ANÁLISIS ECONÓMICO INSTITUCIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE VECTORES

Maritza Luna Valenzuela*
Saddo Ag Almouloud**
Francisco Javier Ugarte Guerra *
luna.m@pucp.edu.pe, saddoag@gmail.com, fugarte@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú*
Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil**

Resumen

En este reporte presentamos un análisis económico-institucional del objeto matemático vector, en el primer semestre de nivel universitario peruano. Este trabajo es parte del desarrollo de una tesis doctoral en Educación Matemática acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de vectores en el espacio en el área de ciencias e ingeniería. Como marco teórico y metodológico utilizamos los conceptos y herramientas de la teoría antropológica de lo didáctico que nos permitieron analizar las condiciones y restricciones institucionales: los programas y sílabos donde está presente este objeto matemático, la organización matemática y didáctica presente en los textos utilizados en la institución. El análisis de los tipos de tareas, las técnicas (procesos) y tecnologías (propiedades) empleadas para dar solución a las tareas que involucran vectores. nos permitió determinar el tipo de organización matemática presente.

Palabras clave: *Vectores, Teoría Antropológica de lo Didáctico, análisis económico*

Introducción

Los vectores forman parte del lenguaje de la geometría actual, donde las nociones de producto escalar, producto vectorial, vector tangente, gradiente de campos escalares o flujo de fuerzas son básicos para expresar propiedades geométricas en matemáticas (teoremas), es decir resultados científicos. El estudio de lo que hoy conocemos como vectores surgió en el siglo XIX donde las operaciones: producto escalar en dimensión dos o más se plantearon sin mayor dificultad, sin embargo, la generalización del producto vectorial a dimensiones mayores que tres generaron dificultades (Arenzana, 1997).

En la enseñanza actual de vectores y demostraciones, tanto en geometría como en álgebra lineal, se han reportado dificultades, como lo muestran Sierspinska, Dreyfus, y Hillel (1999), Dorier (2000), Dorier y Siepinska (2002), Cardoso (2017), Luna, Almouloud y Ugarte (en prensa) entre otros. Esta problemática sigue vigente, tal como muestran investigaciones aún más recientes como las desarrolladas en Brasil por Celestino (2000) que identifica que en algunas universidades públicas brasileras tales como UNICAMP y UNESP, los cursos de Álgebra Lineal, Calculo I, II, III y Geometría Analítica son los cursos que más reprueban en especialidades de ciencias exactas con un 25% a 50%, lo cual muestra la dificultad referente al proceso de aprendizaje de concepto de vectores. Al iniciar el nivel universitario en la enseñanza y aprendizaje de vectores, el Perú tampoco es ajeno a esta realidad (Valencia, 2015) y por ello nos motivó analizar la dimensión económica e institucional en la que se halla inmerso este objeto.

El análisis de libros y manuales se realizará con herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de modo que mostraremos algunas técnicas utilizadas, la tecnología empleada, así como su teoría. Esto nos permitirá no solo identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas que se utilizan para dar solución a una determinada tarea, sino que permitirá mostrar si existe o no articulación entre las técnicas y las justificaciones empleadas, es decir, identificaremos el tipo de organización matemática presente.

La enseñanza del cálculo vectorial en el primer ciclo de Estudios Generales Ciencias de la Educación Superior de Perú

El área de Ciencias e Ingeniería comprende las especialidades o carreras de: Matemáticas, Química, Ingeniería Mecánica, Física, Ingeniería Biomédica, Ingeniería Mecatrónica, Ingeniería Civil, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Geológica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Informática, Ingeniería de Minas, Ingeniería de las Telecomunicaciones y Estadística. Como ejemplo presentamos la especialidad de Matemática. El alumno culmina su proceso de formación en 10 semestres.

La especialidad plantea el siguiente perfil Profesional:

- Interés por cuantificar los hechos que generan interés
- Inclinación a la utilización de pautas, esquematizaciones y gráficos para el análisis de una situación
- Curiosidad por la abstracción de relaciones lógicas existentes en los fenómenos de la realidad
- Interés por conocer más y buscar siempre explicaciones a los fenómenos
- Atracción por los juegos de ingenio (PUCP, 2019).

