DESCRIPTORES DE NIVEL DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE, PARA LA COMPRENSIÓN DE LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

William Eduardo Calderón Gualdrón*
René Alejandro Londoño Cano**
williameduardoc@hotmail.com, renelondo@gmail.com

Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología UMECIT, Panamá*
Universidad de Antioquia, Colombia**

Resumen

En este reporte de investigación se presentan los resultados preliminares de una investigación doctoral que estudia como comprenden los estudiantes de últimos cursos de educación media y primeros semestres de universidad el concepto de parábola como lugar geométrico a la luz del modelo de van Hiele. En una primera etapa se elaboran unos descriptores hipotéticos los cuales se van refinando a medida que se aplica un diseño de entrevista socrática mediada por el software GeoGebra. Estudios previos han utilizado el modelo de van Hiele y la entrevista socrática como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, si a estos dos elementos le sumamos el software de geométrica dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual se analizará y promoverá el objeto de estudio (la comprensión) y el objeto matemático de estudio (La parábola como lugar geométrico).

Palabras clave: *Parábola, descriptores, van Hiele*

Introducción

En el diseño curricular de los cursos de matemáticas de la educación secundaria, se introduce la geometría analítica con conceptos algebraicos que permiten resolver problemas de distancia entre puntos y puntos medios; de esta manera se presenta la relación entre el álgebra y la geometría por primera vez. Seguidamente, se introduce la recta y, luego, las secciones cónicas. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) del sistema educativo colombiano hacen referencia a las secciones cónicas en cuatro de los estándares asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos de décimo grado (estudiantes entre 15 y 17 años), a saber:

• Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

• Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.

• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

• Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Basados en nuestra experiencia docente y de acuerdo a la literatura abordada, los estudiantes de primer año de universidad presentan dificultades en la comprensión de las secciones cónicas, situación que ha sido documentada por investigadores como Just y Carpenter (1985), Gómez y Carulla (2000), Santa y Jaramillo (2007), Santa (2011), López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013), Ruiz (2013), Lara (2016), quienes aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones de las cónicas, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis; lo anterior conlleva a dificultades en relación a la representación algebraica y geométrica, impidiendo su comprensión como lugar geométrico.

Lo anterior señala la necesidad de contribuir con elementos que le permitan a los profesores mejorar el proceso de enseñanza de las cónicas, en específico, de la parábola como lugar geométrico. En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de la problemática de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media y primeros semestres de universidad.

El modelo de van Hiele y la entrevista socrática han sido validados en investigaciones como Llorens (1994), Campillo (1998), Jaramillo (2000), Esteban (2000), De la Torre (2000), Navarro (2002), Londoño (2011) y Prat (2015) como una estrategia efectiva para analizar y promover la comprensión de un estudiante acerca de un determinado concepto, no sólo con las preguntas que se formulan, sino también, con sus propias respuestas.

Si al modelo de van Hiele y a la entrevista de carácter socrático le sumamos los aportes que realiza la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, en este caso el software de geométrica dinámica GeoGebra, tendremos una triada la cual será una estrategia con la cual esperamos analizar y promover el objeto matemático de estudio, que en nuestro caso es la parábola como lugar geométrico, además de crear un sendero para nuevas investigaciones con esta estrategia.

Este estudio pretende que la entrevista socrática dinámica, vista como la entrevista realizada mediante un software de geometría dinámica, pueda convertirse en una estrategia para los profesores de matemáticas, ya que, mediante las actividades propuestas en ella, se orienta sobre cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes a través de un software de geometría dinámica, para presentarles nuevos conceptos, de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los mismos.

Además, se pretende transformar la manera en que el entrevistado interactúa con el entrevistador cuando se realiza un dialogo de entrevista socrática, al proporcionarle al primero nuevas herramientas en las que puede dotar de movimiento las situaciones que se le presentan, dándole a la entrevista una cualidad en la que mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el estudiante logre deducir resultados y propiedades hasta llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Problema de investigación y aspectos teóricos y metodológicos

La parábola como lugar geométrico

Charles H. Lehmann (1990) define una parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta. El punto fijo F se llama foco y la recta fija L se llama directriz de la parábola.

