SOFTWARES EDUCATIVOS E O ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Carmen Teresa Kaiber
Cristiano Pereira da Conceição

Resumo

A discussão em torno da utilização da informática na educação abrange questões relativas ao acesso, necessidade, vantagens e opções da utilização desses recursos no processo de ensino e aprendizagem. Especificamente em relação à Matemática, um aspecto relevante a ser discutido refere-se à utilização da tecnologia no sentido de proporcionar aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens, que venham a alterar a forma de ver, utilizar e produzir a mesma. Assim, a proposta deste trabalho é apresentar alternativas para o desenvolvimento do estudo das funções trigonométricas, utilizando dois *softwares* de livre distribuição, o Régua e Compasso e o Graphmatica, através da realização de atividades que favoreçam a aprendizagem ativa, o desenvolvimento da criatividade e dos processos de reflexão, promovendo a exploração, investigação, formulação de hipóteses e a busca de resultados. A Trigonometria que já estava presente há quase cinco mil anos, nas construções egípcias e nos trabalhos dos gregos sobre Astronomia pode ser, no século XXI, elaborada por jovens alunos, utilizando uma tecnologia que, como construção humana, tem sua remota origem nos primórdios da própria civilização.

Palavras-chave: *softwares* educativos, funções trigonométricas

Abstract

Discussions on the usage of computer in the educational field involves issues related to the access, need, advantages and options of use of these resources in the teaching and learning processes. Specifically in relation to Mathematics, a relevant aspect to be discussed refers to the use of technology in the sense of providing students real and meaningful learning, which may alter the way of seeing, using and producing it. Thus, this work proposes presenting alternatives for the development of trigonometric functions, making two softwares of free distribution, the ruler and compass and the graphmathic, through the realization of activities that favour active learning, the development of creativity and of the reflection processes promoting the exploration, investigation and formulation of hypotheses and the search of result. Trignometry which has already been present for five thousand years in the Egyptician constructions and in the work of Greeks about Astronomy may be in the XXI century, elaborated by young students, through the use of a technology that, as a human construct has its remote origin in the primordial of its own civilization.

Key words: educational softwares, trigonometric functions

Introdução

Uma educação que conte com os recursos da tecnologia é um direito dos alunos, sendo responsabilidade dos envolvidos no processo educativo garantirem esse direito. Nesse sentido, a educação deve possibilitar a todos uma total inserção social e uso pleno dos seus direitos. Os professores de Matemática não podem se furtar de contribuir para a completa formação do cidadão, a qual inclui sua formação na área tecnológica.

Na visão de Borba (2001), a educação, em sua concepção mais ampla, deve estar subordinada à noção de cidadania e é dentro desse contexto que a informática na educação deve ser compreendida. Segundo o autor,

> *O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares, o estudante deve poder usufruir de uma educação que, no momento atual, inclua, no mínimo, uma alfabetização tecnológica (p.16).*

A exclusão digital está diretamente relacionada às parcelas mais pobres da população mundial. Por esse motivo deve ser objeto de preocupação de governos, empresas, organizações não-governamentais e organizações internacionais, com a adoção de políticas e alocação de recursos que permitam ampliar ao máximo o acesso a computadores e à rede, tendo como objetivo o acesso a todos.

Especificamente em relação à área educacional, deve constituir-se em preocupação por parte das Universidades, sociedades de educadores, escolas, professores, pais e alunos, que precisam buscar a integração da tecnologia nas atividades letivas, em todos os níveis, de maneira a proporcionar não só o acesso à tecnologia, mas também que esse acesso potencialize as aprendizagens e possibilite a criação e organização de novas formas de pensar e agir para construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Softwares educativos no ensino e aprendizagem da Matemática

Vencida a questão do acesso, o grande desafio que os educadores enfrentam, atualmente, é o da utilização das novas tecnologias de forma criativa e inovadora, de maneira que possam auxiliar e potencializar as aprendizagens escolares. Em relação à Educação Matemática, a utilização de novas tecnologias deve proporcionar aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas, como também, influenciar e alterar a forma de ver, utilizar e produzir Matemática.

Durante muito tempo, a utilização da tecnologia (calculadoras, computadores e outras mídias) foi muito criticada, em função dos perigos que sua utilização poderia trazer aos estudantes. Ponderava-se que os alunos passariam a apertar teclas e obedecer à máquina, o que contribuiria para torná-lo, cada vez mais, um repetidor de tarefas.

De acordo com Borba (2001), esse pensamento era defendido (e ainda é), especialmente, por quem acreditava (e acredita) ser a Matemática um corpo de verdades exclusivamente acessíveis através de uma linguagem abstrata e simbólica e, em especial,

> *(...) para aqueles que concebem a matemática como a matriz do pensamento lógico. Nesse sentido, se o raciocínio matemático passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência (p.11).*

Por outro lado, segundo o mesmo autor, há argumentos que apontam o computador como a solução para os problemas educacionais, mas considera que há espaço para outros posicionamentos, defendendo a idéia de que a relação entre a informática e a Educação Matemática deve ser pensada como transformação da prática educativa, e avalia :

> *Parece-nos mais relevante analisar o novo cenário educacional que se constitui a partir da entrada desse "novo ator", a tecnologia informática. Aqui, interessam-nos as possibilidades e dificuldades que se apresentam, sem comparar se são melhores ou piores do que aquelas nas quais essa tecnologia não é utilizada (p.12).*

Nesse contexto, a discussão em torno da utilização da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática abrange, também, questões relativas à necessidade, opções e vantagens da utilização de recursos computacionais no currículo da mesma, bem como na proposta de atividades que insiram essas mídias aos conteúdos, de forma potencialmente criativa, e passem a integrar o fazer pedagógico dos professores.

Mendes (1995) aponta alguns aspectos significativos que o emprego dos recursos oferecidos pela informática no processo educativo podem alcançar:

- os computadores podem auxiliar o aluno a executar e elaborar tarefas, de acordo com seu nível de interesse e desenvolvimento intelectual;
- jogos e linguagens podem auxiliar no aprendizado de conceitos abstratos;
- o recurso pode organizar e metodizar o trabalho, gerando uma melhor qualidade de rendimento;
- destaca-se o elemento afetivo, já que o aspecto motivacional é inerente à relação do aluno com o microcomputador.

