VIBRACIONES Y ONDAS CON MATHEMATICA

Roy Sánchez Gutiérrez
rwsanche@pucp.edu.pe

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de la Matemáticas, IREM-PUCP, Perú

Resumen

Los diversos y variados problemas científicos y tecnológicos necesitan, para ser resueltos adecuadamente, de una formulación técnica, de un sustento matemático o soporte estadístico. Los métodos matemáticos desempeñan un papel importante en el modelamiento de problemas reales. Para describir las vibraciones de resortes, de láminas rectangulares o circulares requieren de conocimientos teóricos de matemáticas y físicas. Los métodos matemáticos son las herramientas teóricas, son los modelos matemáticos, que explican o detallan pormenorizadamente su comportamiento una ecuación diferencial junto a valores iniciales o problemas de valores de frontera se pueden determinar o aproximar la solución. Para visualizar o simular dichas soluciones nos apoyaremos en Mathematica de Wolfram o Matlab. Los problemas de valores iniciales explican los sistemas masa-resorte y problemas de valores de frontera las vibraciones de láminas rectangulares o circulares. Para describir estos sistemas se necesitan varias disciplinas matemáticas tales como las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, las ecuaciones en derivadas parciales, series de Fourier y métodos numéricos.

Nuestro objetivo es explicar a los estudiantes y profesores de ciencias e ingeniería la solución de los problemas de resortes, vibraciones de láminas rectangulares y láminas circulares usando los modelos matemáticos; mostrar la gráfica de la solución y simular estos problemas de vibraciones con la ayuda de Mathematica (Wolfram) o Matlab.

Palabras clave: Vibraciones mecánicas, ecuaciones diferenciales, series de Fourier, problemas de valores iniciales, problemas valores en la frontera, métodos numéricos.

Introducción

Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina modelo matemático. La solución de ese modelo nos brindará las características de ese fenómeno.

Vibraciones. Sistema masa-resorte

Operadores Diferenciales.

Un operador es una aplicación definido sobre algún subconjunto de R^n que transforma una función en otra función. Los operadores que trataremos son lineales en su dominio y que incluyen ecuaciones diferenciales en su definición. Consideramos los espacios de n dimensiones, R^n. Con el operador Nabla se pueden estudiar problemas que incluyan gradientes, divergencias y rotacionales. El operador de Laplace sirve para las ecuaciones diferenciales parciales y con ello estudiar las membranas circulares (el operador en coordenadas polares). También podemos definir otros operadores que incluyan ecuaciones diferenciales, funciones integrales, matrices, etc.

Sistema masa-resorte.

Para describir el movimiento del sistema masa resorte se requiere de leyes, una de ellas es la **ley de Hooke.** Esta ley dice que el resorte ejerce una fuerza de recuperación en sentido contrario a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación. La segunda ley de Newton para deducir la ecuación diferencial que nos da la ecuación del movimiento con las fuerzas que intervienen en el sistema a partir del punto de equilibrio. Finalmente, las fuerzas amortiguadoras que actúan sobre el cuerpo, se consideran proporcionales a la velocidad instantánea.

La ecuación diferencial que describe el desplazamiento de una masa sujeto a un resorte, es decir, las vibraciones mecánicas de la masa,

$$my''[t] + by'[t] + ky[t] = g(t), y[t_0] = y0, y'[t_0] = y'0;$$

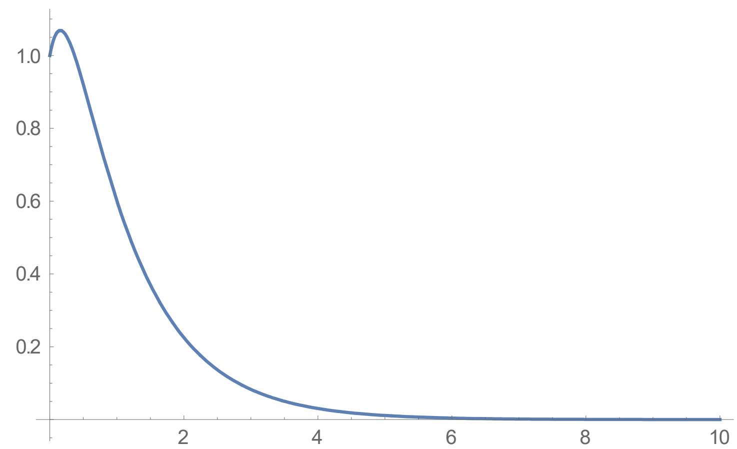
donde m>0 es la masa, b>0 es la constante de amortiguamiento o fricción y k>0 es la constante de rigidez del resorte.

