

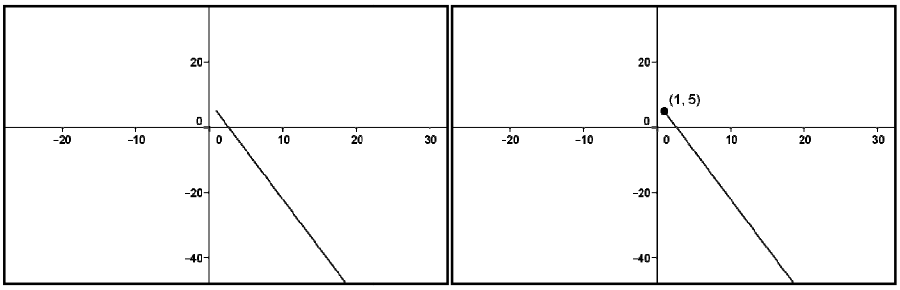

Figura 6. Gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = 8 - 3x;\ x \geq 1.}$

Se encuentra que la tutora enfoca la sesión a un trabajo operativo con el software, tal vez debido al interés que muestra su estudiante por lo realizado mediante GeoGebra, justificando que:

> “Le enseñé a manejar el programa y quedó encantada porque le servía para corroborar lo que hasta el momento había hecho mecánicamente en clase”.

Después de que Julieta inserta los comandos y logra graficar la función con su respectivo valor máximo le muestra a la estudiante la construcción (Figura 6), y luego le pide que repita el procedimiento, pero con otra función, en este caso, la que se propone en el inciso 2 (enunciado anteriormente).

Tras elaborar la gráfica de la función con su valor máximo, vemos que Julieta, como la mayoría de profesores que se inicia en el uso de las TD dedica gran parte de su tiempo a enseñar el uso del software (en este caso de GeoGebra). Ella por ejemplo le enseñó a introducir una función en la *entrada*, cambiar los colores de la gráfica de la función, entre otras cosas que posibilita hacer el programa; situación que de acuerdo a Sacristán, Parada, Sandoval y Gil (2009), suele pasar inicialmente cuando un profesor de matemáticas quiere implementar las TD en el aula de clase y que posteriormente, a la medida que siga implementándolas y teniendo una reflexión de su uso, podrá generar una revolución en su práctica escolar.

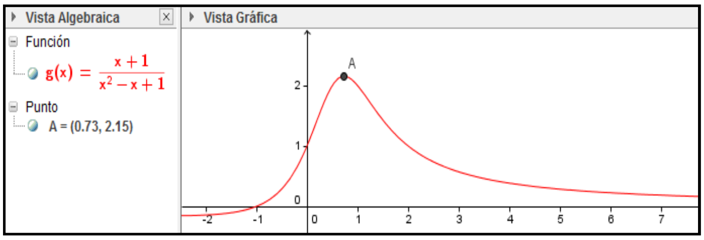

Figura 7. Gráfica de la función elaborada por Alexandra.

La alumna-tutorada logra realizar la gráfica de la función $g(x)$ con ayuda de Julieta, ver Figura 7. Luego, procede a encontrar el valor máximo de la función mediante el comando que se utilizó en el ejemplo anterior, terminando la tarea encomendada por su tutora. El tiempo de la tutoría culminó y sólo se logró mostrar el uso de GeoGebra, más no se pudo hacer comparaciones en diferentes intervalos cerrados ni abiertos, idea que quería cumplir la tutora inicialmente.

A partir de la labor tutorial de Julieta, percibimos que ella intenta implementar las TD en el aula experimental de tal manera que su estudiante vea y comprenda qué es el máximo absoluto de la función gráficamente; estrategia que buscó Julieta para responder la necesidad que presentaba su estudiante por entender este concepto, potencializando una fortaleza del pensamiento didáctico en Julieta al crear una idea intuitiva del concepto (en términos de Hitt, 2005) de valor máximo y mínimo en Alexandra.

Conclusiones

Julieta quien representa al tutor con debilidades en el pensamiento matemático y en el pensamiento didáctico, por medio de las tutorías se dio cuenta de su bajo nivel de conocimiento matemático, lo que la llevó a estudiar y revisar los contenidos del curso que iba a trabajar en las tutorías, reaprendiendo aquellos conocimientos que no tenía completamente claros.