Para obtenção dos benefícios acima descritos, Niquini (1996) identificou o uso da informática em três ramos básicos:

- utilização de programas (*softwares*) educacionais, como instrumentos de ensino ligados a uma matéria específica, através de produto elaborado com esse fim;
- utilização de *softwares* para fixação de conteúdos, constituindo-se em uma alternativa lúdica às formas tradicionais e insípidas de ensinar;
- sistematização de pesquisa, funcionando como livro didático eletrônico (dicionários e enciclopédias).

Dos ramos básicos apontados pela autora, o que se refere à utilização de *softwares* educacionais em situações de ensino e aprendizagem é, em relação à Matemática, bastante promissor. Isso porque essa área se utiliza fortemente de ilustrações gráficas e é inegável a importância das imagens na intuição matemática. Assim, a Geometria e toda Matemática, que usam representações gráficas, são as áreas mais privilegiadas com a utilização de tais mídias.

Em relação ao uso de recursos da informática nas aulas de Matemática, um aspecto que pode ser bastante explorado é o trabalho com *softwares* de livre distribuição. Estão disponíveis na *internet* uma série de programas que podem ser utilizados nas aulas de Matemática sem nenhum custo, ou com custo muito baixo. Esses programas, de modo geral, apresentam características como interatividade, exatidão de figuras, aspecto estético agradável e certa facilidade de uso que são fatores positivos para sua utilização.

Nesse contexto, proposta desse trabalho é apresentar alternativas para o desenvolvimento do estudo das funções trigonométricas utilizando dois *softwares* de livre distribuição, o Régua e Compasso e o Graphmatica. Através da realização de atividades, integradas ao currículo e articuladas às demais atividades teóricas e práticas planejadas para o desenvolvimento do conteúdo, busca-se um trabalho que favoreça a aprendizagem ativa, o desenvolvimento da criatividade e dos processos de reflexão, promovendo a exploração, a investigação, a formulação de hipóteses e a busca de resultados.

Trigonometria: um pouco de história

Segundo Boyer (1996), a Trigonometria, assim como os demais ramos da Matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes eram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Na construção de pirâmides, era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que pode ter levado os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Os egípcios, com suas construções, contribuíram para uma Matemática prática e intuitiva e algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como as relações entre perímetros e áreas de circunferências e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história referente a figuras curvilíneas.

Com os gregos, pela primeira vez, surgiu um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. Esse fato justifica a afirmação de Pitombeira de Carvalho (1992, p.101): "A Trigonometria foi uma criação da Matemática grega. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na Navegação e na Geografia." Segundo o autor, o fundador da Trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C. Fragmentos de descrições de seus trabalhos estão contidos nas obras de outros matemáticos gregos e Ptolomeu cita vários resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia. Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando uma tabela de cordas por ele calculada e é provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado dessa tabela de cordas.

Com Ptolomeu (150 d.C.), a Trigonometria grega atingiu seu ápice, registrado, em seu principal trabalho, o Almagesto. Consta do Almagesto uma tabela de cordas (de senos), a dedução do que em notação moderna é a expressão para sen (a±b) e a demonstração para $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, onde A é ângulo agudo. Também, apresenta técnicas que permitem resolver qualquer triângulo, decompondo-o em triângulos retângulos. A Trigonometria exposta por Ptolomeu, no Almagesto, e que continuou se desenvolvendo com os hindus, sempre aplicada à Astronomia, foi utilizada até o Renascimento. A Trigonometria grega era mais geométrica, ao passo que a hindu era essencialmente aritmética (Pitombeira de Carvalho, 1992).

Os árabes receberam a trigonometria de gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético. Introduziram a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante sendo os responsáveis pela utilização da palavra seno (do latim sinus), que significa bolsa, baía.

Se para gregos, hindus e árabes a Trigonometria era importante por suas aplicações à astronomia, a partir do Renascimento, devido às grandes navegações, os fatores de desenvolvimento da Trigonometria foram a cartografia e a topografia. A adoção do sistema heliocêntrico e a necessidade de revisar os cálculos utilizados, até então, também contribuíram para o seu desenvolvimento.

A Trigonometria continuou se desenvolvendo com Descartes e Fermat e o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica surgiu em uma representação gráfica de dois períodos da função seno.

Atualmente, é levada a estudantes secundários uma construção que atravessou civilizações, o que justifica a necessidade de uma reflexão profunda de como esse conhecimento produzido e acumulado durante milênios deve chegar às salas de aula. Assim, aliar a história à resolução de problemas e o uso da tecnologia parece um caminho que merece ser explorado.

Estudando as funções trigonométricas com o Régua e Compasso

O Régua e Compasso (C.a.R) é um software de geometria dinâmica, distribuído livremente sob os termos da GNU GPL[1], disponibilizado na página http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothman/java/zirkel/. O mesmo se encontra na versão 5.0.

Esse *software* permite a criação de construções geométricas que são feitas, manualmente, com régua e compasso. Segundo seu autor, René Grothmann, foi projetado com o propósito didático de ensinar idéias matemáticas por meio da Geometria.

A partir da barra de ferramentas e dos menus, é possível construir pontos, retas, segmentos, semi-retas, paralelas, perpendiculares, intersecções, ângulos, círculos, sendo que a combinação desses objetos permite chegar a construções mais complexas.

O *software* permite, também, desfazer e refazer passos, ocultar detalhes da construção, mover pontos e ver as alterações resultantes na construção, além de desenhar trajetórias de pontos enquanto movimenta um deles, recalcular essas trajetórias movendo outros pontos, descobrir a construção inspecionando as trajetórias, usar macros para aprender um nível básico de programação, calcular expressões em suas construções e exportar as construções para outros documentos. Uma vez construído um objeto, o mesmo pode ser nomeado, medido, ter sua cor e espessura modificados, através da utilização da caixa de edição, que surge na tela quando se clica no objeto com o botão direito do mouse. Clicando com o botão direito do mouse sobre o nome de um objeto, esse nome pode ser movimentado na tela, bastando arrastá-lo.

