EUCLIDES E O CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIÕES POLIGONAIS

José Carlos Pinto Leivas

Resumo

O trabalho tem a intenção de discutir, mesmo que superficialmente, as representações semióticas de Duval, particularmente no que diz respeito às unidades constitutivas de uma figura geométrica limitada externamente por uma linha poligonal fechada qualquer cuja área se quer determinar. Explora representações geométricas de média aritmética, média geométrica e utiliza ainda o teorema de Pitágoras para obter a reconfiguração da figura original em termos da área total. É feita evocação aos Elementos de Euclides no que diz respeito à forma como utilizava a decomposição da figura para a obtenção da área. Os aspectos geométricos relacionados à visualização de figuras para a equivalência de áreas das unidades decompostas constituem um ponto fundamental do trabalho.

Palavras-chave: representação semiótica – áreas de regiões poligonais – construções geométricas

Abstract

The paper aims to discuss, even though superficially, Duval's semiotics representations, particularly regarding the constituent units of a geometric figure externally limited by any closed polygonal line whose area we want to determine. It explores geometric representations of arithmetic mean, geometric men and still uses Pitágoras'theorem to get the reconfiguration of the original figure in terms of its total area. Euclides's Elements are evocated; regarding the form he used the decomposition of a figure to obtain its area. The geometric aspects related to visualization of figures for the equivalence of areas of the decomposed units constitute a basic point of the paper.

Keywords: semiotics representation - areas of polygonal regions - geometric constructions

Introdução

O teorema de Pitágoras, na opinião do autor do artigo, é um dos principais teoremas que necessita ser trabalhado no Ensino Fundamental. Estudá-lo, bem como suas implicações, aplicações e relações ocorridas ao longo da história do descobrimento matemático é algo que pode se tornar motivador e interessante no processo ensino-aprendizagem.

O que a vivência do autor tem mostrado é que os principais teoremas são tratados, na escola básica e nos livros didáticos, com enunciados ou fórmulas e com utilização em exercícios que conduzem exclusivamente à fixação de tais enunciados ou fórmulas, deixando de explorar outras potencialidades tais como o cálculo de áreas, decomposição de regiões, registros geométrico e matemático, exploração de demonstração visual, ou simplesmente, reconstrução do conhecimento matemático.

Duval (2004, p. 155) ao tratar de figuras geométricas e discurso matemático expressa:

> *A atividade matemática nos cursos de geometria da educação básica se realiza em dois registros: o das figuras e o da língua natural. Um, para designar as figuras e suas propriedades; o outro, para enunciar as definições, os teoremas, as hipóteses... Porém, não se trata simplesmente de uma troca de registro, como é o caso entre a representação gráfica e a escrita algébrica de relações.*

O que o autor diz é que a atividade em geometria vai além da passagem de um registro ao outro. É necessário que os tratamentos dados a uma representação em forma geométrica (por figuras) e os dados na forma coloquial ou matemática (língua materna ou simbólica) devem ser realizados de forma conjunta e de uma maneira interativa. Diz ainda que as duas formas de registro não são exclusivas da Matemática e que a aproximação entre essas duas formas e aquelas exigidas pelas atividades matemáticas é uma *falsa aproximação* que pode ser uma das causas que determinam alguns problemas de aprendizagem.

Uma dificuldade de aprendizagem em geometria que aparece com freqüência, até em disciplinas universitárias, é na tomada de decisão por parte dos estudantes do registro da figura à qual se relaciona determinada sentença, teorema ou problema a resolver. Duval diz que a constituição semiótica de uma figura geométrica é determinada por *unidades figurais* que permitem definir seus elementos constitutivos, que podem ser *dimensional* e *qualitativo*. O primeiro diz respeito à variação de dimensão, isto é, pontos (dimensão 0); linhas (dimensão 1) ou áreas (dimensão 2), enquanto que o segundo diz respeito à variação de formas, ou seja, linhas retas ou curvas, abertas ou fechadas. As *unidades figurais* são, portanto, as unidades elementares que se utilizam para a representação de um objeto geométrico.