Se puede apreciar que en el perfil del Profesional en el ítem 3 e 4 explicita el interés por conocer más y buscar siempre explicaciones por los fenómenos de la realidad, en nuestro caso las aplicaciones de vectores en la realidad.

La formación universitaria tiene 10 semestres de estudio de los cuales se deben realizar entre 2 a 4 semestres de lo que se denomina Estudios Generales, como indica la Ley Universitaria (2014).

La Ley Universitaria N°30220 (artículo 41) dispone la obligatoriedad de estudios generales (EE.GG.) de pregrado, con una duración no menor de 35 créditos, dirigidos a la formación integral de los estudiantes. Esta disposición reemplaza el ciclo de cultura general, de duración y orientación a criterio de cada universidad, previsto en la ley previa (Ley 23733, art. 17).

La Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) implementó los Estudios Generales Ciencias (EEGGCC) hace más de 40 años de antigüedad y aunque a lo largo de ese tiempo los cursos de matemáticas han experimentado cambios, es la universidad que cumple las exigencias de la Ley Universitaria por más tiempo, lo que explica nuestra elección, pues nos permite analizar las funciones (nicho) que cumple nuestro objeto matemático en un ambiente (hábitat) estable.

El estudio de los vectores se realiza desde los cursos del primer ciclo. En el curso de Álgebra Matricial y Geometría Analítica (AMGA), por ejemplo, se presentan los siguientes temas:

> (...) se abarca los siguientes tres temas: geometría analítica, con las definiciones y propiedades importantes de la recta, circunferencia, (...), y la rotación de ejes; álgebra matricial, que comprende las definiciones y operaciones de vectores y matrices aplicados en la resolución de sistemas lineales homogéneos y no homogéneos, y que, además, incluye el cálculo de vectores y valores propios de una matriz; números complejos y sus operaciones básicas. En este curso, se propone la aplicación de todos estos temas en la resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos. (Sumilla de Álgebra Matricial y Geometría Analítica, 2018).

Los cuales son impartidos durante 17 semanas académicas, 4 horas teóricas y 2 horas de practica semanales (o calificadas o dirigidas). Además, a modo de ejemplo, que parte del desarrollo de tema de vectores en concreto tiene una programación, prevista desde inicio de ciclo, con diversas reuniones de coordinación donde se logra una planificación y la siguiente distribución por semana por ejemplo para el capítulo de vectores, como que se muestra en la figura 1.

SEMANA 6	
Clase 1: Vectores en dos y tres dimensiones. Representación como par o terna y como segmento dirigido libre. Operaciones de adición, sustracción, multiplicación por un escalar. Interpretación geométrica. Vectores paralelos. Módulo de un vector. Vectores unitarios.	**Clase 2:** Producto interno. Propiedades. Ángulo entre vectores. Vectores ortogonales en el plano y en el espacio. Caracterización de vectores perpendiculares en el plano. Justificación de algunas propiedades geométricas usando vectores.
SEMANA 7	
Clase 1: Proyección ortogonal y componente	**Clase 2:** Producto vectorial. Propiedades.
SEMANA 8	
Clase 1: Rectas en el espacio. Distintas ecuaciones. Posición relativa entre rectas.	**Clase 2:** Más problemas.

Figura 1. Programación del Capítulo de Vectores de 2017-2018

La formación profesional, por ejemplo, en la especialidad de Matemática, debe llevar en cuenta la siguiente pregunta: ¿Qué son las matemáticas? La repuesta que se escribe es "La matemática es una manera de entender el mundo y es la base sobre la cual las otras ciencias exactas fueran construidas". Sus métodos son usados "para comprender varios aspectos de la realidad física, biológica, social y económica" (PUCP, 2018).

El plan de estudio para cada carrera que tiene es de diez semestres (5 años) y está estructurado como cuatro semestres (2 años) en EEGGCC e seis semestres (3 años) siguientes en Facultad. En EEGGCC tiene el plano de estudio descrito a continuación en el siguiente esquema de la figura 2, donde también se muestra las implicaciones de los contenidos del curso de AMGA en los demás cursos.