Assim, utilizando os recursos de dinamicidade do Régua e Compasso, pode-se construir o ciclo trigonométrico, marcar um ângulo e indicar, na construção, os segmentos que representam valores de seno, cosseno e tangen-

[1] **GNU General Public License** (Licença Pública Geral), **GNU GPL** ou simplesmente **GPL**, é a designação da licença para softwares livres. Idealizada por Richard Stallman no final da década de 1980, no âmbito do projeto GNU da Free Software Foundation, define a liberdade de uso para os softwares chamados freeware.

te (também pode ser realizado para cotangente, secante e cossecante). O *software* permite movimentar as construções, sendo possível modificar um ângulo marcado e fazer um estudo completo das funções (sinais, crescimento/decrescimento, valores de máximo e mínimo) a partir da construção gerada. O programa possibilita que os valores das funções trigonométricas de determinado ângulo apareçam na tela, além da edição de texto explicativo.

Para o estudo das funções trigonométricas utilizando o Régua e Compasso, foi elaborada uma seqüência de atividades que passam a ser descritas. No desenvolvimento das atividades serão utilizadas, basicamente, a barra de ferramentas e o menu de *Propriedades de Objetos*. Esse menu é acionado quando se clica com o botão direito do mouse sobre o objeto construído, ou nas opções do programa na parte superior em *Ações* e após *Editar Último Objeto*.

Ao abrir a janela de *Propriedades de Objetos,* é possível visualizar muitas configurações comuns a todos os objetos: nome, descrição, unidade, cor, espessura, ocultar objeto, exibir nome, exibir valor, largura da fonte, estado do fundo, transparência, ponto de parada, entre outras configurações, que dependem do objeto cujas propriedades serão verificadas.

Atividade 1 – Construindo o ciclo trigonométrico

1) Instalado o programa, configurar a barra de ícones. Para tal, clicar no menu superior *Configurações* e, após, clicar na opção *Editar Barra de Ícones*, deixando-a conforme figura 1.

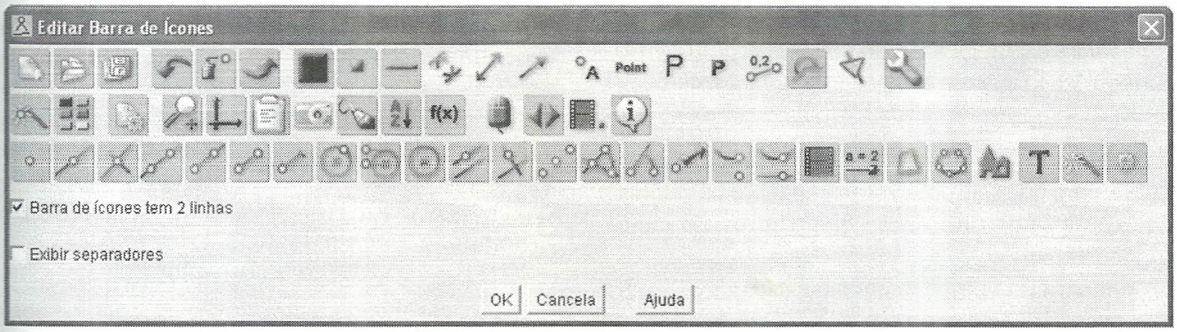
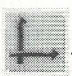
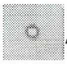
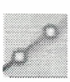
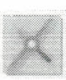
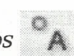


Figura 1 – Barra de ícones do Régua e Compasso

2)Clicar na opção *Mostrar Grade* .

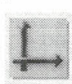
3)Com a opção *Ponto* , definir os pontos (-5,0), (5,0), (0,-4) e (0,4), deixando-os fixos (para deixá-los fixos, deve-se editar as propriedades dos objetos, clicando com o botão direito do mouse sobre os objetos e marcando a opção "*fixo*"), seguida de "OK".

4)Clicar no botão *Reta*  e, a seguir, clicar nos pontos (-5,0) e (5,0). Fazer o mesmo para os pontos (0,-4) e (0,4).

5)Clicar na opção intersecção  e, a seguir, nas retas. Deve aparecer um ponto de intersecção. Nomeá-lo "O". Para tanto, deve-se clicar com o botão direito sobre a intersecção e, na caixa de edição, mudar o nome, deixando selecionada a opção *Exibir Nomes dos Objetos* . Com esses procedimentos, criou-se um sistema cartesiano.

6)Com a opção *Ponto*, definir o ponto (1,0). Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto, deixá-lo fixo e nomeá-lo "A", conforme visto no item 3 dessa tarefa, deixando selecionada a opção *Exibir Nomes dos Objetos* .

7)Criar uma circunferência centrada na origem, passando pelo ponto (1,0) definido anteriormente. Para tanto, clicar no botão *Círculo* , após, na origem (0,0) e, por último, no ponto (1,0).

8) Clicar no botão *Mostrar Grade*  da barra de ferramentas.

9) Pressionar as teclas + ou - do teclado até atingir um tamanho ideal de visualização da construção.

Essa seqüência de procedimentos cria o ciclo trigonométrico. Salve a construção com o nome "ciclo trigonométrico" e utilize-a na atividade 2.

Atividade 2 – Estudando a Função Seno

1)Com a opção *Ponto no Objeto* , inserir um ponto na circunferência, nomeando-o "P" no menu de edição, desmarcando a opção *Fixo* e deixando o nome visível.

2)Utilizar a opção *Semi-reta* , para criar a ligação entre a origem "O" e o ponto "P".

3)Clicar sobre o botão *Ângulos* e, respectivamente, em A, O, P.