A dificuldade de obter unidades figurais elementares na representação geométrica parece ser uma daquelas encontradas para a aprendizagem de áreas de regiões poligonais, tanto regulares quanto não regulares. Em geral, o cálculo de áreas dessas regiões limitadas por polígonos regulares no Ensino Fundamental (quando é feito) é através de fórmulas específicas para cada uma delas (triângulos, quadrados, retângulos, etc.) não sendo feita relação geométrica entre as representações geométricas, como por exemplo, a fórmula do retângulo sendo originada da fórmula do triângulo como é feito na escola básica quando se expressa que a medida da área do triângulo é a metade da medida da área do retângulo (ou vice-versa).

As unidades figurais permitem que se transforme um triângulo num retângulo, por exemplo, (figuras 1 e 2). Mostra também que uma dada figura geométrica pode ser representada por unidades figurais distintas (figura 8 é uma possibilidade).

A falta de articulação entre formas de representação - geométrica e escrita matemática - pode ser um obstáculo à aprendizagem geométrica. Não se pode, no entanto, cometer o erro de relegar a um plano inferior os aspectos do conhecimento matemático em detrimento dos aspectos didáticos das representações, apenas. Dessa forma, considera-se que construções geométricas são importantes para a formação desse conhecimento e permitem estabelecer articulações adequadas.

Segundo Tomei (2003, p. 44) a utilização de construções com régua e compasso era algo que Euclides desempenhava bem, muito embora apresentasse dificuldades de relacionar aspectos aritméticos com geométricos como se faz atualmente em demonstrações, dando tratamento significativo algébrico e geométrico aos números. Além disso, "os egípcios já conheciam de alguma forma o teorema de Pitágoras".

No que segue, pretende-se envolver as relações de Pitágoras em aplicações geométricas no cálculo de áreas de regiões poligonais não regulares (figura 7), com um tratamento simultâneo entre as representações geométrica e natural ou matemática, explorando o reconhecimento de unidades figurais de dimensão 2, a saber, triângulos (figura 8). Além disso, a utilização de ferramentas como a régua e o compasso (física ou computacional) proporcionam um crescimento no desenvolvimento de representações.

Construções euclidianas

Em seus Elementos, Euclides preocupou-se em obter áreas e comparações de áreas de regiões poligonais e para isso utilizou-se da decomposição de polígonos em figuras com áreas equivalentes, como no caso de um triângulo qualquer.

Tomando-se um triângulo qualquer ABC, obtêm-se os pontos médios de dois lados, AB e AC (respectivamente E e F) (figura 1). O segmento EF é denominado de **Mediana de Euler** do triângulo, e tem por medida a metade da medida do lado BC.

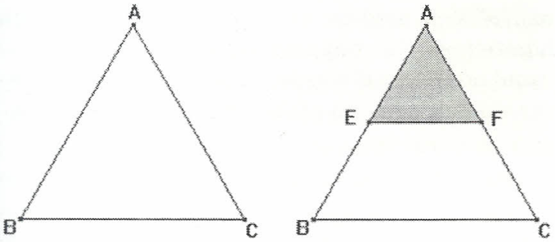


Figura 1

Desloca-se o triângulo AEF, por uma rotação em torno do ponto F, de modo que o vértice A coincida com C. Pelo ponto E, inicial, conduz-se uma perpendicular a BC, determinando E'. Desloca-se, por uma translação, o triângulo retângulo BE'E, de hipotenusa BE, de modo que essa última coincida com CE, conforme figura 2.

