ANÁLISIS PRAXEOLÓGICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LIBROS DE TEXTO DE INGENIERÍA

Walter Orlando Gonzales Caicedo
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre
goncaiwo13@gmail.com,cgaita@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

El presente trabajo forma parte de una investigación más amplia en donde se analiza el papel que cumple la Integral Definida en la formación de estudiantes de ingeniería química de una universidad nacional peruana. En particular, se identifican las praxeologías en las que interviene la Integral Definida y que se desarrollan en la disciplina matemática y en la disciplina intermediaria con la profesión. Para ello, se analizan libros de texto de matemáticas y de cursos de la especialidad, teniendo en cuenta elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico que permiten describir una organización matemática, en la que se identifican tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías que sustentan los procedimientos llevados a cabo. Donde el uso de la Integral Definida tiene representaciones diferentes (variables) y sus significados son desde el margen de la disciplina intermediaria con la profesión.

Palabras clave: *Integral Definida, Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeología, disciplinas intermediarias.*

Introducción

De acuerdo con Castela (2016), cuando miembros de comunidad se trasladan a otra comunidad, estos llevan sus formas de actuar e interactuar, sus herramientas, normas y lenguaje interactuando de un sistema a otro. Así como los estudiantes transitan de una institución a otra, los saberes también circulan de una institución a otra. Es por ello que nos interesamos en identificar cuál es la razón de ser de la integral definida en la formación universitaria de estudiantes de ingeniería química, partiendo del supuesto que la respuesta dependerá de la institución en la que esta se ubique.

Para responderla en primer lugar, consideraremos la institución de la enseñanza de la matemática, materializada a través de los diferentes cursos de matemáticas que forman parte del plan de estudio de los estudiantes de ingeniería química. Se identifican los libros de matemáticas empleados en dichos cursos; se describe la forma en la que aparece la Integral definida, explicitando los problemas, definiciones, teoremas y técnicas empleadas, así como la forma en la que se introduce un nuevo método de solución de un problema.

En una segunda etapa de la investigación, que no será descrita en esta presentación, se hará un estudio similar, pero considerando como institución a las disciplinas intermediarias con la profesión, tales como el libro de texto Fisicoquímica y el libro de texto Principios elementales de los procesos químicos, en estos libros identificaremos los temas en donde se hace uso del concepto de la Integral Definida, las notaciones, interpretaciones, aplicaciones en los diferentes contextos de la ingeniería química.

Sería pertinente considerar praxeologías que involucren a la Integral Definida, en instituciones de enseñanza de las matemáticas, pero también en instituciones usuarias de este concepto, en particular, en la enseñanza de otras disciplinas intermediaria con la profesión. Consideramos que un trabajo de investigación que identifique las praxeologías de la Integral Definida, en donde se consideren sus diversos usos para abordar problemas relacionados a la práctica profesional de un ingeniero, será de interés para la comunidad de investigadores de la disciplina científica didáctica de la matemática y podrá ser empleado para evaluar la comprensión matemática en escenarios similares donde se enseñe la Integral Definida.

Aspectos teóricos considerados en la investigación

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (1999) desarrolla un modelo para describir cualquier actividad humana a través de la noción de praxeología, según la cual en una organización matemática el saber se organiza en dos niveles: el nivel de la *praxis* o del *saber-hacer*, constituido por los tipos de tareas y las técnicas que se usan para resolverlas, y el nivel del *logo* o del *saber*, constituido por las tecnologías que son los discursos que describen, explican y argumentan las técnicas que se emplean.

Según lo anterior, en toda praxelogía u organización matemática se identifican dos bloques o niveles: El nivel de la praxis o saber-hacer y el nivel del logo o del saber, estos dos niveles conforman un conjunto de tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría, que se representa por [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$], es decir una praxeología.

Castela y Romo (2011), proponen un modelo praxeológico extendido donde consideran la unidad básica de análisis [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$], así como tecnologías teóricas $\boldsymbol{\theta^{th}}$ y tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^{p}}$. De donde las tecnologías prácticas $\boldsymbol{\theta^{p}}$ son obtenidas en las instituciones usuarias (I_u) y las instituciones productoras de saberes (P(S)) son las que justifican a las tecnologías teóricas $\boldsymbol{\theta^{th}}$.