4)Clicar com o botão direito no ângulo gerado e nomeá-lo "theta", deixando habilitada a opção *Mostrar Valores de Objetos* e o *Ângulo Obtuso* . Essa opção é importante, pois os ângulos, por padrão, nunca são maiores que 180º no programa. Então, para que seja possível acompanhar os valores de "theta" nos diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico, deve-se utilizar *Ângulo Obtuso.*

5)Criar uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas, passando pelo ponto "P". Para fazê-la, utilizar a opção *Perpendicular* e seguir as instruções da parte inferior da tela (eixo das ordenadas e ponto "P"). Após criada a reta, criar a intersecção da perpendicular com o eixo das ordenadas e nomeá-la "B", deixando-a com o nome visível.

6)Para que o trabalho fique mais agradável, com a opção *Ocultar Objeto* , ocultar a reta perpendicular.

7)Com a opção *Segmento* criar o segmento OB, clicando no botão e, logo após, na origem "O" e no ponto "B".

8)Clicar com o botão direito sobre o segmento criado. Deve aparecer uma *Caixa de Seleção* para escolha do objeto que será trabalhado. Selecionar o objeto que começa com a letra "*s*" e, na caixa de edição, mudar o nome para "seno" trocando a cor e a espessura.

9)Selecionar o botão *Expressão Aritmética* e clicar em qualquer ponto da tela. Aparecerá um menu de edição. No campo *Expressão Aritmética,* digitar "sin(theta)" e no campo *Explanação,* nomeie a expressão como "Seno". Deixe selecionada a opção *exibir nome dos objetos* .

10) Salvar a construção com o nome "seno".

11)Agora, com a opção *Mover Ponto* selecionada, arrastar o ponto "P" ao longo do círculo.

A movimentação do ponto P, através do ciclo trigonométrico, permite verificar e analisar o que ocorre com o segmento que representa o valor do seno. Assim, é possível identificar os intervalos onde o seno é crescente ou decrescente, os valores de máximo e mínimo, bem como realizar o estudo do sinal. Posteriormente, quando a função seno for representada geometricamente, retorna-se à representação do seno no ciclo trigonométrico, estabelecendo relações entre essas diferentes representações. O desenvolvimento e a análise das atividades relativas ao cosseno e a tangente é análogo ao realizado para o seno.

Atividade 3 – Estudando a Função Cosseno

Aproveitando a construção anterior, estabelecer o segmento que representa cosseno de um arco.

1)Para facilitar a construção, posicionar o ponto "P" de tal forma que o ângulo seja 45º.

2)Criar uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto "P". Para fazê-la utilizar a opção *Perpendicular* , clicando no botão, no eixo e no ponto.

3)Como realizado na atividade 2, criar a intersecção entre o eixo das abscissas e a reta perpendicular. Nomeá-la de "C", deixando o nome visível. Ocultar a reta clicando no botão *Ocultar Objeto* .

4)Criar o segmento "OC" com a opção *Segmento* .

5)Clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento, escolher a opção que começa com a letra "s", pois o objetivo é editar as propriedades do segmento e não da reta.

6)Na caixa de edição, nomear o segmento como "cosseno", escolhendo uma cor e espessura.

7)Incluir a expressão aritmética, usando o botão *Expressão Aritmética*, clicando em qualquer ponto da tela. No campo *Expressão Aritmética,* digitar "cos(theta)", para que se tenha o valor do cosseno, e no campo *Explanação,* nomeie a expressão como "Cosseno". Deixe selecionada a opção *exibir nome dos objetos* .

Atividade 4 – Estudando a Função Tangente

Aproveitando a construção anterior, determinar o segmento que representa a tangente de um arco.
1)Para facilitar a construção, posicionar o ponto "P" de tal forma que o ângulo seja 140°.
2)Criar uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto "A". Para tanto, clicar no botão *Reta Perpendicular,* no eixo e no ponto "A".
3)Com o botão *Reta* pressionado, clicar no ponto "P" e no ponto "O".
4)Agora, definir a intersecção da linha criada e a perpendicular, nomeando-a "T" e deixando-a visível.
5)Com o botão *Ocultar Objeto,* ocultar a linha que passa por "O" e "T".
6)Criar o segmento "AT" com a opção *Segmento.*
7)Clicar com o botão direito do mouse sobre o segmento AT, escolhendo a opção que começa com a letra "s", pois se quer editar as propriedades do segmento e não da reta.
8)Na caixa de edição, nomear o segmento como "tangente", escolhendo uma cor e espessura.
9)Agora, incluir a expressão aritmética, utilizando o botão *Expressão Aritmética,* digitando no campo *Expressão Aritmética* tan(theta), para que se tenha o valor da tangente e no campo *Explanação,* nomeie a expressão como "Tangente". Deixe selecionada a opção *exibir nome dos objetos* .

Entende-se que a construção do ciclo trigonométrico e dos segmentos que representam seno, cosseno e tangente possibilitam não só o estudo do comportamento dessas relações nos diferentes quadrantes, o que poderia ser realizado com outros tipos de procedimentos, como também ações por parte do aluno, que implicam o estabelecimento de estratégias e uma retomada de idéias e conceitos geométricos que são exigidos para as construções.

A figura 2 mostra o ciclo trigonométrico construído com o Régua e Compasso e os segmentos que representam os valores de seno, cosseno e tangente de um determinado arco.