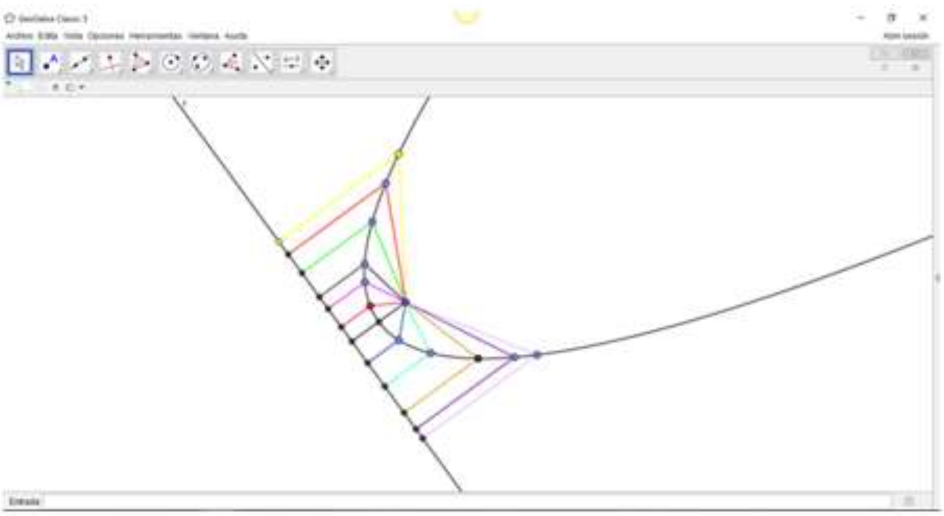

Figura 1 la parábola como lugar geométrico

El modelo de van Hiele

Muchos autores han buscado una definición precisa del término "comprensión", Brownell y Sims (1946) afirman: "Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de "comprender" o "comprensión" (p. 163). En este sentido Pierre van Hiele (1957) se refiere a la comprensión así:

Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si..." y a continuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones (p. 4)

Desde la difusión inicial de los trabajos de van Hiele, a mediados de los 70's, han sido numerosos los investigadores que han trabajado con el modelo de van Hiele, aspecto que es afirmado por Jurado y Londoño (2005), quienes, además, señalan que el común denominador es la insistencia en aplicarlo a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales o medios, hecho que no opaca el esfuerzo de investigadores como Dreyfus y Thompson (1985), De la Torre (2000), Londoño (2011), Fiallo (2011 y 2018), por extenderlo a la Aritmética, el Análisis Matemático, la Trigonometría y el Cálculo Diferencial.

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de Van Hiele es

> Una excelente guía para los profesores pues (...) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los alumnos, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes (pp. 302-303).

Pierre van Hiele y Dina van Hiele Geldof, como profesores de matemáticas, idearon una forma que pudiera mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes en geometría pues, a partir de sus observaciones y reflexiones en el aula, notaron que, a diferencia de Piaget, los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad que se mire esto; para ellos "cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento" (Jurado y Londoño, 2005, p. 7).

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de van Hiele está formado por dos partes:

a) la primera llamada "niveles de razonamiento" que identifica una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno, la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo. Para reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su actividad matemática, los van Hiele diseñaron unos descriptores, los cuales tienen unas propiedades específicas (secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, cada nivel tiene su lenguaje y consecución).

b) La segunda parte llamada "fases de aprendizaje", orientada a los profesores, les brinda directrices para ayudarlos a encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento

Un tercer elemento es considerado por Jurado y Londoño (2005) y Londoño (2011): la percepción-Insight (algunos autores la traducen como "comprensión"), aunque Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que este es el fin del modelo.

La entrevista socrática

El diálogo como elemento importante en la educación matemática es entendido desde los Diálogos de Platón en el capítulo titulado "Menon" (el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca de encontrar el cuadrado de área doble, de otro cuadrado dado), cuyos coloquios se caracterizan por su alto grado de indagación y análisis, lo cual supone un compromiso con el intelecto. De la Torre (2003) describe el método socrático como camino hacia el esclarecimiento de los conceptos, tal como se perfila en el Menón, señala además que:

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada (p. 102).

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

La entrevista socrática [...] ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele [...] (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82).

Londoño (2011) emplea la entrevista socrática con una doble intención: a) que el profesor reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza del mismo, esto con el propósito de que forje la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; b) que le permita al entrevistado (el estudiante) progresar en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo. La entrevista socrática diseñada en el estudio de Londoño le permite la detección de los niveles de comprensión de tres estudiantes en el marco de la teoría de Piere y Kieren a partir de descriptores diseñados para cada nivel, los cuales se obtuvieron durante la aplicación de las entrevistas socráticas.

La red de relaciones interviene durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía, pero el refinamiento y evolución de su comprensión depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza gradual que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así conseguir el nivel de comprensión deseado.

El autor enfatiza en las conclusiones de su estudio la importancia de que en la entrevista socrática se generen preguntas que entorpezcan al aprendiz ante un posible error o confusión, pero que a la vez desencadene que lo saquen de la confusión y así avanzar en su proceso de comprensión.