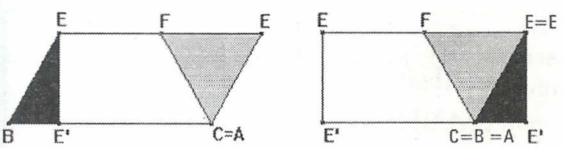


Figura 2

Dessa forma simples é possível obter um retângulo cuja área seja igual à área limitada por um triângulo dado. É sabido da escola básica que a área do retângulo é igual ao produto das duas dimensões. Assim, uma das dimensões do retângulo é a metade da altura do triângulo ABC[1], relativamente ao vértice A, e a outra é o próprio lado AB=BC do triângulo. Isso não deve espantar aos que lidam com o fato de que a área do triângulo é a metade da área do retângulo. Deve-se explicitar quem é quem ao fazer tais afirmações, pois todo cuidado é pouco ao se fazer construções geométricas para não gerar obstáculos didáticos. Um elemento empregado por Euclides na sua axiomatização era visualização, que nada mais é do que um apelo à evidência na caracterização do que seja um axioma.

Na proposição 44 do livro I de Euclides, há um tratamento à álgebra geométrica no que denomina aplicações de áreas. O método consiste na construção, sobre um certo segmento de reta, de um paralelogramo com um ângulo dado e com a área igual à área de um triângulo dado, utilizando-se de duas proposições.

> *Nesta proposição Proclus dá (pp. 419, 15-420,23) uma nota valiosa no método de aplicação das áreas introduzidas aqui, que era um dos métodos mais poderosos em que a geometria grega confiou. (HEATH, 1956, p. 43).*

Euclides se defrontou com situações em que a figura não era mais um triângulo e sim um polígono qualquer e o método consistia em procedimentos que utilizavam transformações de figuras preservando áreas. Para resolver tal problema, uma forma é decompor o polígono em triângulos (unidades figurais, na linguagem de Duval) e calcular a área de cada região triangular por equivalência à dos respectivos retângulos. Mas como reunir os retângulos dessa decomposição? Tomei (2003) diz que

> *"Euclides precisa então aprender a manipular famílias de retângubs: para isso segue dois tipos de instruções:*
>
> *1. Dado um retângulo, construir um quadrado com mesma área.*
>
> *2. Dados dois quadrados, construir um único quadrado maior que tenha por área a soma das áreas dos dois quadrados iniciais. (TOMEI 2003, p. 47).*

No que segue, tenta-se descrever como obter comprovações por meio de construções geométricas viáveis ao estudante do Ensino Fundamental, iniciando por uma álgebra geométrica envolvendo os conceitos de média entre números positivos. Em seguida se buscará a equivalência de área de um retângulo com a de um quadrado. Finalmente, se obterá uma equivalência entre a área de uma região poligonal qualquer com a área de um quadrado.

Passagem de registros de representação de média aritmética e geométrica de dois números

Dados dois números reais positivos p e q, não nulos, chama-se **média aritmética** entre os

[1] O ponto E é ponto médio de AB=BC (figura 1), assim, o segmento EE' (figura 2) tem medida igual à metade da medida da altura relativa ao vértice A (média aritmética).

dois ao número real positivo dado por $\frac{p+q}{2}$. A **média geométrica** entre os dois números dados é definida por $\sqrt{p.q}$. A escola tem abandonado esses conceitos e grande parte dos alunos sequer sabem calcular suas médias escolares, mesmo aqueles que se dirigem às ciências exatas. A dificuldade é ainda maior quando a escola atribui pesos distintos às avaliações e o aluno necessita calcular sua média ponderada e a nota necessária para galgar aprovação no exame final. Em alguns sistemas de avaliação são ainda exploradas as médias geométrica e harmônica. Buscar-se-á dar significados geométricos à média geométrica.

Numa primeira interpretação, retomam-se as relações métricas no triângulo retângulo ABC (figura 3).Indica-se por b e c as medidas dos catetos; por a, a medida da hipotenusa; por h, a medida da altura relativa à hipotenusa (ou ao vértice A); por m, a projeção do cateto c sobre a hipotenusa; por n, a projeção do cateto b sobre a hipotenusa; por A, B e C, os vértices. Em um abuso de linguagem, costuma-se chamar de "a" a hipotenusa, quando, efetivamente, "a" é a medida do segmento denominado hipotenusa. No entanto, esse procedimento é usual nos livros didáticos, inclusive para não trazer dificuldades ao aluno em relação à linguagem matemática.