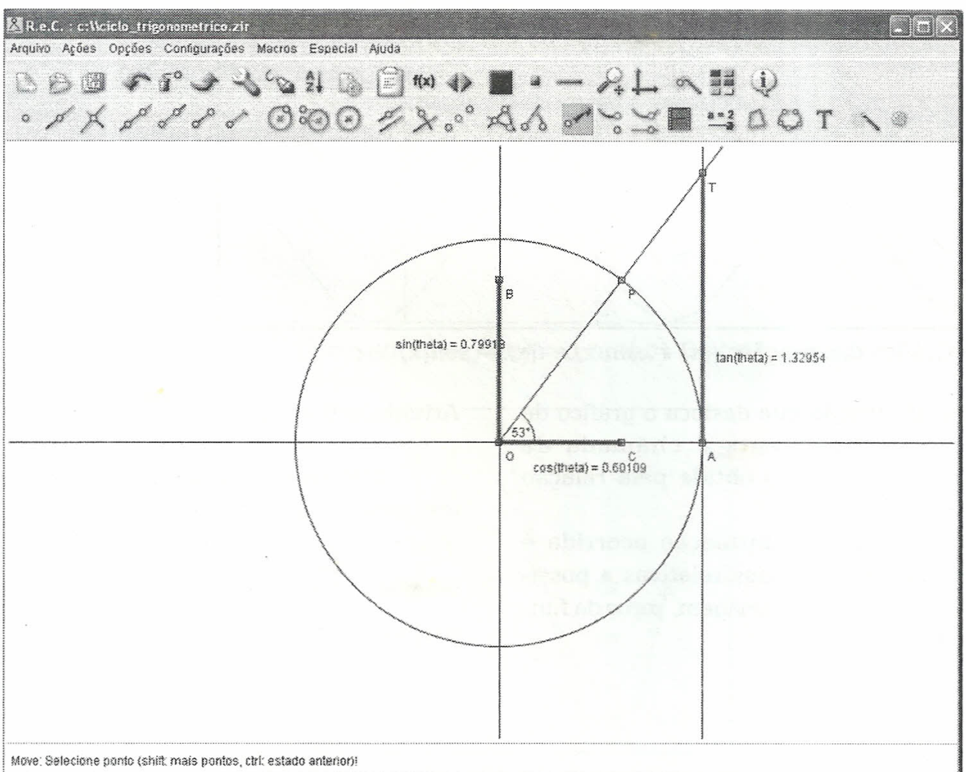


Figura 2 – O ciclo trigonométrico

Transformando Funções Trigonométricas com o Graphmatica

O programa Graphmatica é distribuído livremente na forma de *shareware*[2] (disponibilizado na página http://www8.pair.com/ksoft/index.html). Gera gráficos de funções elementares e possui a opção de trabalhar em coordenadas cartesianas, polares e escalas logarítmicas. É um aplicativo de fácil manuseio, sendo que, para construir um gráfico, basta digitar a equação da função desejada na barra de ferramentas.

O programa pode gerar múltiplos gráficos, de acordo com valores pré-definidos para os coeficientes e indicados junto à equação. É possível, também, visualizar as coordenadas de um ponto através de um cursor que se movimenta com a ajuda do mouse.

Assim, conhecendo os gráficos das funções trigonométricas elementares, podem-se obter os gráficos de funções correlacionadas, através de transformações – simetrias, translações, dilatações e compressões – gerando, dessa forma, o gráfico de muitas outras funções. A partir da construção de uma família de curvas e da análise das suas transformações, estabelecem-se relações que tornam possível a construção de gráficos de funções mais complexas, em um primeiro momento, com o auxílio do software e, posteriormente, a partir da análise das transformações.

As transformações que sofrem as funções e, em particular, as funções trigonométricas, passam a ser descritas e analisadas a partir de um conjunto de atividades realizadas com o Graphmatica, tomando-se como exemplo para o estudo da função Seno.

Atividade 5 – Translações verticais

Utilizando o Graphmatica, construir, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos de *f(x) = sen(x)* e *f(x) = sen(x) + c*, atribuindo para *c* os valores -2, -1, 1, 2.

A partir da construção (fig. 3), é possível perceber que o gráfico sofre um deslocamento na vertical de *c* unidades para cima, quando $c > 0$ e *c* unidades para baixo, quando $c < 0$.

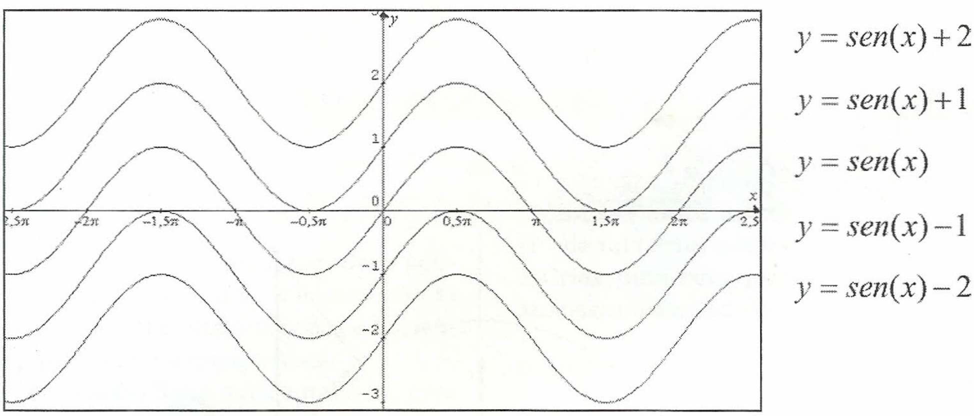


Figura 3 – Gráfico das funções *f(x) = sen(x)* e *f(x) = sen(x) + c*

A transformação que desloca o gráfico de uma função verticalmente é chamada de *translação vertical*, sendo obtida pela relação $g(x) = f(x) \pm c$.

O estudo da transformação ocorrida é complementado com análises relativas a possíveis alterações no domínio, imagem, zeros da função e período.

Atividade 6 – Translações horizontais

Utilizando o Graphmatica, construir, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(x+c)$, atribuindo a *c* os valores $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. A figura 4 mostra essas construções.

[2] Shareware é uma modalidade de distribuição de software em que se pode copiar e distribuir o programa sem restrições, mas a sua utilização é, geralmente, limitada a um determinado período.

