A SUA CALCULADORA ERRA?

Sandra Pacheco Renz

Resumo

A proposta apresentada neste artigo é discutir quais os tipos de erros que podem estar envolvidos ao se obter uma solução numérica para um problema matemático através do uso de calculadoras científicas. Assim, objetiva-se contribuir para o desenvolvimento de um senso crítico nos estudantes, de forma que os resultados apresentados pelas calculadoras sejam compreendidos e analisados.

Palavras-chave: calculadora científica, erros de arredondamento

Abstract

This paper discusses which errors may occur when obtaining numerical solution for mathematical problems using a scientific calculator. This study aims to contribute to the development of students' critical sense when using a scientific calculator, in order to understand and analyse the results.

Key-words: scientific calculator, round-out-figures erros

Introdução

A calculadora é um recurso tecnológico acessível e muito utilizado. Seu uso em sala de aula é indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

> *Estudos e experiências evidenciam que a calculadora é um instrumento que pode contribuir para a melhoria do ensino da Matemática. A justificativa para essa visão é o fato de que ela pode ser usada como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Além disso, ela abre novas possibilidades educativas, como a de levar o aluno a perceber a importância do uso dos meios tecnológicos disponíveis na sociedade contemporânea. A calculadora é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação. (BRASIL, 1997, p. 34)*

Com o uso da calculadora, o aluno poderá elaborar e explorar novas estratégias, organizar dados, formular e verificar hipóteses e fazer cálculos com maior rapidez. A maior rapidez nos cálculos significa ganho de tempo. Tempo este que pode ser aproveitado para o trabalho com diferentes tipos de problemas e com as diversas estratégias de resolução, de modo que, podem ser formulados problemas com dados numéricos reais sem a preocupação de evitar cálculos extensos.

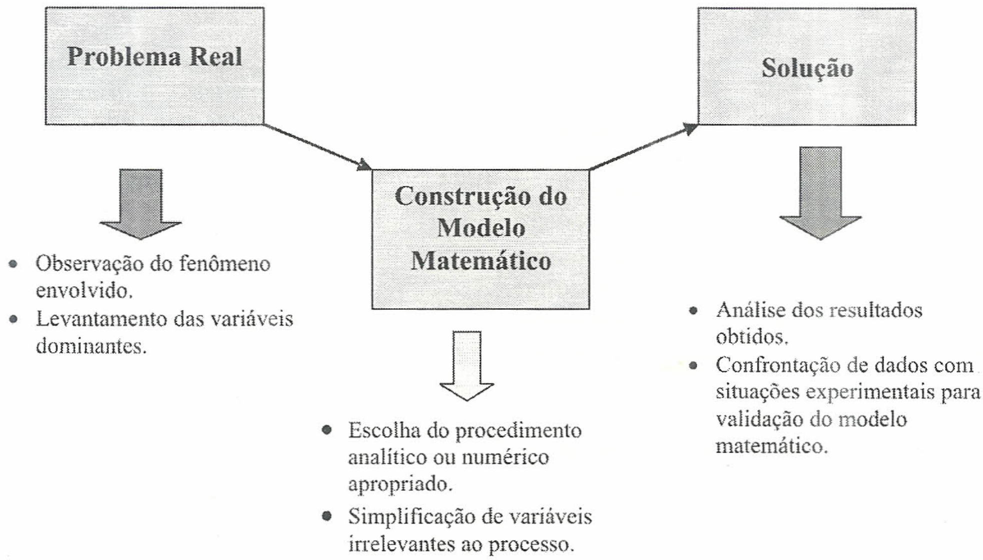
Como qualquer material didático, o uso da calculadora em sala de aula sempre causa uma série de polêmicas, pois a sua utilização exige mudanças na práxis do professor, uma vez que é preciso que ele tenha clareza de objetivos e escolha a metodologia mais adequada para alcançá-los. Além disso, cabe a ele propor situações desafiadoras que permitam ao aluno usar a calculadora como recurso metodológico na resolução ou no desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Desta forma, a proposta apresentada neste artigo é discutir quais os erros que estão envolvidos no processo de solução de um problema matemático, através do uso de uma calculadora ou até mesmo do computador, de modo que o estudante possa analisar criticamente os resultados apresentados pela máquina. Para tanto, é necessário uma introdução exemplificativa sobre cada um dos tipos de erros.

Noções Básicas sobre Erros

Ao utilizar uma calculadora científica ou um computador para resolver um problema matemático, às vezes, os cálculos são efetuados corretamente, no entanto, a solução não está coerente com o problema proposto. Surge então a pergunta: quais os erros que podem estar envolvidos nesse processo?