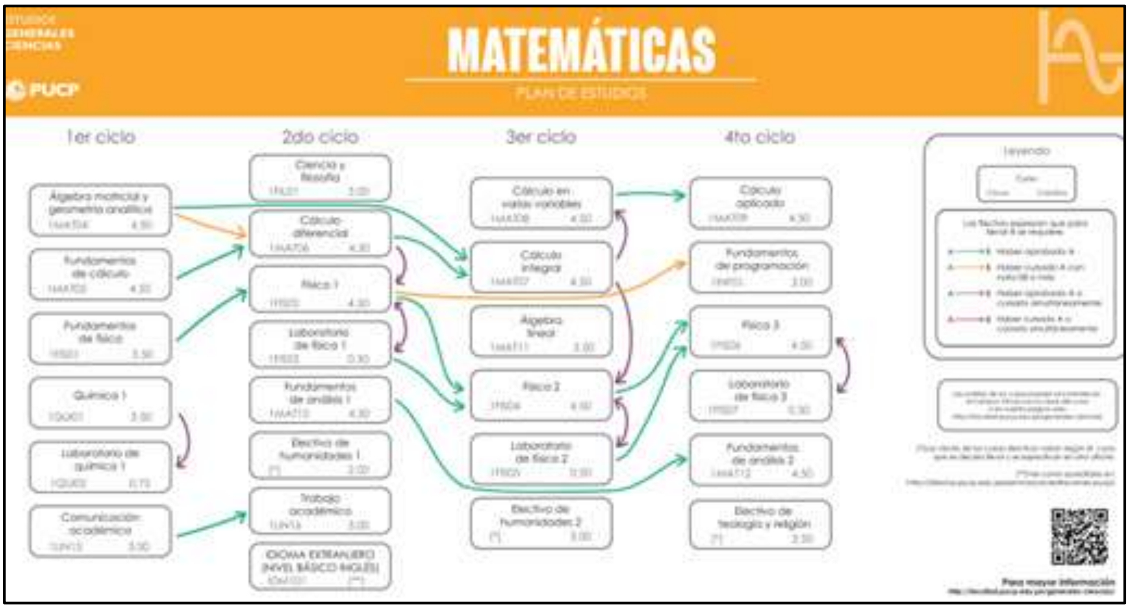

Figura 2. Plano de estudios de la especialidad de Matemática de EEGGCC.

Los siguientes 6 semestres son divididos por especialidades y se utilizan vectores en cursos como por ejemplo Mecánica para ingenieros, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, etc.

Fundamentación Teórica

La TAD "sitúa la actividad matemática, y consecuentemente la actividad del estudio de la matemática, en el conjunto amplio de las actividades humanas y de las instituciones sociales" (Chevallard, 1999, p.1). Además, Chevallard (1999) postula, que las actividades humanas, realizadas regularmente, pueden ser descritas por medio del modelo único, llamado de praxeología. Esta es compuesta de los siguientes elementos: tipo de tareas (T), técnica (τ), tecnología (θ) y teoría (Θ). Así, según Chevallard (1999), toda actividad humana consiste en cumplir una tarea t (expresa por medio de un verbo de acción asociado a un objeto), de cierto tipo T, que es ejecutada por medio de una técnica τ. La justificación de que esa técnica es válida es presentada (explícitamente o no) por medio de la tecnología θ que, a su vez, se justifica por una teoría Θ. El cuarteto [T, τ, θ, Θ] es llamado praxeología u organización praxeológica.

Chevallard (1999) indica que este cuarteto se divide en dos bloques: uno práctico-técnico [T, τ] y el otro tecnológico-teórico [θ, Θ]. El primero está conformado por los tipos de tareas (T) y las técnicas (τ) asociadas a esas tareas y relacionado al "saber hacer". El segundo bloque es comprendido por las tecnologías (θ) y las teorías (Θ) en ellas articuladas y relacionada con el "saber". El bloque práctico-técnico presenta las técnicas asociadas para la determinación de la solución de la tarea.

Cabe resaltar, que cada praxeología vive en una institución y entendemos el termino institución como una organización que define praxeologías.

Las praxeologías integradas a un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM estudia la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnología y teoría. La OD observa la manera como estas situaciones fueron constituidas, por intermedio de momentos de estudio. La noción de "momento" fue concebida por Chevallard (1999) para delinear una OD y está estructurada en seis etapas.