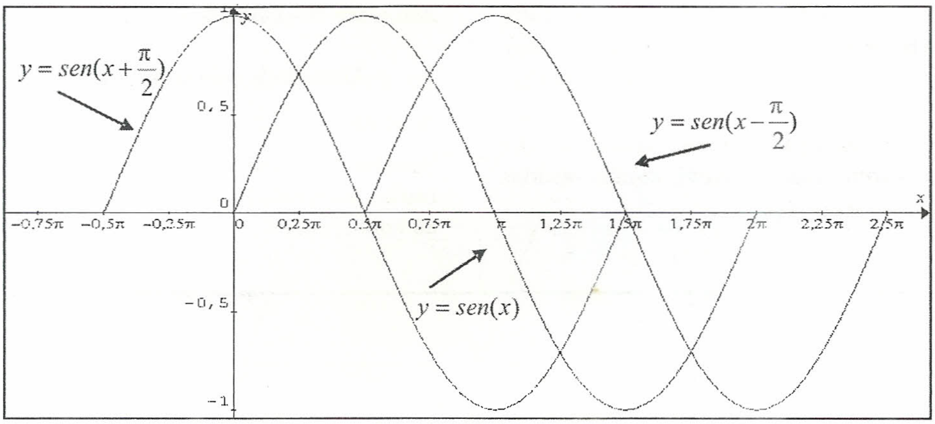


Figura 4 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(x + c)$

A partir da construção, pode-se verificar que o gráfico sofre um deslocamento na horizontal de *c* unidades à esquerda, quando *c* > 0, e *c* unidades à direita, quando *c* < 0.

A transformação que desloca o gráfico de uma função, horizontalmente, é chamada de *translação horizontal*, sendo obtida pela relação $g(x) = f(x \pm c)$.

Novamente são analisados os efeitos desse deslocamento sobre o domínio, imagem, zeros da função e período.

Atividade 7 – Dilatações e compressões verticais

Utilizando o graphmatica, construir os gráficos de $d_1 d_2 d_3 \cdots d_k$ e $f(x) = c.sen(x)$ atribuindo a *c* os valores $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3$. As figuras 5 e 6 mostram as construções.

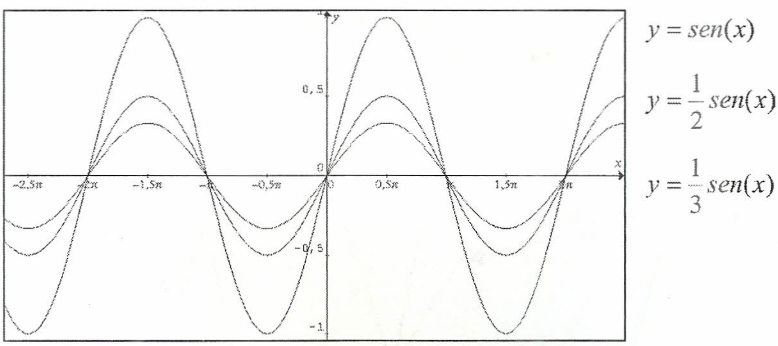


Figura 5 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = c.sen(x)$, 0<c<1

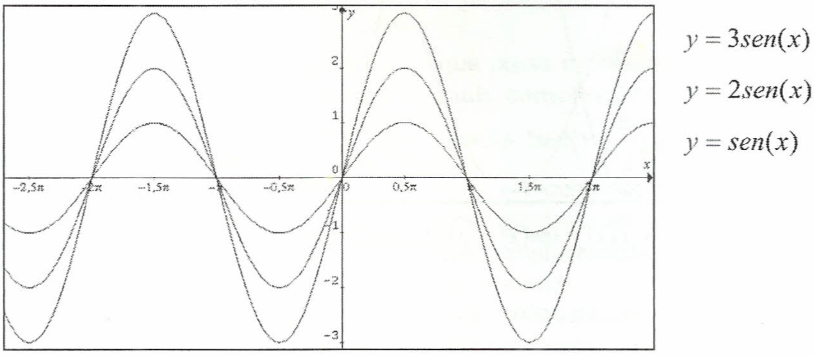


Figura 6 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = c.sen(x)$, c>1

Pode-se verificar, a partir das construções, que os gráficos sofrem compressão vertical, quando $0 < c < 1$, e dilatação quando os valores de $c > 1$.

Essas transformações são chamadas de *dilatação e compressão vertical*, sendo obtidas pela relação $g(x) = |c|.f(x)$.

Atividade 8 – Dilatações e compressões horizontais

Utilizando o Graphmatica, construir os gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(ax)$ com $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3$. Para facilitar a visualização, restringe-se o domínio ao intervalo $[0, 2\pi]$. As figuras 7 e 8 mostram as construções.