Alguns autores, dentre eles citam-se Roque (2000), Ruggiero e Lopes (1997) e Cláudio e Marins (1994) explicam os erros cometidos ao trabalhar com máquinas digitais como calculadoras científicas e computadores. Para o entendimento dos mesmos, apresenta-se o esboço a seguir.



Quadro 1 - Esquematização

Duas fases podem ser identificadas no esquema anterior: a fase da modelagem, na qual um modelo matemático que descreve o comportamento do problema real é obtido; e a fase da resolução, em que se obtém a solução do modelo matemático através da aplicação de métodos analíticos ou métodos numéricos. Para este último, utilizam-se calculadoras ou computadores. Nessas fases há vários erros envolvidos que serão discutidos a seguir.

Erros na fase de modelagem

Ao tentar aproximar um problema real por meio de um modelo matemático, faz-se necessário desprezar variáveis que não interferem no desenvolvimento do processo. Por exemplo, ao deixar cair um objeto de uma mesa, algumas variáveis envolvidas no fenômeno são: as dimensões e o peso do objeto, a altura da mesa, o tempo para o objeto chegar ao solo, a velocidade, o espaço percorrido pelo objeto, a gravidade, a resistência do ar, entre muitas outras. Quais dessas variáveis poderiam ser ignoradas de forma a não afetar o problema?

Um modelo matemático é uma idealização do mundo real que permite cálculos matemáticos, mantendo, entretanto, uma precisão suficiente para a obtenção de resultados plausíveis. Desta forma, ao ajustar as variáveis envolvidas no processo, provocam-se erros de simplificação na modelagem matemática.

Deve-se ainda mencionar aqueles erros que estão inseridos dentro dos dados coletados, principalmente os erros resultantes das medidas, como, por exemplo, os valores de medidas de tempo, de temperatura, de distância, de intensidade luminosa, entre muitos outros. Esses dados são obtidos através de instrumentos que, em muitos casos, têm precisão limitada.

Erros na fase de resolução

Para a resolução dos modelos matemáticos é necessário fazer aproximações. Tais aproximações podem gerar os chamados erros de truncamento e também os erros de arredondamento.

Os erros de truncamento são aqueles cometidos quando se substitui qualquer processo infinito por um processo finito. Por exemplo, suponha que se queira calcular o número de Euler, dado pela série infinita (CLAUDIO e MARINS, 2000, p. 35),

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}.$$

Para obter o valor do número de Euler por este processo, efetua-se o cálculo da série em várias parcelas e depois, após um número determinado de operações finaliza-se o cálculo, ou seja, trunca-se a série. Ao truncar qualquer série comete-se um erro causado pelo abandono das parcelas que não são somadas.

Já os erros de arredondamento surgem quando se trabalha com calculadoras digitais ou computadores para representar números pertencentes ao campo dos reais, como, por exemplo, o número racional $\frac{2}{3}$, cuja representação decimal 0,666... é uma dízima periódica infinita. Uma calculadora representa tais números no sistema denominado Aritmética de Ponto Flutuante.

A representação dos números em Ponto Flutuante permite expressar um número real r, na base β, em uma forma canônica, ou seja,

$$r = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_k \times \beta^{\alpha},$$

onde β é a base do sistema de numeração adotado; α é o expoente da base, pertence ao conjunto dos números inteiros em $[I, S]$, com I sendo o limite inferior e S o limite superior. Os dígitos $d_1 d_2 d_3 \cdots d_k$ formam a mantissa do número e representam seus dígitos significativos, Roque (2000). Para a base 10 têm-se os números decimais da seguinte forma:

$$n = \pm 0, d_1 d_2 d_3 \cdots d_k \times 10^{\alpha}$$

com $1 \leq d_1 \leq 9$ e $0 \leq d_i \leq 9$, para $i = 1, 2, \ldots, k$, sendo α denominado expoente da base decimal.

O formato de Ponto Flutuante de um número é obtido limitando-se a mantissa desse número em k dígitos decimais, de modo que essa limitação é obtida de duas formas: o método de arredondamento do tipo corte e o método de arredondamento. O primeiro, também chamado de método de cancelamento, consiste em desprezar os dígitos além da precisão previamente estabelecida. O segundo consiste em aproximar para o número mais próximo, ou seja, se $d_{k+1} \geq 5$, adiciona-se 1 a d_k para obter o número n com arredondamento. Quando $d_{k+1} < 5$, simplesmente cortam-se todos os dígitos seguintes aos k primeiros algarismos.