Las praxeologías, de acuerdo con el grado articulación de sus componentes, se clasifican de la siguiente manera: Organización Matemática Puntual (OMP), considerada apenas un tipo de tarea; Organización Matemática Local (OML), que deriva de la integración de varias praxeologías puntuales que atienden a una misma tecnología; Organización Matemática Regional (OMR), obtenida de la articulación de praxeologías locales referentes a la misma teoría matemática; y Organización Matemática Global (OMG), que surge de la unión de diferentes praxeologías regionales, a partir de la integración de diversas teorías.

Gascón (2011) indica que la dimensión económica-institucional de un problema didáctico incluye cuestiones que giran en torno a la pregunta ¿cómo son las cosas (las OM y las OD) en las contingencias institucionales? Para así abarcar el sistema de reglas y principios que regulan la organización y el funcionamiento de las OM y las OD involucradas en el problema didáctico en una determinada institución.

Metodología

Para analizar qué tareas, técnicas y tecnologías en el contexto de la geometría vectorial se procederá considerando las herramientas presentadas de la TAD y utilizando las preguntas orientadoras sugeridas por Almouloud (2015). Dicho análisis, nos permitirá identificar una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, un modelo epistemológico de referencia alternativo y una organización didáctica para la enseñanza de las demostraciones en geometría en el espacio.

Procesos

Se revisaron los sílabos desde 2001 hasta 2018 observando el mayor número de frecuencias de haber sido utilizado y de ese modo pudimos seleccionar los textos didácticos para luego ser analizados. Se exhibirán algunos de los ejemplos más representativos que aparecen en los textos de curso, donde se identifican y explican cada una de las técnicas usadas para resolver la tarea (ejercicio), mientras la tecnología era implementada. Se finalizará con el análisis identificando el tipo de OM.

Análisis de sílabos y libros didácticos

En esta investigación nuestro foco fue identificar a través de las OM y OD la relevancia de las pruebas y demostraciones utilizando vectores. Para la elección de los textos a analizar se considera los sílabos de 2001 a 2018 de los cursos: el primero de Matemática Básica (MB) que se dictó en el periodo de 2001 a 20016, luego, se considera el curso de AMGA que se viene dictando desde 2017, la información se muestra en la figura 3.

Además, este análisis de silabo ayudó a identificar los textos didácticos que denominamos libros didácticos (LD) que se utilizan a la fecha, se muestra en la tabla1. Se encontró cuatro LD que sirven de consulta tanto para docentes como para alumnos. Cabe mencionar, que existe la libertad de catedra y los docentes pueden disponer de diferentes textos y la biblioteca permite el acceso virtual dentro de la misma universidad. Los temas y contenidos son todos enseñados con un programa elaborado por el coordinador de curso y aceptado en una reunión de profesores que dictan el curso.