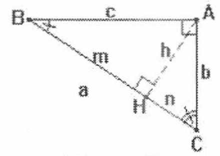


Figura 3

A figura 3, acima, mostra três triângulos semelhantes pelo caso clássico AA (dois ângulos congruentes), logo têm lados correspondentes proporcionais, a saber:

triângulo[2]	ABC	ABH	ACH
Ângulos correspondentes	$\angle$BAC $\angle$ABC $\angle$ACB	$\angle$AHB $\angle$ABH $\angle$BAH	$\angle$AHC $\angle$CAH $\angle$ACH
Hipotenusas correspondentes	med(BC)=a	med(AB)=c	med(AC)=b
Catetos correspondentes	med(AB)=c med(AC)=b	med(BH)=m med(AH)=h	med(AH)=h med(HC)=n

Caso 1.

Considerando-se $\Delta AHB \approx \Delta ACH$ tem-se

$$\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{AH} \Leftrightarrow \frac{h}{n}=\frac{m}{h} \Leftrightarrow h.h=n.m \Leftrightarrow h^2=m.n \Leftrightarrow h=\sqrt{m.n}$$

Da última relação vem que a média geométrica entre os números m e n, projeções dos catetos sobre a hipotenusa, é igual à altura relativa a essa hipotenusa.

Caso 2.

Considerando-se $\Delta AHC \approx \Delta ABC$ tem-se

$$\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{c}{m}=\frac{a}{c} \Leftrightarrow c.c=a.m \Leftrightarrow c^2=a.m \Leftrightarrow c=\sqrt{a.m} \quad (1)$$

Caso 3.

Considerando-se $\Delta ABH \approx \Delta ABC$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{n}{b} \Leftrightarrow b.b=a.n \Leftrightarrow b^2=a.n \Leftrightarrow b=\sqrt{a.n} \quad (2)$$

As igualdades 1 e 2 indicam que cada cateto em um triângulo é a média geométrica entre a medida da hipotenusa e a projeção daquele cateto sobre ela.

Numa segunda interpretação, consideram-se dois números reais positivos quaisquer a e b que representam as medidas de dois segmentos quaisquer, AC e CB, respectivamente. Representando-os como segmentos consecutivos numa reta, obtém-se o segmento AB, cujo ponto mé-

[2] Usa-se a notação $\angle$BAC para indicar o ângulo de vértice A e lados AB e AC, e assim por diante. Usa-se a notação med(BC) para indicar a medida do lado BC, representada por "a", e assim por diante.

dio, P, é facilmente obtido pelo traçado com o compasso (figura 4). Traça-se uma semicircunferência de centro P e raio igual à medida do segmento BP. Conduz-se por C uma perpendicular ao segmento AB que intersecta a semi-circunferência em Q. Unindo-se Q aos pontos A e B obtém-se o triângulo AQB que é retângulo em Q por ser inscrito em uma semi-circunferência, tendo por hipotenusa o segmento AB de medida a + b, sendo que a e b representam as projeções dos catetos AQ e BQ, respectivamente, sobre a hipotenusa. Pelo caso 1, acima, a altura relativa à hipotenusa desse triângulo é o segmento QC cuja medida é justamente $\sqrt{a.b}$.

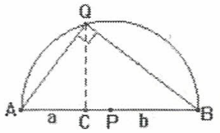


Figura 4

Com essa interpretação geométrica, o primeiro dos questionamentos que Euclides precisa responder, segundo Tomei (2003, p. 47) "Dado um retângulo, construir um quadrado com mesma área", se torna relativamente simples. Para esclarecer um pouco mais, considera-se um retângulo com lados medindo a e b e área

$$A_r = a.b.$$

Busca-se construir um quadrado que tenha a mesma área do retângulo, isto é,

$$A_q = A_r.$$

Como a área do quadrado é igual à medida do seu lado ao quadrado, trata-se de obter o lado x do quadrado cuja área é a.b, ou seja,

$$A_q = x^2 = A_r = a.b \Rightarrow x = \sqrt{a.b}$$

Assim, o lado do quadrado que tem a mesma área do retângulo é a média geométrica das dimensões dos lados do retângulo.