Movimiento sobre amortiguado.

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 5y'[t] + 4\,y[t] = 0, y[0] = 1, y'[0] = 1$$

con las condiciones iniciales dicen que el movimiento de la masa parte de una posición localizada 1 unidad por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. La gráfica de la solución del movimiento amortiguado

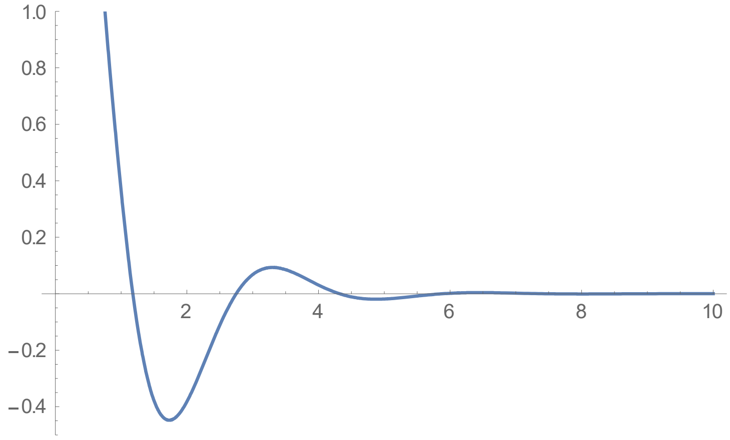


Movimiento críticamente amortiguado

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 2y'[t] + y[t] = 0, y[0] = 0, y'[0] = -3;$$

tiene un movimiento críticamente amortiguado. Inicia con una fuerza de vibración pero es superado por las fuerzas de amortiguamiento.

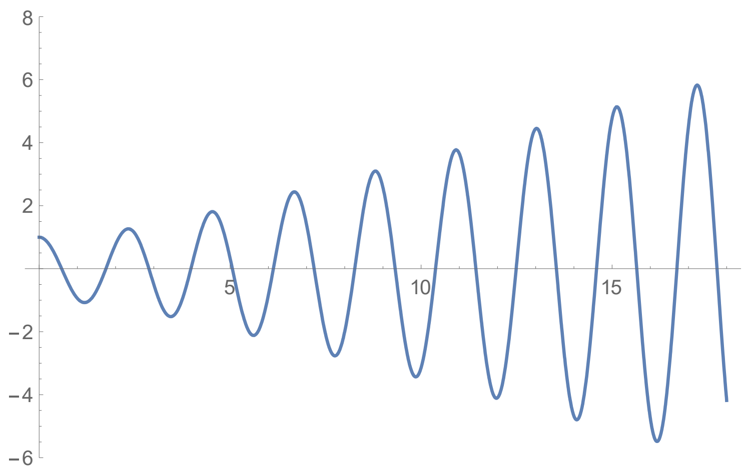


Resonancia. Cuando en la fuerza que obliga al sistema a seguir vibrando f(t) tiene frecuencia igual a la frecuencia de las vibraciones libres no amortiguadas, $\gamma = \omega$. Esta igualdad puede ocasionar problemas a sistemas de vibraciones como en el siguiente ejemplo.

La ecuación diferencial

$$y''[t] + 9y[t] = 2Cos(3t), y[0] = 1, y'[0] = 0;$$

Determina el movimiento



Para tiempos grandes y cuando $\gamma = \omega$, las grandes oscilaciones de la masa forzaran el resorte más allá de su límite elástico. Es un poco ideal por no considerar las fuerzas de rozamiento.

Ondas en una dimensión y dimensión dos

Vamos a darle propiedades de vector a las funciones de clase C^{∞}. Definimos el producto interior de dos funciones como la integral sobre un intervalo. Dos funciones serán ortogonales si dicha integral es cero. La solución de los movimientos vibratorios en dos dimensiones usando series de Fourier. Un conjunto infinito de funciones ortogonales será la base para las funciones de la serie de Fourier.