Por exemplo, o valor do número ln(2) na forma decimal expande-se em infinitos dígitos, ln(2)=0,69314718.... Na representação em Ponto Flutuante tem-se:

$$\ln(2) = 0{,}69314718\ldots \times 10^{0}.$$

Para uma precisão de cinco dígitos utilizando o método do arredondamento do tipo corte encontra-se:

$$\ln(2) = 0{,}69314 \times 10^{0}.$$

Utilizando o arredondamento no sexto dígito tem-se o número 7 que é maior que cinco, portanto adiciona-se 1 ao quinto dígito, ou seja,

$$(0{,}69314 + 0{,}00001) \times 10^{0} = 0{,}69315 \times 10^{0}.$$

Ao fixar a mantissa e realizar um arredondamento, de qualquer tipo, causam-se erros. Esses erros podem ser medidos através do erro absoluto e do erro relativo. O erro absoluto, indicado por E_A, é o módulo da diferença entre o valor "exato" e o valor aproximado,

$$E_A = |E - A|.$$

Cabe ressaltar que o número exato E é aquele que representa o valor inteiro ou completo de uma grandeza, como, por exemplo, o número $\sqrt{2}$ ou ln(2). Já o número aproximado A é aquele utilizado para representar o número exato. Por exemplo, se o valor exato de um número é dado por $E = 0{,}300\times10^1$ e o valor aproximado é $A = 0{,}3100\times10^1$, então o erro absoluto é:

$$E_A = |E - A| = |0{,}300 \times 10^1 - 0{,}3100\times 10^1| = 0{,}1.$$

O erro relativo é definido como o quociente entre o erro absoluto e o módulo do valor exato, ou seja,

$$E_R = \frac{E_A}{|E|} = \left|\frac{E-A}{E}\right|.$$

Por exemplo, se o valor exato de um número é dado por $E = 0{,}300\times10^1$ e o valor aproximado é $A = 0{,}3100\times10^1$, então o erro relativo é:

$$E_R = \frac{E_A}{|E|} = \left|\frac{0{,}1}{0{,}300\times10^1}\right| = 0{,}333\ldots\times10^{-1}.$$

Como o objetivo de melhor compreender os resultados anteriores apresenta-se, a seguir, algumas atividades que podem ser desenvolvidas com alunos de Ensino Médio.

No Ensino Médio, a função exponencial aparece definida como: "a função $f: R \to R$ dada por $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 0$ é denominada função exponencial de base ." (GIOVANNI e BONJORNO, 2000, p. 253).

Para o propósito do presente trabalho, as funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 2^{-x}$ estão representadas na Figura 1 em um mesmo sistema cartesiano.

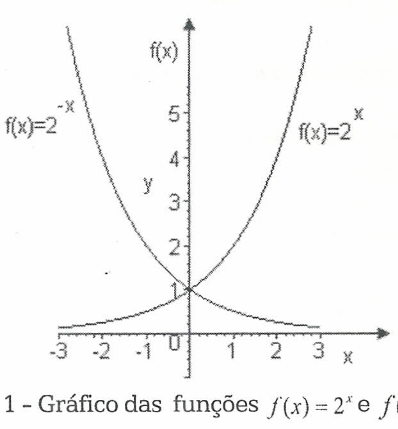


Figura 1 - Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 2^{-x}$

De acordo com a definição da função $f(x) = a^x$ tem-se que o domínio é o conjunto dos números reais e a imagem é R_+^*. Ainda, é conhecido que para a base $a > 1$ a função é crescente e para a base definida no intervalo (0,1) a função é decrescente.

Objetivando analisar os resultados apresentados pelas calculadoras científicas, sugere-se duas atividades envolvendo funções exponenciais. A primeira de base 2 e a segunda de base $\frac{1}{2}$, ou seja, as funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 2^{-x}$ representadas na Figura 1.

Atividade 1: Se $f(x) = 2^x$, determine *f(x)* quando *x* é igual a 400.

Com a calculadora deve-se realizar o seguinte procedimento: digite 2, em seguida pressione a tecla y^x, após digite 400 e tecle $=$.

Caso a calculadora não tenha a tecla y^x, então faça o procedimento: digite 2, em seguida tecle $\wedge$, após digite 400 e pressione a tecla $=$.

Atividade 2: Se $f(x) = 2^{-x}$, determine *f(x)* quando *x* é igual a 400.

O procedimento, para esse caso, é semelhante ao anterior. Digite 2, em seguida pressione a tecla y^x, digite 400, pressione a tecla $+/-$ até aparecer o sinal negativo e após tecle $=$.