Na figura 4 vimos como obter geometricamente esta medida, a partir da construção de um segmento cuja medida é a + b. Na figura 5 mostra-se que a medida x, do lado do quadrado que tem a mesma área que o retângulo de dimensões a e b, é a medida do segmento QC da figura.

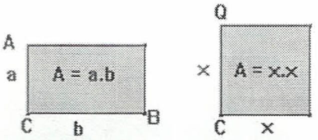


Figura 5

Reconfigurando unidades figurais

Como visto antes, Duval caracteriza unidades figurais de um objeto geométrico, o que pode ser feito de diversas maneiras com diferentes figuras. Denomina *reconfiguração* a operação que consiste em reorganizar várias figuras diferentes de uma dada figura em uma nova figura.

No que segue buscar-se-á responder à segunda das questões com que Euclides se defrontou, isto é, dados dois quadrados, construir um único quadrado maior que tenha por área a soma das áreas dos dois quadrados iniciais, para poder fazer as reuniões das figuras todas e obter finalmente a área do polígono.

Pelo exposto antes, dado um triângulo qualquer, podemos obter um retângulo de mesma área (figuras 1 e 2) e a partir desse retângulo obter um quadrado (figura 5) mantendo essa área. Dado um segundo triângulo qualquer, podemos obter um segundo quadrado com a mesma área desse segundo triângulo. A figura 6, a seguir, mostra que para reunir os dois quadrados num terceiro quadrado, cuja área seja a soma das áreas dos dois, basta construir um triângulo retângulo com catetos tendo as medidas dos lados de cada um dos quadrados e sobre cada um deles assentar o respectivo quadrado. Como o teorema de Pitágoras já era bem conhecido, bastava concluir que o quadrado procurado tem por lado a hipotenusa de tal triângulo retângulo e sua área corresponde à soma das áreas dos dois quadrados.

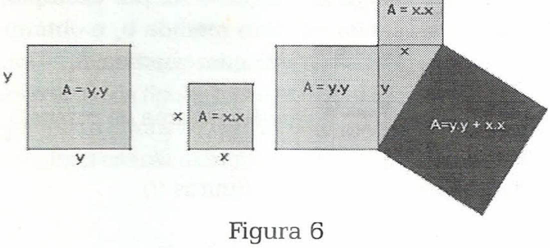


Figura 6

Mostra-se no que segue o processo completo de determinação da área limitada por um polígono qualquer ABCDEFGHA (figura 7).

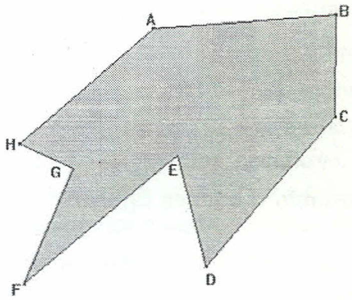


Figura 7

Em primeiro lugar obtém-se uma triangularização da região poligonal (figura 8), isto é, uma decomposição do objeto geométrico (região poligonal) em unidades figurais simples de dimensão 2 (triângulos). Escolheu-se a decomposição apresentada a seguir.