Las series de Fourier son muy útiles para describir los fenómenos periódicos, fenómenos "intermitentes" de corta duración.

Series de Fourier.

Sea una función $f(x)$, continua por tramos para $x \in]-L, L[$ con $L > 0$, periódicas de período T= $2L$, donde $f(x) = f(x+T)$. La función $f(x)$ puede ser continua por tramos con un número finito de discontinuidades de salto. La serie de Fourier de una función

$f(x)$, $x \in]-L, L[$ con $L > 0$ está dada por

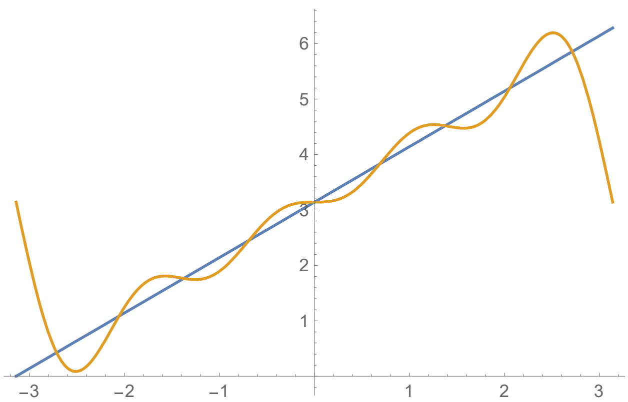
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)]$$

Por determinar los coeficientes a_n y b_n , denominados coeficientes de Fourier.

Convergencia. La función debe ser de clase C^1 , la función y su derivada deben ser continuas en el intervalo $I =]-L, L[$. La serie de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos de continuidad y en los puntos de discontinuidad en la media aritmética del salto.

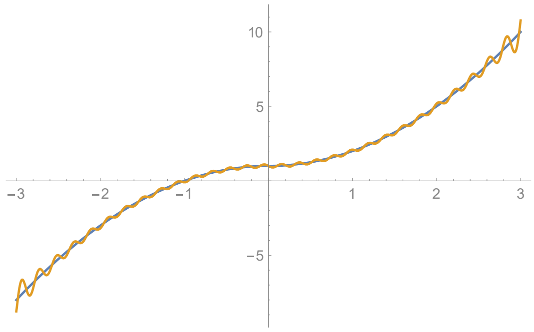
Ejemplos

Series de Fourier de $f(x) = x + \pi$.



Una función seccionada en el intervalo $]-\pi, \pi[$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1 + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$



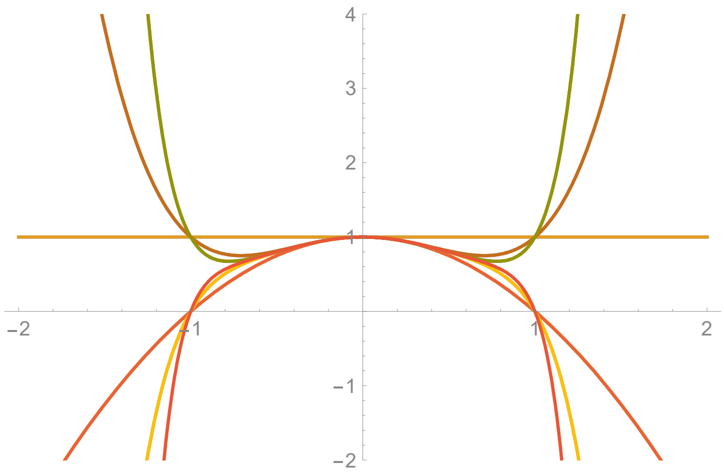
Describiremos gráficamente la idea de convergencia en las series de Fourier. Cuantos más sumandos se considera, la aproximación de la gráfica de la serie es “casi coincidente” con la gráfica de f.

Las funciones que tienen simetría respecto al eje de ordenadas o respecto al origen de coordenadas serán representadas por series de Fourier solo en cosenos o series de Fourier solo en senos para que cumpla con las características de simetría.

Serie de potencias. Las funciones analíticas se pueden expresar como serie de potencias alrededor de un número en un intervalo, denominado intervalo de convergencia. Su aplicación es la solución de problemas de valores iniciales.