Por otro lado, las autoras identifican seis funciones de la tecnología correspondiente al bloque práctico [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$], que se relacionan a describir, facilitar, motivar, evaluar, validar y explicar la técnica. En las instituciones usuarias se tiene que la $\boldsymbol{\theta^{p}}$ no necesariamente requiere de demostración, los expertos desarrollan otros conocimientos de forma práctica basados en los usos continuos que realizan, es decir de la experiencia; donde los saberes son reconocidos y validados en la institución usuaria. De modo que, [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta^{p}}$, $\boldsymbol{\Theta}$] es una generalización del [$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\theta^{th}}$, $\boldsymbol{\Theta}$] de la institución productora de las matemáticas.

Una organización matemática, es decir una praxeología, es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Chaachoua, Bessot, Romo y Castela, 2019). Asimismo, para la organización y estructuración de la praxeología de una disciplina se debe a la confiabilidad y al alcance de las técnicas.

Los autores señalan también que al proponer una praxeología se debe tener en consideración la noción de generador de un tipo de tareas ($\boldsymbol{GT}$) y de variables ($\boldsymbol{V_i}$) ya que permite relacionar entre lo especifico y lo genérico dentro de la organización de los tipos de tareas, además que generan un conjunto estructurado de subtipos de tareas.

Elementos metodológicos

Nuestra investigación es del tipo cualitativa, y se consideraron las siguientes etapas:

Etapa 1: Análisis de libros de textos sobre Matemática, en esta etapa se consideró las siguientes fases, Fase 1: Estudio epistemológico de la Integral Definida. Fase 2: Descripción de los libros de textos de Cálculo. Fase 3: Modelo praxeológico de referencia.

Etapa 2: Análisis de libros de textos sobre Ingeniería Química, en esta etapa se consideró las siguientes fases, Fase 1: Descripción de los libros de textos de la especialidad Fase 2: Modelo praxeológico de referencia en la disciplina intermediaria.

Con la finalidad de identificar el modelo epistemológico dominante sobre la Integral Definida en la institución de enseñanza de las matemáticas, se consideró necesario incluir una primera etapa en la que se revisaron estudios epistemológicos en torno a la Integral Definida.

En la segunda etapa se analizaron documentos curriculares de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo tales como el plan de estudios de la carrera de Ingeniería Química, los programas de los cursos, identificando aquellos en donde la Integral Definida cumplí alguna función. Para verificar los hallazgos, se realizaron entrevistas a especialistas de la carrera de modo que indicaron que la asignatura de Fisicoquímica I y la asignatura Principios de Ingeniería Química; se hace uso de la Integral Definida. Esto permitió identificar los textos matemáticos que eran empleados en la formación matemática de los estudiantes. Luego se procedió a realizar la descripción de los libros de textos seleccionados, para evidenciar los usos del objeto matemático Integral Definida en las diversas aplicaciones. En una última etapa, se propuso una organización matemática para la Integral Definida, siguiendo el modelo praxeológico y empleando la noción de variable en el sentido de Chaachoua, Bessot, Romo y Castela (2019). Esto permitió presentar de manera organizada tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida.

Resultados obtenidos

En relación al estudio epistemológico realizado se encontró que, inicialmente la razón de ser de la Integral Definida estuvo asociada al problema del cálculo del área de una región plana (Bobadilla, 2012; Crisóstomo, 2012; Turégano, 1994; Cabañas, 2011). Los métodos propuestos en las diferentes épocas para lograr dicho objetivo fueron el método de exhaución de Arquímedes, el método de los indivisibles de Cavalieri, el método basado en la propiedad de las progresiones geométricas de Fermat, el método basado en la aritmetización en términos de razones geométricas de Wallis, el método de las transformaciones de Leibniz y el método basado en las cantidades que varían respecto de otras en relación a la variable universal el tiempo de Newton; esto visto desde un enfoque geométrico. Pero, luego se estudia la integral desde el punto de vista analítico, ya que usa un lenguaje algebraico-aritmético y de esta manera se independiza del geométrico y así la definición de la Integral Definida se da en términos de límites de una suma. Así tenemos como los trabajos de Cauchy, quien realizó un estudio basándose en límites, funciones continuas y convergencia, presenta una demostración del teorema fundamental del Cálculo. En el trabajo de Dirichlet, trabajó con funciones discontinuas y que no eran integrables desde la teoría desarrollada por Cauchy. Por otro lado, los trabajos de Riemann, que desarrolló una teoría ampliando los trabajos de Cauchy y de Dirichlet, en la que presenta la Integral Definida en términos de suma de límites, en la que consideró funciones acotas y discontinuas, pero que son integrables. Darboux, quien presenta la Integral Definida en términos de límites máximos y mínimos, en la que consideró también aquellas funciones que forman un conjunto de medida y, por último, los trabajos realizados por Lebesgue, que presentó una definición, en forma analítica, de la Integral Definida, considerando condiciones establecidas y planteó una definición de la Integral Definida, partiendo de lo geométrico, a partir de la teoría de medida de los conjuntos.