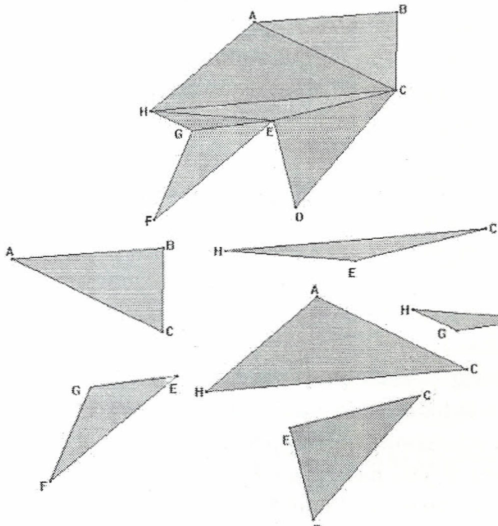
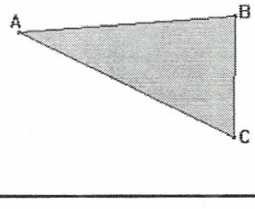


Figura 8

Considera-se o primeiro triângulo ABC cuja área denota-se por A_1. Escolhe-se, por exemplo, a base como sendo AC com medida b_1 e obtém-se a altura relativa a AC com medida h_1. Daí, $A_1 = \frac{b_1.h_1}{2}$ é sua área que é a mesma do retângulo de dimensões b_1 e $\frac{h_1}{2}$ (figuras 9).



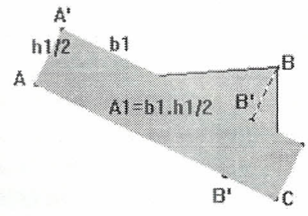


Figura 9

O retângulo é transformado num quadrado de mesma área, isto é, com lado igual a $\sqrt{b_1.h_1/2}$.(figura 10)

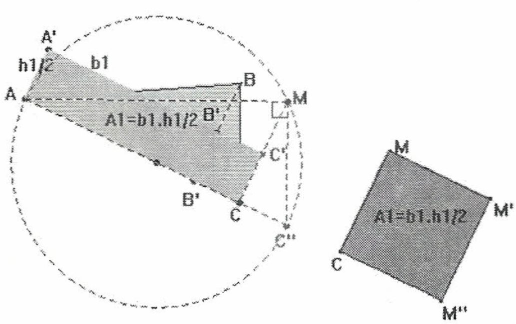


Figura 10

Considera-se o segundo triângulo ACH cuja área denota-se por A_2. Escolhe-se, por exemplo, a base como sendo HC com medida b_2 e obtém-se a altura relativa a HC com medida h_2. Daí, $A_2 = \frac{b_2.h_2}{2}$ é sua área que é a mesma do retângulo de dimensões b_2 e $\frac{h_2}{2}$ (figura 11).

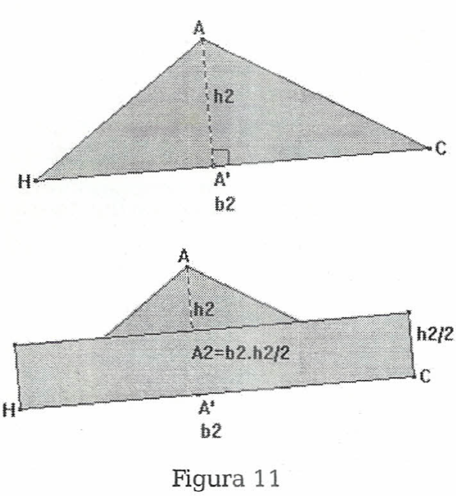


Figura 11

O triângulo, o retângulo e o quadrado têm a área A_2 (figura 12).

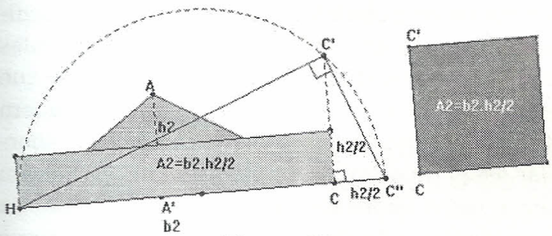


Figura 12

Reunindo-se os dois triângulos ABC e ACH tem-se a parte superior do polígono da figura 8, que tem área $A_1 + A_2$. A reunião dos dois se encontra destacada na figura 13, abaixo:

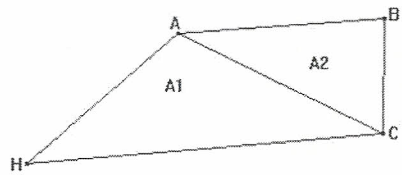


Figura 13

Equivalentemente, a mesma reunião dos polígonos obtidos das figuras 10 e 12 é dada pela reunião das figuras 14,

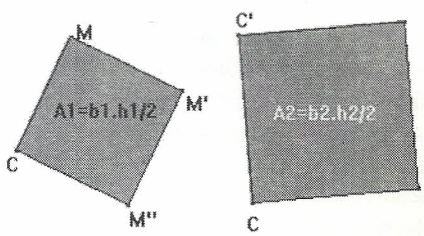


Figura 14

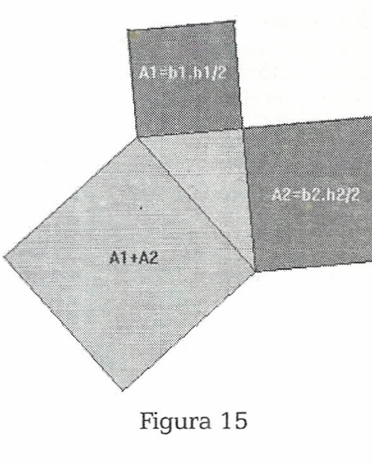


Figura 15

A figura 15 mostra que essa reunião pode ser feita dispondo os quadrados sobre os catetos de um triângulo retângulo cujos catetos são os lados dos dois quadrados. O Teorema de Pitágoras diz que o quadrado construído sobre a hipotenusa desse triângulo tem por área a soma das áreas dos dois quadrados construídos sobre os catetos.

O processo tem continuidade considerando-se um terceiro triângulo, por exemplo, ECH (figura 8) cuja área denota-se por A_3. Escolhe-se, por exemplo, a base como sendo HC com medida b_3 e obtém-se a altura relativa a HC com medida h_3. Daí, $A_3 = \frac{b_3.h_3}{2}$ é sua área que é a mesma do retângulo de dimensões b_3 e $\frac{h_3}{2}$ (figuras 16).

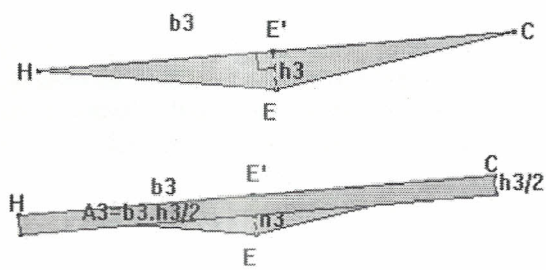


Figura 16

O triângulo, o retângulo e o quadrado têm a área A_3 (figura 17).

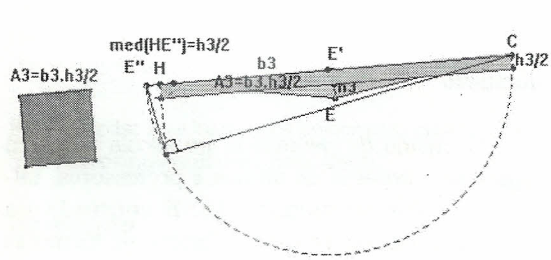
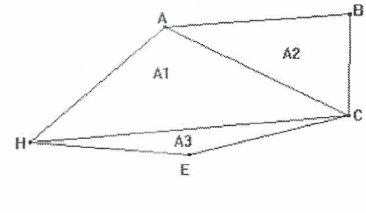


Figura 17

É necessário reunir esse último quadrado com área A_3 ao da figura 15, o qual corresponde a $A_1 + A_2$, gerando a figura 18 que corresponde à área da figura reunindo os três triângulos ABC, ACH e HCE abaixo



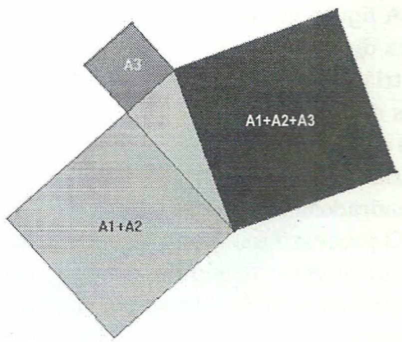


Figura 18

Acredita-se não se fazer necessário dar continuidade ao processo acrescentando-se os triângulos que ainda faltam, a saber, EGH, CDE e EFG.