Caso a calculadora não tenha a tecla y^x, então digite 2, em seguida tecle $\wedge$, digite o sinal negativo na tecla $(-)$, digite 400 e após pressione a tecla $=$.

Para a atividade 1, a calculadora retorna o símbolo (- E -) ou *Math ERROR* e para a atividade 2, a calculadora retorna zero.

Após esses resultados, algumas questões devem ser investigadas: como é possível a máquina retornar (- E -) ou *Math ERROR* se o domínio das funções $f(x) = 2^x$ ou $f(x) = 2^{-x}$ é todos os números reais? Como é possível a calculadora retornar zero se a imagem das referidas funções é R_+^*?

Esses resultados apresentados pela calculadora ocorrem por diversos motivos. Primeiro, o conjunto dos números reais é um conjunto infinito e a calculadora trabalha com um número finito de números e de dígitos, portanto, apenas uma parte dos números reais é representada nessa máquina. Logo, a representação de um número em uma máquina é limitada.

Essa limitação acarreta dois tipos de erros: o primeiro, é aquele causado no arredondamento, uma vez que a mantissa representa um número finito de dígitos; o segundo, é aquele que advém da limitação do expoente ao representar um número em Ponto Flutuante, ou seja, o expoente α esta inserido no intervalo $[I,S]$ em que I é o limite inferior e S é o limite superior, conforme pressupostos teóricos definidos anteriormente.

Desta forma, sempre que uma operação aritmética produz um número com expoente superior ao expoente máximo de determinada máquina tem-se o fenômeno de *overflow*. Similarmente, operações que resultem em expoente inferior ao expoente mínimo dessa máquina têm-se o fenômeno de *underflow*, esse número geralmente é ajustado para zero.

Por exemplo, no cálculo de alguns valores de x para a função $f(x) = 2^x$ são apresentados os seguintes resultados:

Valores de x	$f(x) = 2^x$
-400	0
-300	$4{,}909093465 \times 10^{-91}$
-100	$7{,}888609052 \times 10^{-31}$
0	1
100	$1{,}2676506 \times 10^{30}$
200	$1{,}606938044 \times 10^{60}$
300	$2{,}037035976 \times 10^{90}$
400	MathERROR ou $-E-$

Quadro 2 - Valores da função $f(x) = 2^x$

Cabe ressaltar que os valores podem variar dependendo da calculadora utilizada. Note que, para o valor de x igual a -400 ocorre um erro de *underflow*, ou seja, a máquina ajusta o número para zero. Já para o valor de x igual a 400 ocorre um erro de *overflow*, ou seja, a máquina não consegue calcular o valor da função exponencial devido a sua limitação.

Considerações Finais

Com os exemplos apresentados, espera-se que o estudante possa analisar criticamente os resultados propostos pela calculadora, além de saber diferenciar os mais variados tipos de erros, pois, em muitos casos, a calculadora induz o estudante a equivocar-se em conceitos matemáticos como, por exemplo, o que acontece com a família de funções exponenciais $f(x) = a^x$ para diferentes valores da base a e a função exponencial $f(x) = e^x$ de base e. Em ambos os casos, ao substituir x por valores muito elevados e efetuar o cálculo em uma calculadora, ocorrerá um erro de *overflow*. Se o estudante não tiver uma base teórica consolidada poderá equivocar-se com esse resultado apresentado pela máquina.

Portanto, espera-se que com esse trabalho o estudante possa identificar outros problemas que aparecem nas calculadoras científicas e principalmente olhar criticamente para a máquina não esquecendo que o conhecimento matemático teórico é fundamental para a interpretação dos resultados propostos pela mesma.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BURDEN, Richard; FAIRES, J.Douglas. **Análise numérica.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CLÁUDIO, Dalcídio Moraes; MARINS, Jussara Maria. **Cálculo numérico computacional: teoria e prática**. São Paulo: Atlas,1994.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. vol. 1. São Paulo: FTD, 2000.

ROQUE, Waldir L. **Introdução ao cálculo numérico: um texto integrado com DERIVE**. São Paulo: Atlas, 2000.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Makron Books, 1997.

Professora do Curso de Matemática na Universidade Luterana do Brasil - ULBRA - RS. Professora do Centro Universitário La Salle - UNILASALLE - RS. Mestre em Matemática Aplicada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Endereço: Rua Leopoldo Bier, 461/404, Porto Alegre - RS. Cep.: 90620-100. E-mail: sp_renz@yahoo.com.br

submetido em 01/07/2007
aprovado em 21/08/2007