De manera que, dado que el modelo de van Hiele prueba la existencia de niveles de razonamiento, en este estudio usamos el método socrático para examinar el razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Asimismo, para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que van Hiele considera son importantes tener presentes en una clase donde se trabaje con el método socrático, según De la Torre (2003, p. 103), a saber:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.
- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.
- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.
- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto.

Van Hiele (1986) insiste en estas premisas pues "es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento" (Londoño, 2010, p. 27).

El software de geometría dinámica (SGD)

Peña (2010) resalta que los softwares de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de movimiento a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que "La utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión" (p. 166).

Es así como Fiallo (2000) plantea en su tesis doctoral el diseño de una unidad de enseñanza de trigonometría fusionando el modelo de Van Hiele y Cabri Geometre como herramienta didáctica. El autor concluye que el software de geometría dinámica (SGD) motiva a los estudiantes a saber por qué son verdaderos los conceptos y propiedades estudiados ya que, además, les proporciona conocimientos necesarios para que formulen razonamientos y demostraciones sobre ellos.

En relación a las cónicas y los SGD, Gaita y Ortega (2014), además de trabajar con construcciones de regla y compás relacionadas con la noción de lugar geométrico con estudiantes de arquitectura, incluye en su estudio algunas actividades con el uso de GeoGebra. Las autoras señalan que la propuesta está organizada "En base a condiciones geométricas que establezcan relaciones de la distancia entre tres puntos, de modo que la modificación de determinados parámetros en el enunciado generaba un cambio en la estrategia de solución" (p. 1136). La introducción del lugar geométrico a través de situaciones en el marco geométrico favoreció que los estudiantes adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto.

Los investigadores López-Mesa, Aldana-Bermúdez y Alonso-Arboleda (2013) también emplearon GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de

Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destaca que las TIC logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

[…] El medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen y fuera de este; estableció relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio.

En lo actitudinal, los autores reportan que los estudiantes están más receptivos y animados al desarrollo de las actividades; durante la actividad matemática, ellos formulan como hipótesis y conjeturas, utilizan un lenguaje matemático adecuado, entre otras.

Hallazgos

A partir de los razonamientos de los estudiantes, sobre la parábola como lugar geométrico se pudo detectar características que permiten ubicar a cualquier estudiante en uno de los niveles de razonamiento; a estas características se les llama descriptores, y van a indicar las actividades sobre el objeto matemático de estudio mencionando anteriormente que pueden realizar los estudiantes cuando se encuentran en un determinado nivel.

En un primer momento, van Hiele enumeró cinco niveles diferentes (Nivel 0 básico o predescriptivo y niveles I, II, III y IV). Jaime y Gutiérrez (1990) distinguen cuatro niveles: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal). Nosotros vamos a utilizar la nomenclatura descrita por van Hiele, la cual fue pieza clave en las investigaciones de autores como: Londoño (2011), santa (2011), Prat (2015), quienes presentan los siguientes niveles: Nivel 0, predescriptivo; nivel I, de reconocimiento visual; nivel II, de análisis; nivel III, de clasificación y relación; nivel IV, de deducción formal.

Estos autores hacen referencia a que el ultimo nivel el de deducción formal presenta dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico.

Descriptores de nivel de razonamiento(DNR)

NIVEL 0 (básico o predescriptivo)

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales, por lo tanto, no es utilizado el software GeoGebra.

El estudiante ubicado en este nivel:

- **DNR**. Reconoce objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.

- **DNR. Reconoce** algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta llamada D.

- **DNR.** Reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

- **DNR.** Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.

Referencias

De la Torre, A. (2000). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24, pp. 99-121.

Dreyfus, T., y Thompson, P. W. (1985). Microworlds and van Hiele levels. In L. Streefland (Ed.), Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 5-11). Utrecht, The Netherlands: University of Utrecht, Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Tesis doctoral. España: Universitat de València.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). Teoría y práctica en educación matemática (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*, pp. 65–84. Recuperado de https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf

Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de maestría no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.

Just, M. y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 137-172.

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica*. Tesis de maestría no publicada. Perú: Pontifica Universidad Católica del Perú.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis doctoral no publicada. Colombia: Universidad de Antioquia.

López-Mesa, J., Aldana-Bermúdez E., Alonso-Arboleda A. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*, *18*(2): 74-79.

MEN, (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas*. [Versión en línea]. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-16042_archivo_pdf2.pdf

Santa, Z. y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. En: X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) *La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online.*

Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Platón, (1996). Menón. En Platón, Diálogos. México. Porrúa.

Ruiz, J. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la Institución Educativa Luis López de Mesa del Municipio De Medellín*. Tesis de posgrado no publicada. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

UNESCO. (1998). *Informe Mundial sobre la Educación*. Editorial Santillana/Ediciones UNESCO. Madrid. España.

Van-Hiele, P. (1986). *Struture and insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.