En la segunda etapa se obtuvo que, de acuerdo a la programación curricular académica de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, se seleccionó los libros de textos que son usados como fuente bibliográfica en las asignaturas de Matemática Superior I. Al entrevistar a los docentes especialistas se encontró que el uso del concepto de la Integral Definida, tiene sus propias notaciones, interpretaciones y sus aplicaciones en los diferentes contextos de la Ingeniería Química. Asimismo, indicaron que la asignatura de Matemática Superior I es pre requisito para la asignatura de Física I, y Física I es pre requisito para la asignatura de Física II y está a la vez es pre requisito para la asignatura de Fisicoquímica I, y se optó por seleccionar los siguientes textos de matemática para ser analizados: Purcell, Varberg & Rigdon (2007); Edward & Penney (2008) y Larson & Edward 2010).

A continuación, se procedió a realizar la descripción de los libros de textos seleccionados, poniéndose en evidencia los usos del objeto matemático Integral Definida.

Para determinar de qué manera estaban organizados los libros de textos de matemática, se consideró el orden de los temas, se identificaron definiciones, teoremas, técnicas, así como aplicaciones de la Integral Definida; también se tuvo en cuenta si la introducción de un nuevo método o teoría era necesario. A modo de ejemplo, se presenta la descripción realizada para una sección de uno de los libros.

AUTORES	TÍTULO	EDITORIAL	CIUDAD	AÑO
Edwards, H. & Penney, D.	Cálculo con transcendentes tempranas	Pearson Prentice Hall	México	2008

5.4 Sumas de Riemann y la integral

- Sumas de Riemann.

- Definición: Sumas de Riemann.

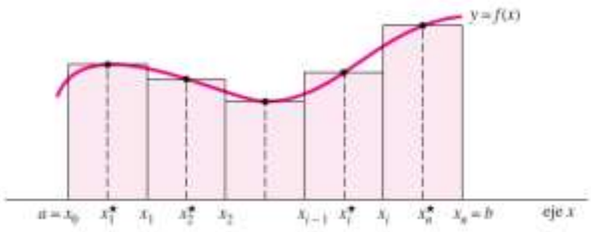

Figura 19 Sumas de Riemann en términos de áreas de rectángulos (Edward & Penney, 2008, p. 341)

DEFINICIÓN Suma de Riemann

Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si P es una partición de $[a, b]$ y S es una selección de P, entonces la **suma de Riemann** para f determinada por P y S es

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i. \qquad (3)$$

También se dice que la suma de Riemann está **asociada con** la partición P.

Figura 20 Definición de Sumas de Riemann (Edward & Penney, 2008, p. 342)

Donde se tiene que una partición P del intervalo $[a, b]$ es una colección de subintervalos de la forma $[x_0, x_1]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$, tal que a $= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n =$ b. Además, S es una selección de puntos para la partición P, donde:

$$S = \{x_1^*. x_2^*, \cdots, x_n^*\}$$

con x_i^*que pertenece al i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}^*, x_i^*]$.

- La integral como un límite.

- Definición: Integral Definida.

DEFINICIÓN Integral definida
La **integral definida de la función** f **de** a **a** b es el número

$$I = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \, \Delta x_i, \tag{8}$$

siempre y cuando este límite exista, en cuyo caso decimos que f es **integrable** en $[a, b]$. La ecuación (8) significa que, para cada número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \, \Delta x_i \right| < \epsilon$$

para toda suma de Riemann asociada con la partición P de $[a, b]$ para la cual $|P| < \delta$.

Figura 21 La Integral Definida (Edward & Penney, 2008, p. 345)

Se tiene que la Integral Definida se puede expresar como un límite, es decir:

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \, \Delta x_i.$$

Figura 22 La Integral Definida como un límite (Edward & Penney, 2008, p. 345)

Teorema 1: existencia de la integral.

- Teorema 2: La integral como un límite de una sucesión.

- Cálculos de la suma de Riemann.

5.5 Evaluación de integrales

- Teorema de evaluación.

TEOREMA 1 Evaluación de integrales
Si G es una antiderivada de la función continua f en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a). \tag{7}$$

Figura 23 Teorema de evaluación de integrales (Edward & Penney, 2008, p. 354)

Teorema 1: Evaluación de integrales.