Ejemplo.

La función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{1+x^2}$ con series de potencias alrededor del origen de coordenadas.



Onda Unidimensional

Sea una cuerda de longitud $L > 0$, localizado sobre el intervalo del eje x, [0, L] con extremos en $x = 0$ y $x = L$. El movimiento de la cuerda se da en el plano xy, perpendicular al eje x, son vibraciones transversales al eje x. La cuerda es flexible y homogénea. El desplazamiento de un punto de la cuerda está representado por la función $u(x, t)$, donde t es el tiempo.

La ecuación en derivadas parciales que sirve de modelo matemático junto a sus condiciones de frontera y las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \\ \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0 \\ u(x,t) = f(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = g(x) \end{cases}$$

El método de separación de variables resuelve este problema lineal. Divide el problema en dos ecuaciones diferenciales ordinarias equivalentes con condiciones de frontera. La superposición de las soluciones resulta ser la solución de la onda unidimensional.

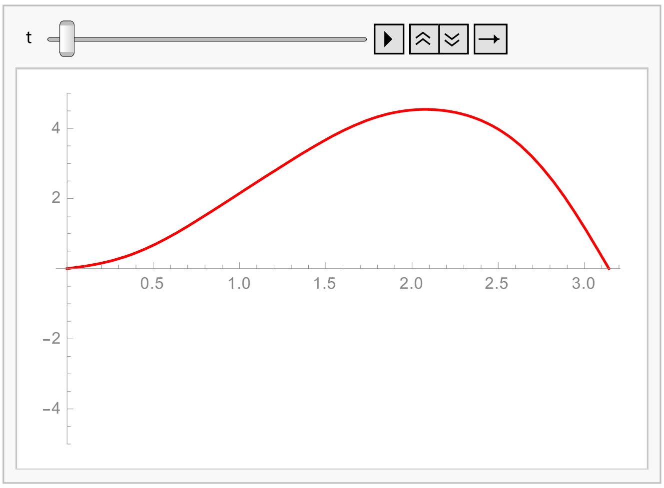
Sobre las condiciones de frontera, se tienen tres formas, estáticas, en movimiento o mixtas, denominadas de Dirichlet, de Neuman o de Robin, respectivamente.

Ejemplo. Una cuerda de longitud $L = \pi$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \\ \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) = x^2(\pi - x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0 \end{cases}$$

La solución $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(1+2(-1)^n)}{n^3}\right) cos(nt)sen(nx)$.

Mostramos una animación para $n = 6$ en la solución de la ecuación de onda.



La solución resulta de una superposición de ondas estacionarias o modos normales.

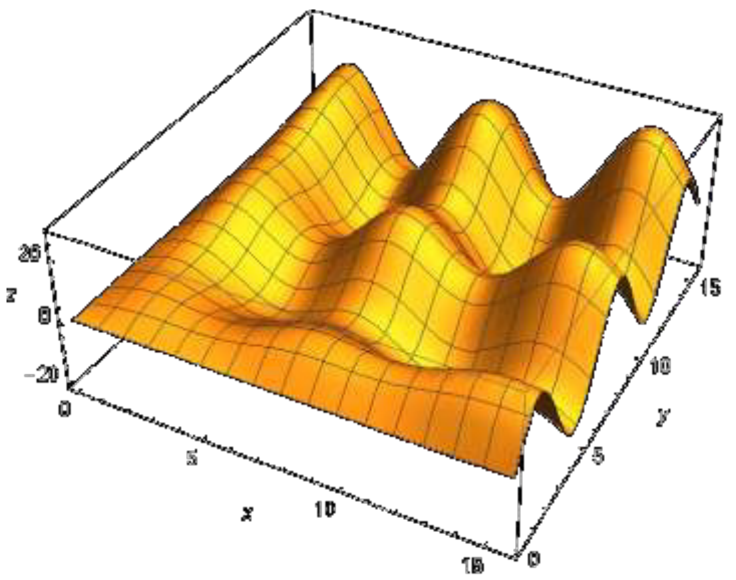
Numerosos instrumentos musicales emplean cuerdas vibrantes para generar los sonidos que producen. Cuando una cuerda vibra con una frecuencia dada, las vibraciones con su frecuencia se transmiten a través del aire y llegan al oído del que escucha.