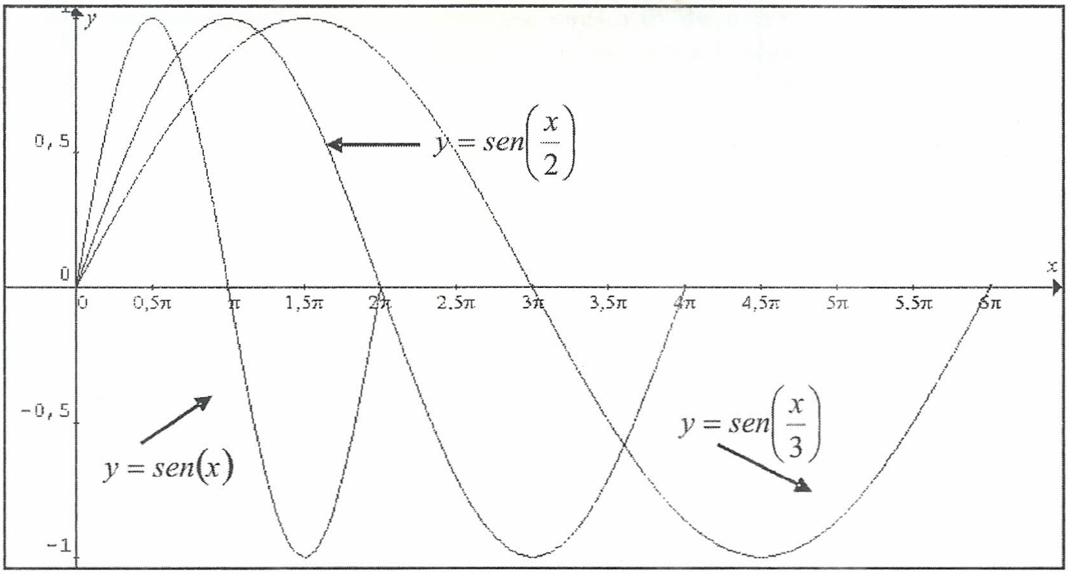


Figura 7 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(ax)$, 0<a<1

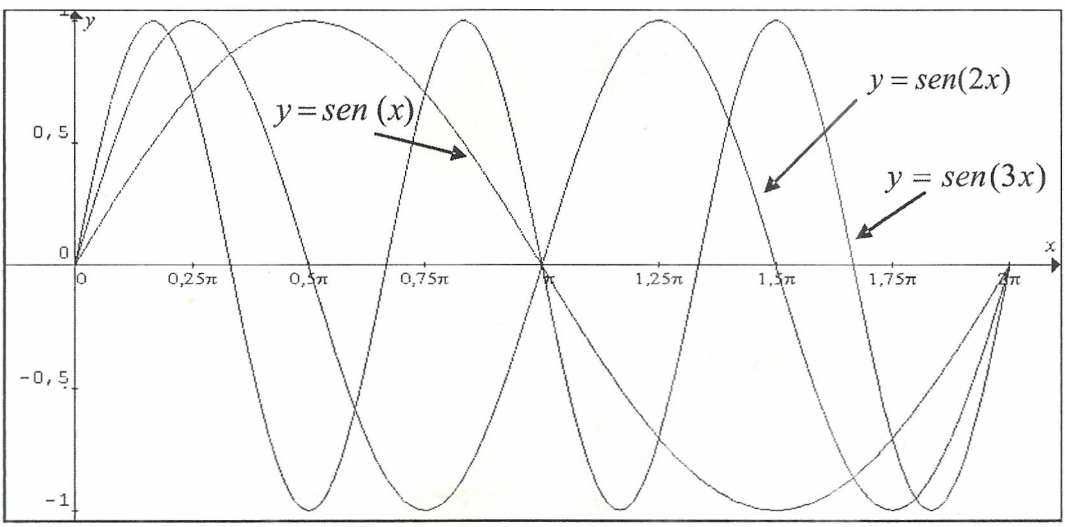


Figura 8 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(ax)$, a>1

Pode-se verificar, com as construções, que os gráficos sofrem compressão horizontal quando $c < 1$ e uma dilatação quando os valores de $c > 1$.

Essas transformações são chamadas de *dilatação e compressão horizontal*, sendo obtidas pela lei geral $g(x) = f(|c|.x)$.

Atividade 9 – Simetrias

Utilizando o Graphmatica, construir os gráficos de $f(x) = sen(x)$, $f(x) = -sen(x)$ e $f(x) = sen(-x)$. Novamente, para facilitar a visualização, restringe-se o domínio ao intervalo [0, 2π]. As figuras 9 e 10 apresentam as construções.

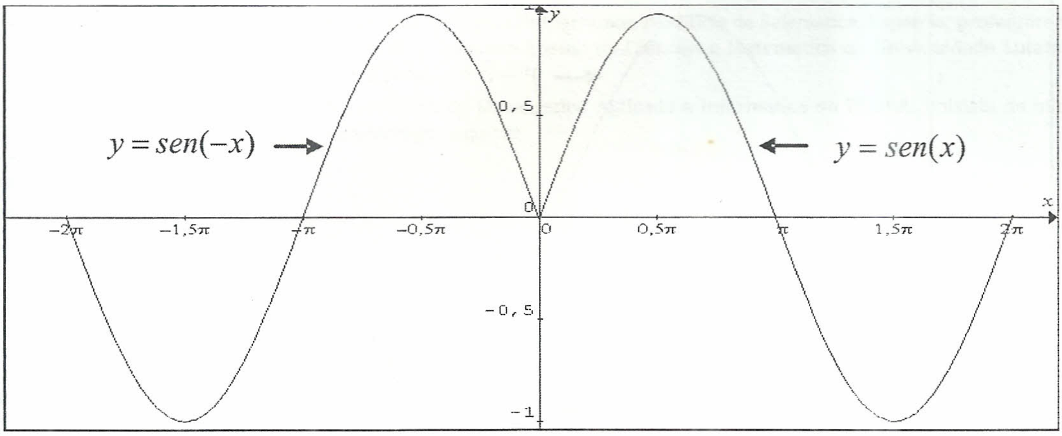


Figura 9 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(-x)$

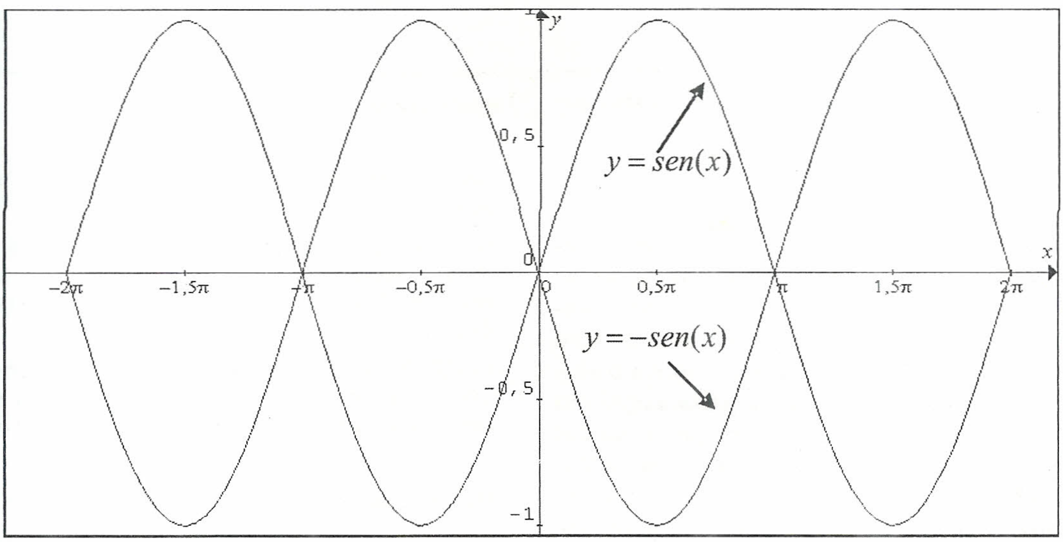


Figura 10 – Gráfico das funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = -sen(x)$

Os gráficos das figuras 9 e 10 apresentam situações de simetria. Quando estabelecida em relação ao eixo x, a simetria é obtida pela lei geral $g(x) = -f(x)$ e quando estabelecida em relação ao eixo y, pela lei $g(x) = f(-x)$.