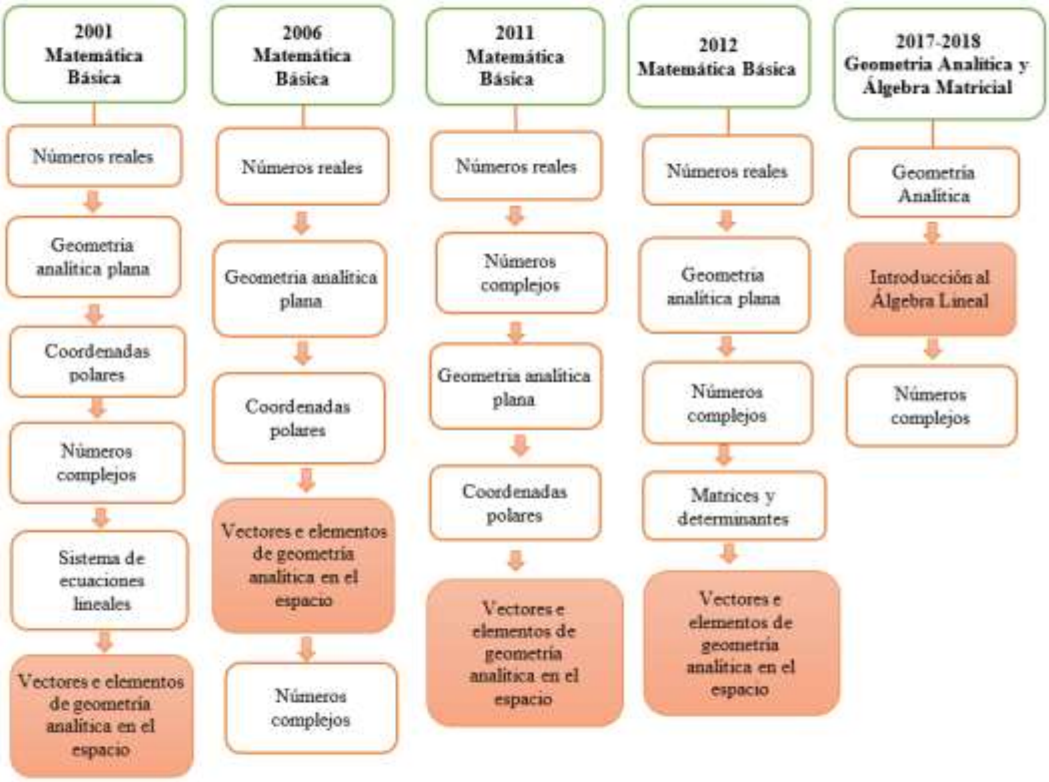

Figura 3. Estudo de vetores e suas propriedades no primer ciclo universitário

Tabla 1. Textos guía y libros donde está presente el estudio de vectores

Años	Libros y textos	Texto guía	LD	Autor
2001-2010	Texto	Matemática Básica, 2001	LD1	Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 4ta edición	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
2011	Texto	Matemáticas Básicas. Texto del curso. Lima PUCP. 2010	LD3	Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 5ta Edición 1996.	LD2	Stanley, I., Grossman, S.

2012-2016	Texto	Matemática Básica, 2011	LD1	Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R.
		Matemáticas Básicas. Texto del curso. Lima PUCP. 2010	LD3	Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E.
	Libro complementario	Algebra lineal com aplicaciones. 5ta Edición 1996.	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
2017-2018	Libros complementarios	Álgebra lineal. México, D.F.: McGraw-Hill. 2014	LD2	Stanley, I., Grossman, S.
		Fundamentos de álgebra lineal, 2015 (7a. ed.)	LD4	Larson, R.

Fuente. Datos de investigación.

Para este reporte presentaremos algunos modelos de praxeologías que se desarrollan en cada uno de los textos guías para lo cual tenemos las siguientes cuestiones y el análisis

(Q1): ¿De qué manera los autores inician la introducción del contenido de vectores?

En LD1 se define directamente vectores en $\mathbb{R}^n$. En tanto LD2 introduce a vectores con la narración histórica donde indica que comenzó el estudio de vectores esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés Sir William Hamilton y crea los cuaterniones. Además, indica que el uso actual de vectores es en la física clásica y moderna, así como en la biología y sociales. Define como vector fila y columna para iniciar el estudio de matrices. El siguiente capítulo define vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Mientras que en LD3 el tema de vectores es abordado en el capítulo 5, de nombre, Vectores en el plano y en el espacio, donde los autores recuerdan al alumno de los contenidos que ya estudiados en Geometría Analítica, por lo tanto introduce Vectores recordando la definición y representación de puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, además de recordar distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, para luego proceder a introducir la idea de vectores. Es decir, indican que diversas magnitudes como la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, entre otras, deben ser descritas vectorialmente. Esto quiere decir que para conocerlas se debe tener información de su magnitud, dirección y sentido. Un vector es un objeto matemático que permite reconocer estas tres características.

(Q2): ¿Cómo es presentado el concepto matemático de vectores?

En LD1 vectores se defino como:

El conjunto de las n-uplas de números reales, $n \geq 1$, se representa por R^n, es decir

$$\mathrm{R}^{\mathrm{n}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathrm{R} \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

Los elementos de R^n serán llamados vectores y al vector $(a_1, \dots, a_n)$ lo representamos por A. El número a_i se llama i-ésima componente del vector A.