Donde, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

- Propiedades básicas de las integrales.

Tabla 2 Relación entre las sumas de Riemann y la Integral Definida.

En la tabla 1, para definir las sumas de Riemann, consideran la figura 1, y obtiene su representación figura 2, luego mediante los ejemplos explican y comparan las sumas considerando la partición regular del intervalo cerrado cuando eligen el punto izquierdo, el punto medio y el punto derecho, y realizan la suma de todas las áreas de los rectángulos para encontrar una aproximación del área de la región limitada por la gráfica de la función dada.

La definición de la Integral Definida se relaciona con la de límite de la suma de Riemann (Figura 3 y 4); luego, se proponen ejemplos donde se explica y se hace uso de definiciones, propiedades y teoremas para calcular integrales definidas a partir del límite de las sumas de Riemann, considerando una partición regular del intervalo en n subintervalos y cualquier punto del i-ésimo subintervalo.

La segunda parte del teorema fundamental del Cálculo se refiere al teorema de evaluación de integrales (Figura 5), que relaciona la integral con la antiderivada de una función integrable; luego, mediante ejemplos se explican las propiedades de la Integral Definida.

A modo de síntesis, al estudiar la forma en la que los textos matemáticos han sido organizados para estudiar la integral definida se reconocen algunos elementos identificados en el análisis epistemológico. Por ejemplo, se identifica que la integral se emplea en el cálculo de varias magnitudes geométricas tales como el área de regiones planas, volúmenes de un sólido de revolución, área de una superficie de revolución, longitud de arco, pero también en contextos físicos en donde se requiere determinar el trabajo, así como el centroide de una región plana. Finalmente, se encontró que la Integral Definida también se emplea en problemas de contexto intramatemático, como se evidenció también en el estudio epistemológico, siendo utilizada para el cálculo de integrales impropias.

Análisis praxeológico de los textos matemáticos

En los tres libros de Cálculo, analizados previamente, se han identificado elementos matemáticos comunes que organizaremos siguiendo el modelo praxeológico que contempla tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías en relación de la Integral Definida. En base a estas consideraciones se describe un modelo praxeológico, cuya pregunta generatriz es: ¿Cómo determinar el área de una región plana?

Se tiene el siguiente tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$

- ***Tipo de tarea***

$\boldsymbol{T_1}$: Aproximar el área de una región plana.

$\boldsymbol{GT_1}$**:** [Aproximar el área de una región limitada por la gráfica de la función; V_1, V_2], donde V_1 es la clase de función (funciones algebraicas, funciones trascendentes), V_2 es el intervalo cerrado.

- ***Subtipos de tareas***

$\boldsymbol{t_{1,1}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,2}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,3}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función algebraica en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,4}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función trascendental en el intervalo cerrado, cuando el área aproximada es mayor que el área A.

- ***Técnica***

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{1,1}}$ y $\boldsymbol{t_{1,2}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{1,1,1}} = \boldsymbol{\tau_{1,2,1}}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, inscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos izquierdos, aplicar la suma de las áreas de los rectángulos inscritos, es decir: $\underline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$.

$\boldsymbol{\tau_{1,1,2}}$: Considerar una partición del intervalo $[a, b]$ donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1,2,3, \cdots, n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valor y_i, luego para obtener la aproximación indicada reemplazamos los datos en la expresión:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

$\boldsymbol{\tau_{1,1,3}}$: Considerar una partición del intervalo $[a, b]$ donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1,2,3, \cdots, n$, identificar la función $y = f(x)$ para calcular los valor y_i, luego para obtener la aproximación indicada reemplazamos los datos en la expresión:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

La técnica para los subtipos de tareas $\boldsymbol{t_{1,3}}$ y $\boldsymbol{t_{1,4}}$ es:

$\boldsymbol{\tau_{1,3}} = \boldsymbol{\tau_{1,4}}$: Obtener la partición regular $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, circunscribir los rectángulos en los subintervalos y determinar sus alturas tomando los extremos derechos, aplicar la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos, es decir: $\overline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

- ***Tecnología***

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{1,1,1}}$ y $\boldsymbol{\tau_{1,3}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_1}$: Definición 1: Dada una función f continua, no negativa y acotada en el $[a, b]$, una partición P de dicho intervalo es un conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ se define $f(m_i)$ como el valor mínimo y $f(M_i)$ como en valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se tiene que un rectángulo inscrito que se encuentra dentro de la i-ésima subregión tiene altura $f(m_i)$ y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de la i-ésima subregión tiene altura $f(M_i)$. Para cada la i-ésima subregión tiene altura i, el área del rectángulo inscrito es menor que o igual que el área del rectángulo circunscrito. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de *suma inferior* y está dada por $\underline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$.