Entende-se que o estudo das transformações nas funções, com o auxílio do programa e o reconhecimento de padrões de comportamento, a partir das relações estabelecidas entre as representações algébrica e gráfica, permitem ao aluno, apropriar-se dessas transformações, de maneira que possa representar graficamente uma função mais complexa como, por exemplo, a função $y = 3 + 2sen(x - \frac{\pi}{2})$, sem o auxílio do programa.

A construção, agora com lápis e papel, deve ser realizada a partir da análise de cada uma das transformações às quais a função é submetida, a saber:

- translação horizontal para a direita de $\frac{\pi}{2}$ unidades;

· dilatação vertical de 2 unidades;
· translação vertical de 3 unidades.

A figura 11 mostra o gráfico da função $y = 3 + 2sen(x - \frac{\pi}{2})$, sendo construído por partes.

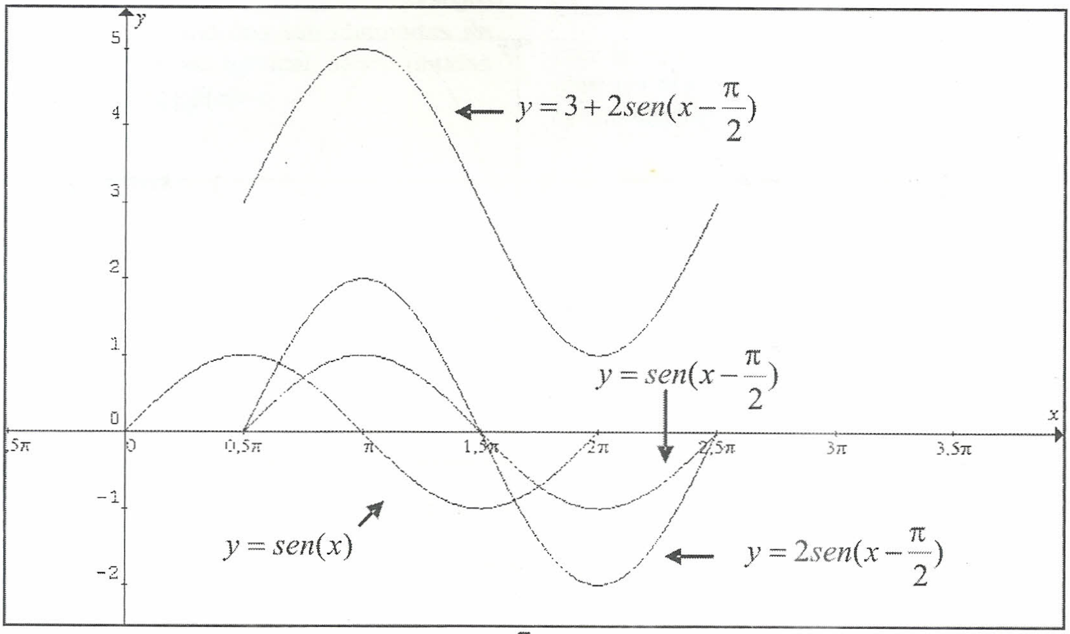


Figura 11 – Gráfico da função $y = 3 + 2sen\,(x - \frac{\pi}{2})$ sendo construído.

Conclusão

O trabalho com softwares educativos permite perceber um grande potencial de inserção dos mesmos no ensino e aprendizagem da Matemática. Levar esse trabalho para a sala de aula possibilita um trabalho autônomo, motiva o aluno, aumentando o interesse e a participação em aula, o que leva a uma melhor compreensão dos conteúdos. Incorporar tecnologia às aulas de Matemática vai muito além de proporcionar aos estudantes os instrumentos tecnológicos. A aprendizagem deve desenvolver-se em um ambiente apropriado e em situações que favoreçam a construção sólida dos conhecimentos, transformando a maneira de fazer e perceber a Matemática.

Referências

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo:Edgard Blücher,1996.

MENDES, M.H. A informática na Escola. **In: Jornal Psicopedagogia**. Goiânia, ano I, n. 2, maio/junho 1995.

NIQUINI, D. P. **Informática na Educação**:implicações didático-pedagógicas e construção do conhecimento. Brasília: Universidade Católica de Brasília,1996.

PITOMBEIRA de CARVALHO, J.B. A História da Trigonometria. **In:______. Trigonometria e Números Complexos.** Rio de Janeiro: SBM, 1992.

Obras consultadas

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G (orgs.). **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'Água, 2000.

KAIBER, Carmen Teresa., CONCEIÇÃO, Cristiano Pereira. Internet e Softwares Gratuitos como Recurso no Ensino da Matemática. **In: Acta Scientae**, Canoas, v. 4, n.1, p.133-42, jan.-jun. 2002.

GASPERETTI, M. **Computador na Educação.** São Paulo: Esfera, 2001.

LOLLINI, P. **Didática e computador**: quando e como a informática na escola. São Paulo: Loyola, 1991.

MORAES, R. A. **Informática na Educação**. Rio de Janeiro: DP&A,2000.

SANDHOLTZ, J. H. et alii. **Ensinando com tecnologia**: criando salas de aula centradas nos alunos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SILVEIRA, S. A. **Exclusão digital** – A miséria na era da informática. São Paulo: Fundação Perseu Abramo, 2001.

Carmen Teresa Kaiber é doutora em Ciências da Educação pela Universidade Pontifícia de Salamanca, Espanha; professora titular do Curso de Matemática e do programa de Pós Graduaçãoem Ensino de Ciências e Matematica da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA. E-mail: kaiber@ulbra.br

Cristiano Pereira da Conceição é acadêmico do curso de Matemática Aplicada a Informática da ULBRA, bolsista de iniciação científica ULBRA, e-mail: cristiano-pereira@procergs.rs.gov.br

submetido em 14/05/2007

aprovado em 20/06/2007