Una característica que se generó en Julieta a través de las tutorías fue la comprensión del lenguaje matemático y su importancia para desarrollar plenamente la actividad matemática dentro de la tutoría o en el aula de clase. No obstante, un asunto que no pudo superar, fue la manera de tratar el cálculo como los procesos algebraicos, puesto que ella veía en ésta una forma de agilizar (los procedimientos) y sintetizar (las nociones matemáticas) de tal manera que fuera más asequible al alumno-tutorado para memorizar.

Un aspecto que Julieta logró mejorar dentro de las tutorías fue la implementación de GeoGebra, dado que le servía para la visualización de conceptos matemáticos y el desarrollo de ideas intuitivas de éstos; respondiendo en parte a las objetivos que tiene el curso de Didáctica del Cálculo y lo planteado por los NCTM (2000).

Igualmente, Julieta desde su práctica logró entender que no le es suficiente al profesor de matemáticas saber todos los contenidos del curso, sino que también debe saber cómo enseñárselos a sus estudiantes. La tutora a partir de su labor encontró que las tutorías fortalecieron su pensamiento didáctico porque éstas le aportaron experiencia para: i) identificar problemas de aprendizaje de los contenidos del curso; ii) identificar problemas de enseñanza de los contenidos del curso y, iii) dominar y atender grupos de estudiantes universitarios.

En general, observamos que las dificultades que presentaron los tutores al momento de enseñar les sirvieron como oportunidades de formación para cada uno de ellos. Los retos, los obstáculos, los errores, todo aquello que surge del trabajo tutorial les permitió adquirir experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial, conocer y experimentar las dificultades que percibe un estudiante al aprender cálculo; los obstáculos epistemológicos que se presenta con las nociones (función, límite, derivada y otras).

Para finalizar, somos conscientes de la importancia de proponer estudios investigativos sobre la formación inicial de profesores de matemáticas para la educación primaria y secundaria, por ello resaltamos que desde la universidad, se indague sobre el espacio de las tutorías entre pares, el cual desde esta investigación se encontró que puede posibilitar el desarrollo de las competencias mencionadas por Recio (2004) y Rico (2004) para la formación, siempre que haya un compromiso por parte de los miembros (estudiantes beneficiarios, alumnos-tutores, formadores de profesores y directivos) del programa tutorial.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Baldor, A. (1998). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural S.A.

Botello, C. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Bautista, L., Mantilla, L., & Parada, S. (2009). Adaptaciones curriculares en matemáticas para educandos con necesidades educativas especiales. *Revista Internacional Magisterio, 39,* 44-62.

Cieza, J. (2011). *Experiencia-piloto de implementación de la tutoría entre compañeros (peer tutoring) en el primer curso de la diplomatura en magisterio (especialidad de educación infantil).* Trabajo presentado en el Primer congreso internacional virtual de formación del profesorado, Salamanca.

Cortés, J., García, J., & Núñez, G. (2003). *Software para la enseñanza de la derivada.* Trabajo presentado en el Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superio, Morelia.

Hitt, F. (2001). *Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas.* Conferencia plenaria presentada en la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Hermosillo.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, & F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores.

Hitt, F., & Páez, R. (2005). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. En J. Cortés, & F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 133-156). Morelia: Morevallado Editores.

Jiménez, J. (2003). *Por una visión dinámica y global de los conceptos del cálculo y su enseñanza: el caso de la derivada.* Trabajo presentado en el Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Morelia.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos.* Conferencia presentada en las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM, Granada.

NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander.* Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Real Academia Española. (11 de agosto de 2013). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de Diccionario de la lengua española: http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%ADndice

Recio, T. (2004). Seminario: "Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas". Documento de conclusiones y propuestas. *La gaceta de la RSME, 7*(1), 33-36.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista de currículum y formación del profesorado, 8*(1), 1-15.

Sacristán, A., Parada, S., Sandoval, I., & Gil, N. (2009).Experiences related to the professional development of mathematics teachers for the use of technology in their practice. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (5, 41-48). Thessaloniki, Grecia,

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-21.

Vega, M. (1990). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.