Y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos recibe el nombre de *suma superior* y está dada por $\overline{R}_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$.

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{1,2}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_{1,1,2}}$: Definición (Aproximación trapezoidal)

La aproximación trapezoidal de $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es $T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$

La tecnología para las técnicas $\boldsymbol{\tau_{1,3}}$ es:

$\boldsymbol{\theta_{1,1,3}}$: Definición (Aproximación de Simpson)

La aproximación de Simpson de $\int_a^b f(x)\,dx$ con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, asociada con una partición de $[a,b]$ en un número n par de subintervalos de igual longitud es la suma S_n definida por:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

- ***Teoría***

$\boldsymbol{\Theta_1}$: El análisis real.

Por ejemplo, para el caso del tipo de tarea $\boldsymbol{T_1}$, podemos considerar del subtipo de tarea $\boldsymbol{t_{1,1}}$ las tareas siguiente:

$\boldsymbol{t_{1,1}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 4 + 3x - x^2$ en el intervalo $[-1,4]$, cuando el área aproximada es menor que el área A.

$\boldsymbol{t_{1,2}}$: Aproximar el área A que está delimitada por la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} + 1$ en el intervalo $[0,1]$,, cuando el área aproximada es menor que el área A.

Como resultado del análisis realizado, se propone una organización matemática para la Integral Definida (Figura 6); asociada a la institución de enseñanza de las matemáticas.

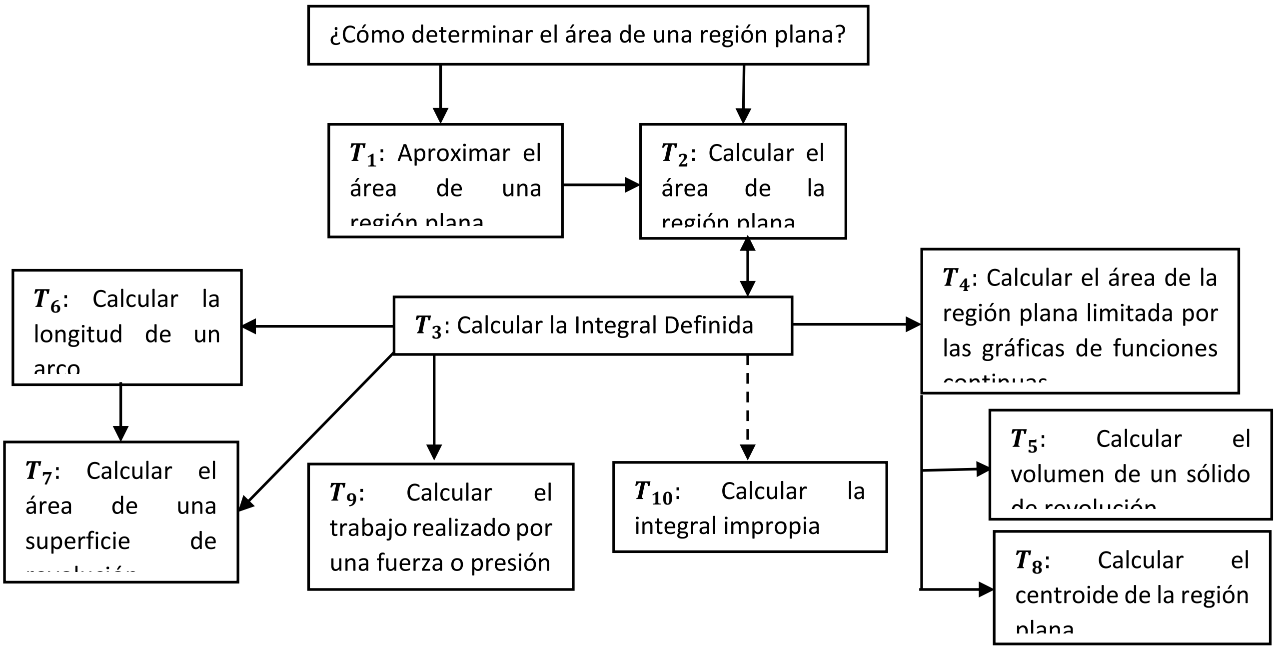

Figura 24 Modelo praxeológico referencial

El tipo de tarea $\mathbf{T_1}$, relacionada a realizar una aproximar el área de una región plana, es considerada como básica pues, a partir de ella, se obtiene un generador de tareas $\boldsymbol{GT_1}$ donde las variables didácticas que se consideraran generan tipos de tareas más específicas que el tipo de tarea $\mathbf{T_1}$.