Por último, é possível, por esse processo, comparação de áreas limitadas por polígonos quaisquer, em particular os não regulares, uma vez que na transformação do polígono em um quadrado tem-se como obter facilmente a área de cada um deles e comparar os dois valores. Por exemplo, qual dos polígonos da figura 19 encerra maior área?

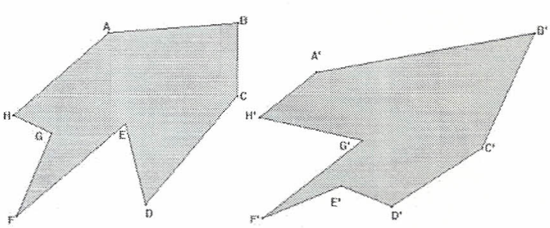


Figura 19

Conclusão

O ensino de geometria na escola não tem despertado interesse de alunos e professores, talvez pela falta de significado. É centrado na memorização de conceitos, na fixação de fórmulas e no que diz respeito ao estudo de polígonos e regiões poligonais é feito com figuras regulares. O cálculo de áreas de regiões não regulares não recebe atenção e, no entanto, ele é importante para a vida de muitas pessoas. O trabalho procurou mostrar como realizar cálculos de áreas de figuras poligonais não regulares explorando o Teorema de Pitágoras.

Os registros semióticos apresentados por Duval buscam auxiliar na complexa tarefa que educadores matemáticos estão desempenhando de melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem em Matemática. Os Elementos de Euclides têm sido estudados por tanto tempo e sem que educadores consigam melhorar a aprendizagem geométrica dos alunos. O trabalho procurou abordar essas duas linhas de pensamento, por assim dizer, como alternativa na busca de tal melhoria e na tentativa de oferecer a professores e futuros professores outras opções de trabalho.

Em tempos de tecnologias computacionais e para contra-argumentar aos adeptos de que há falta de tempo para o desenvolvimento de atividades mais demoradas ou inovadoras na escola, sugere-se a utilização softwares como, por exemplo, o Cabri Géomètre II ou o Régua & Compasso que podem dinamizar, economizar tempo e promover maior interesse por parte dos alunos nas construções geométricas em lugar do uso do compasso e da régua convencionais, que na maioria das vezes nem mais é utilizado por professores e alunos.

O desenvolvimento de conteúdos de geometria euclidiana, dentre os quais, retas, segmentos de retas, paralelismo, perpendicularismo, ponto médio de segmentos, polígonos regulares, circunferência, semicircunferência, podem ser trabalhados de maneira significativa e no transcorrer das atividades, sendo uma forma de fazer uma ruptura na abordagem convencional do ensino de conteúdos matemáticos, estritamente vinculados a pré-requisitos como se encontra nos programas escolares.

Referências

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Colômbia: Univ. Del Vale, Instituto de Educação y Pedagogia, Grupo de Educação Matemática, 2004.

HEATH, Thomas L. **Euclid the thirteen books of the elements**. New York: Dover Publications, Inc, 1956.

TOMEI, Carlos. **Euclides – a conquista do espaço**. São Paulo: Odysseus Editora, 2003.

José Carlos Pinto Leivas - Prof. Aposentado da Fundação Universidade Federal do Rio Grande Prof. da ULBRA – Canoas - Aluno de Doutorado - UFPR - e-mail: leivasjc@terra.com.br

submetido em 03/05/2007
aprovado em 01/07/2007