Membranas Rectangulares.

Membrana rectangular de dimensiones a y b, ubicado en el plano xy, sobre la región rectangular $[\mathbf{0}, \boldsymbol{a}]\boldsymbol{x}[\mathbf{0}, \boldsymbol{b}]$**,** sujeta en la frontera o bordes de la membrana.

Sobre las condiciones de frontera, tenemos la de Dirichlet que tiene las fronteras fijas, sin movimientos, condiciones de frontera, la **condición de frontera** de **Neumann** se presenta cuando se le especifican los valores de la derivada o del movimiento inicial, la derivada de una solución tomada sobre la frontera, borde o contorno del dominio.

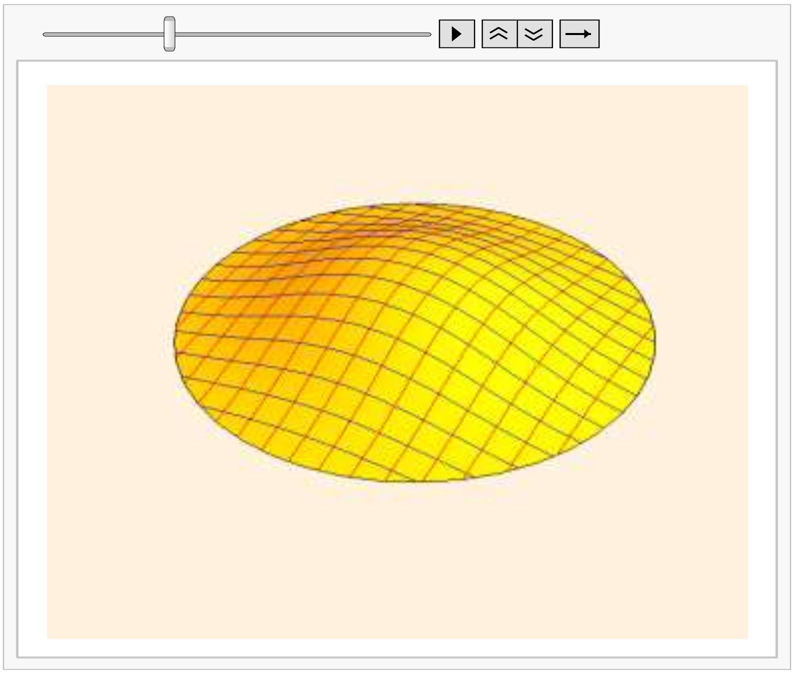
Las ondas también se pueden generar sobre planos, esferas, toros, superficies hiperbólicas, etc. Con diferentes condiciones de frontera y condiciones iniciales.



Membranas Circulares

Un problema de valores en la frontera es el de una membrana circular sujeta en su frontera y que vibra los puntos interiores de la membrana perpendicularmente al plano que los contiene. Las ecuaciones bidimensionales de onda expresadas en coordenadas polares.

El método de separación de variables asume la existencia de simetría axial, es decir, la función que describe el movimiento es independiente de la coordenada angular. Se denomina a estas vibraciones, **vibraciones radiales.** Un modelo físico evidente es la de un tambor vibratorio. Podemos imaginar cuando se lanza una piedra a una piscina con agua, las ondas en forma circular que se forman son movimientos en tres dimensiones perpendiculares al plano de la superficie del agua.



Una membrana circular de radio $\rho = R$ con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, es decir, fijos. La función $u(\rho, t)$ es el modelo matemático que describe el movimiento de los puntos interiores de la membrana, que satisface las condiciones de frontera y condiciones iniciales.

El operador Laplaciano se expresa en coordenadas polares para describir mejor el movimiento vibratorio de los puntos de la membrana en términos de (r, θ).

Referencias

Hassani, S. (2000). *Mathematicla Methods*, Springer.

Kreyszig, E.(2003). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Editorial Limusa.

Nagle, S. (2005). *Ecuaciones Diferenciales con Problemas en la Frontera*, Editorial Pearson.

Piskunov, N. (1977). *Cálculo diferencial e Integral*, Editorial MIR Moscú.

Zill, D. (2008). *Ecuaciones Diferenciales*, Editorial McGraw Hill.