En LD2 se define vector como:

Definición geométrica de un vector. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una representación del vector.

Definición algebraica de un vector. Un vector *v* en el plano xy es un par ordenado de números reales (*a*, *b*). Los números *a* y *b* se denominan elementos o componentes del vector v. El vector cero es el vector (0, 0).

En LD3 define vectores en $\mathbb{R}^2$ de modo siguiente:

Se define un vector $\vec{v}$ en el plano como un par $(a; b)$ de modo que:

i) su magnitud es $\sqrt{a^2 + b^2}$,
ii) su dirección está dada por la dirección de una recta cuya pendiente es $\frac{b}{a}$
iii) su sentido es el del segmento dirigido con punto inicial $(0; 0)$ y punto final $(a; b)$.
iv) De modo similar define para $\mathbb{R}^3$.

En LD4 define vector como sigue:

Un vector en el plano se representa geométricamente por un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es el punto (x_1, x_2), (...)

Luego define para $\mathbb{R}^n$.

(Q3): ¿Tipos de tareas que presentan pruebas y demostraciones con vectores?

En LD1, LD2, LD3 y LD4 se identificaron los tipos de tareas, técnicas y tecnologías. También se muestran algunos ejemplos donde una técnica para la tecnología de vectores es abordada. Algunos ejemplos del análisis de praxeologías.

T_{ParlV} De LD2

Demostrar que si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son vectores paralelos a $\overrightarrow{c}$ entonces el vector $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ es paralelo a $\overrightarrow{c}$ para todo α y β escalares.

τ_{ParlV}

Solución

Como $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{c} \Rightarrow$Existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{c}$.

Como $\overrightarrow{b} \| \overrightarrow{c} \Rightarrow$Existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{b} = \beta\overrightarrow{c}$.

Y veremos que la suma de dos vectores paralelos al vector $\overrightarrow{c}$ también es paralelo al vector $\overrightarrow{c}$.

En efecto,

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{c} + \beta\overrightarrow{c} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{c}, \text{ con } \lambda = \alpha + \beta$$

θ_{ParlV} Paralelismo de vectores y operaciones con vectores

T_{ParlV} Vectores

T_{MPEV} De LD1

Ejemplo 4. Si $A, B \in \mathbf{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, demostrar la identidad

$$\|\alpha A + \beta B\|^2 = \alpha^2 \|A\|^2 + 2\alpha\beta A \cdot B + \beta^2 \|B\|^2 .$$

τ_{MPEV}

Solución. Sabemos que

$$\|\alpha A + \beta B\|^2 = (\alpha A + \beta B) \cdot (\alpha A + \beta B)$$

y por las propiedades del producto escalar

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B) \cdot (\alpha A + \beta B) &= (\alpha A + \beta B) \cdot \alpha A + (\alpha A + \beta B) \cdot \beta B \\ &= \alpha A \cdot (\alpha A + \beta B) + \beta B \cdot (\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha A \cdot \alpha A + \alpha A \cdot \beta B + \beta B \cdot \alpha A + \beta B \cdot \beta B \\ &= \alpha^2 \|A\|^2 + 2\alpha\beta A \cdot B + \beta^2 \|B\|^2 , \end{aligned}$$

lo que prueba la identidad.

θ_{MPEV} Propiedades de modulo y producto escalar

T_{MPEV} Vectores

T_{ProdV} De LD1

Ejemplo 26. Los vectores A, B y C de $\mathbf{R}^3$satisfacen la condición $A + B + C = \overrightarrow{0}$. Demostrar que:

$$A \times B = B \times C = C \times A$$

τ_{ProdV}

De la condición $B + C = -A$. Se sigue que $A \times B = -(B + C) \times B = -B \times B - C \times B = \overrightarrow{0} + B \times C = B \times C$

Análogamente se prueba que $B \times C = C \times A$ ∎

θ_{ProdV} Propiedades de producto vectorial

T_{ProdV} Vectores

$T_{PryCompV}$ De LD2

Ejemplo 31
Considerar las rectas que no se cortan (rectas alabeadas):

$$L_1 \;:\; P = P_0 + t\overrightarrow{a},\ t \in \mathbb{R}$$
$$L_2 \;:\; P = Q_0 + r\overrightarrow{b},\ r \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que la distancia d entre L_1 y L_2 se puede calcular con la fórmula