Así mismo, se ve la necesidad de desarrollar técnicas, las cuales se apoyan en las tecnologías, que serán fundamentales para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ relacionada con calcular el área de la región plana, donde se obtiene un generador de tareas $\boldsymbol{GT_2}$ donde a partir de las técnicas obtenidas para el tipo de tarea $\mathbf{T_1}$, se especifica una de las forma de obtener el área para una determinada región plana que cumple ciertas condiciones.

Por otro lado, se tiene que la técnica para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_2}$ es una de las más importantes que conlleva a obtener una técnica (herramienta matemática) muy poderosa para el tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$ que se refiere a calcular la Integral Definida, convirtiéndose en el eje fundamental, en el cual, giran los otros tipos de tareas.

El tipo de tarea $\boldsymbol{T_4}$ que se refiere a calcular el área de la región plana limitada por las gráficas de funciones continuas, requiere de la tecnología $\boldsymbol{\theta_{3,2}}$ del tipo de tarea $\boldsymbol{T_3}$, como parte para las técnicas para los tipos de tareas, que se obtienen del generador $\boldsymbol{GT_4}$. Los tipos de tareas obtenidos por el generador $\boldsymbol{GT_4}$, tienen relación con el tipo de tarea $\boldsymbol{T_5}$ que está relacionada a calcular el volumen de un sólido de revolución, donde sus técnicas son complementadas con otras, para resolver los tipos de tareas obtenidas por el generador $\boldsymbol{GT_5}$.

El tipo de tarea T_6 está relacionada con calcular la longitud de un arco, requiere como parte de su técnica de la tecnología $\theta_{3,2}$, para dar solución a los tipos de tareas que se obtiene del generador GT_6, asimismo, están relacionadas con el tipo de tareas generadas por GT_7 del tipo de tarea T_7 que está relacionada con calcular el área de una superficie de revolución.

Respecto al tipo de tarea T_8 que se refiere a calcular el centroide de la región plana, está relacionada con el tipo de tarea T_4. El tipo de tarea T_9 relacionada con calcular el trabajo realizado por una fuerza o presión, es considerada como una de las aplicaciones de la Física, y además está directamente relacionada con la tecnología $\theta_{3,4}$ del tipo de tarea T_3, asimismo, es parte de su técnica, así como su teoría Θ_9 está relacionada con la Física específicamente de la mecánica. Se tiene el tipo de tarea T_{10} relacionado con calcular la integral impropia, es considerada como una generalización de la tarea T_3, donde la tecnología $\theta_{3,4}$ es parte para las técnicas de los tipos de tareas generadas por GT_{10}.

Consideraciones finales

Por su parte desde la TAD se analiza la organización matemática y la actividad matemática institucionalizada, partiendo de un modelo epistemológico de las matemáticas; específicamente de un modelo epistemológico de referencia. Asimismo, se tiene que un modelo epistemológico de referencia describe la organización de una praxeología matemática institucionalizada. Se tiene que el generador de tipos de tareas (GT_i) permite considerar las variables didácticas (V_i) las cuales son importantes para establecer una clasificación especifica de dichos tipos de tareas. El concepto de la Integral Definida es usado en diferentes situaciones que están ligados al estudio epistemológico. Asimismo, las tareas que se han identificado en los libros de textos son similares a las que aparecen en el estudio epistemológico, pero las definiciones, propiedades, técnicas y notaciones empleadas actualmente son distintas; sin embargo, su significado es el mismo.

Referencias

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo Conceptual de la Integral y la Medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* (Tesis inédita doctoral). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.

Cabañas, M. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.* (Tesis inédita doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa , México DF.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de Procesos de Estudio del Cálculo Integral en la Formación de Profesores de Matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional .* (Tesis inédita doctoral). Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, España.

Castela, C., Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 31(1), 79-130.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Educación Matemática, 28*(2), 9-29.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chaachoua, H., Bessot, A., Romo, A. & Castela, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. En Bosch M.; Chevallard Y.; Garcia J.; Monaghan J. *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook,* In press.

Turegano, P. (1994). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.