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}\right|}{\|\overrightarrow{c}\|}$$

donde $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

$\tau_{PryCompV}$

Solución
a) Se verifica que $\Pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{P_0Q_0} = \dfrac{\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}}{\|\overrightarrow{c}\|^2}\overrightarrow{c}$.
La longitud de este vector,

$$\left\|\Pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{P_0Q_0}\right\| = \left|Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right|$$

es la distancia d,

$$\left|Comp_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{P_0Q_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0Q_0}.\overrightarrow{c}\right|}{\|\overrightarrow{c}\|} = d.$$

$\theta_{PryCompV}$ Definición de proyección y componente

$T_{PryCompV}$ Vectores

En los cuatro textos de observaron que están presentes las demostraciones en principio para justificar la veracidad de las proposiciones y luego ya como ejemplos donde se hacen uso de las diferentes definiciones y propiedades (tecnologías) de vectores, como se muestran en los ejemplos mostrados. En las tareas (ejercicios) se utiliza el término demuestra o prueba se refiere a lo mismo, es decir, se pide demostrar.

Se detectó que para cada tarea solo se presenta una técnica y respaldado por la tecnología.

Dentro de las tareas o ejercicios propuestos, también hay algunos casos donde se pide demostrar, pero son en cantidad menor a los ejercicios de cálculo. En LD3 presenta soluciones que pueden guiar al alumno en el uso de al menos una técnica de demostración.

Cada una de las técnicas presentadas en los LD se tratan de OMP.

Consideraciones finales

El análisis económico-institucional realizado, es decir, el análisis de currículo (sílabos) nos permitirá identificar el modelo de referencia dominante y los análisis de libros, mediante las cuestiones Q1, Q2 y Q3, nos permite identificar la praxeología dominante (Gascón, 2011) en la enseñanza de vectores para alumnos del primer ciclo universitario y el tipo de OM.

Agradecimiento

Al Programa de Estudantes-Convenio de Pós-graduação–EC-PG, de la CAPES/CNPq – Brasil.

Referencias

Almouloud, S. A. (2015). Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. UNIÓN, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* p. 09-34.

Arenzana, V. (1997). El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. *Revista Suma 25*, 61-70.

Cardoso, F. (2017). *Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear*. Tesis (Doctorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Pará, Brasil.

Celestino, M., R. (2000). *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: As Pesquisas Brasileras na Decada de 90.* 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontificia Universidade de São Paulo.

Chau, J.; Gaita, C.; Medina, N.; Sánchez, R.; Villogas, E. (2010) *Matemáticas Básicas. Texto del curso*. Lima PUCP.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes em théorie antropologique du didactique. *Recherches em didactique des mathématique*, 19(2), 221-266.

Dorier, J. L. (2000). On the Teaching of Linear, *Mathematics Education Library*. Francia.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231.

Gonzaga, M., Montealegre, J., Rodriguez, C. Sanchez, R. (2001) Matemática Básica. Lima PUCP.

Larson, R. (2015). *Fundamentos de álgebra lineal*, (7a. ed.)

Ley Universitaria (2014) disponible en: http://www.minedu.gob.pe/reforma-universitaria/pdf/ley_universitaria.pdf

Luna, M. Almouloud, S., A. Ugarte, F.(en prensa) Estado da arte para a construção do modelo epistemológico de referência sobre vetores. *Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Brasil

Sierspinska, A, Dreyfus, T, Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear Álgebra: the case of linear transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, (1), 41-76.

Stanley, I., Grossman, S. (2004). *Álgebra lineal. México*, D.F.: McGraw-Hill

Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica (2018). Recuperado de: http://facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/informacion-para-el-estudiante/sumillas/

PUCP, Misión y Visión de Facultad de ciencias e ingeniería (2019) Recuperado de: http://facultad.pucp.edu.pe/ingenieria/facultad/mision-y-vision/

Valencia, E. (2015). Errores y dificultades de los estudiantes de ingeniería en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de R^n. tesis (Maestria) Pontificia Universidad Católica del Perú.