

## DIAGNÓSTICO AUTOMÁTICO DE ERRORES ARITMÉTICOS Y AYUDAS ADAPTADAS PARA NIÑOS CON SÍNDROME DE DOWN

C. S. González  
D. Guerra  
M. Noda  
A. Bruno  
H. Sanabria  
L. Moreno

### Resumo

O acesso à educação é uma realizada que entrou com força na lista de fins nas novas tecnologias. As possibilidades ofertadas em relação à didática abarcam um amplo leque de opções que não discriminam em função das características educacionais dos usuários. A diversidade existente no universo de alunos obriga a contemplar técnicas específicas para aqueles usuários com necessidades educativas especiais. Em concreto, DiverMates pretende ser uma ferramenta didáctica destinada tanto aos professores como aos alunos com Síndrome de Down interessados no mundo da Matemática. Esse sistema forma parte de uma investigação multidisciplinar, em que colaboram profissionais relacionados com a área de Engenharia Informática, Didáctica da Matemática e Belas Artes da Universidade de La Laguna, assim como profissionais da Associação Tenerifeña de Trisômicos 21 (ATT21) de Tenerife. Esse trabalho foi financiado pelo projeto I+D+I número PI 200/05 do Ministério do Trabalho e Assuntos Sociais.

**Palavras-chave:** Diversidade, Multimedia, Erros.

### Resumen

El acceso a la educación es una realidad que ha entrado con fuerza en la lista de retos en las nuevas tecnologías. Las posibilidades ofertadas en relación a la didáctica abarcan un amplio abanico de opciones, que no discriminan en función de las características educacionales de los usuarios. La diversidad existente en el

rango de alumnos obliga a contemplar técnicas específicas para aquellos usuarios con necesidades educativas especiales. En concreto, DiverMates pretende ser una herramienta didáctica destinada tanto a los profesores como a los alumnos con Síndrome de Down interesados en el mundo de las matemáticas.

Este sistema forma parte de una investigación multidisciplinar en el que colabora personal relacionado con las áreas de Ingeniería Informática, Didáctica de las Matemáticas y Bellas Artes de La Universidad de La Laguna, así como profesionales de la Asociación Tenerifeña de Trisómicos 21 (ATT21) de Tenerife. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto I+D+I nº PI 200/05 del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales.

**Palabras-llave:** Diversidad, Multimedia, Errores.

### Abstract

The access to the education is a reality that has entered with force the list of challenges of the new technologies. The possibilities related with didactic include a large set of options, specially to adapt the new technologies to the educational characteristics of the users. The existing diversity among the students forces to consider specific techniques for those users with special educative necessities. In particular, DiverMates tries to be a didactic tool destined so much the professors as to the students with Down? Syndrome interested in the world of the Mathematics. This system involves of an investigation to multidiscipline in which it collaborates personal related to the areas

of Computer Science, Didactic Engineering of the Mathematics and Arts of the University of the Laguna, as well as professional of the ATT21 Down syndrome Association of Tenerife. This work has been financed by I+D+I project nº PI 200/05 of the Ministry of Work and Social Services.

**Keywords:** diversity, multimedia, errors

### 1. Descripción del problema

La comprensión, entendimiento y aplicación de las operaciones aritméticas se engloban en un área que ofrece dificultades para la mayoría de los alumnos que la enfrentan, independientemente de las características educacionales de los mismos. No obstante, la resolución de una operación aritmética no es algo que deba abandonarse ante las dificultades; no tanto por la obtención del resultado en sí, sino porque este tipo de operaciones constituyen un medio que deberá aplicarse en multitud de situaciones cotidianas.

En concreto, el alumnado con Síndrome de

Down, presenta especiales dificultades al enfrentarse a conceptos abstractos. La comprensión y mecanización de los algoritmos requieren de una serie de factores (nivel intelectual, grafomotricidad, atención, memoria...) entre los que juega un papel importante el conocimiento del concepto de número y del sistema de numeración decimal.

Un estudio realizado por Buckley y Sacks, en 1987, sobre una población adolescente compuesta por 90 personas con Síndrome de Down, comprobó que tan sólo un 18% era capaz de recitar más de 20 números y un 50% podía hacer alguna suma sencilla, pero tan sólo unos pocos podían hacer multiplicaciones o divisiones.

El trabajo realizado se ha centrado en torno a las operaciones aritméticas más simples: la suma y la resta. En torno a estos dos focos de atención, y tomando como punto de partida algunos trabajos de investigación previos aplicados sobre alumnos sin discapacidad (Baroody, 1988; Dikson y otros, 1991; Fernández y otros, 1991; Jiménez y Girando, 1993; Luseño, 1993; Maza, 1989), se ha planteado una clasificación inicial de los posibles errores a cometer:

CATEGORÍAS Y TIPOS DE ERROR	
1. Problemas grafomótricos y perceptivos	1.1 COMÚN: Confúden los números 3-5, 4-7, 6-9, 12-21... 1.2 COMÚN: Suman y restan alternativamente 1.3 COMÚN: Comienzan a operar por la izquierda
2. Errores de encolumnamiento y carencia de los órdenes de unidades	2.1 COMÚN: Colocación incorrecta de las unidades y decenas (dificultades de alineación, cambiar orden de unidades) 2.2 COMÚN: Suman/restan unidades de un orden con unidades de otro orden
3. Errores en la llevada	3.1 COMÚN: Se olvidan de llevar 3.2 SUMA: Escriben los resultados parciales intermedios incompletos 3.3 SUMA: Operan como si se tratase de dígitos independientes 3.4 SUMA: No escriben las unidades de la última columna 3.5 SUMA: Error al reagrupar 3.6 RESTA: Llevan siempre 3.7 RESTA: Restan siempre la cifra menor de la mayor.
4. Confundir el papel del cero en algoritmos con números que tienen un cero entre sus dígitos	4.1 COMÚN: Asocian el cero al resultado parcial 4.2 COMÚN: $N + 0 = 0$ $N - 0 = 0$ 4.3 COMÚN: Identifican el 0 con el 10 4.2 RESTA: Restan cero de la cifra correspondiente del sustraendo 4.3 RESTA: Cuando el cero está en el minuendo ponen en el resultado el valor de la unidad del sustraendo
5. Desconocimiento total del algoritmo	5.1 SUMA: Ignoran el valor posicional de las cifras y suman todos los números
6. Desconocimiento del significado de la operación	6.1 COMÚN: Restan cuando hay que sumar y viceversa
7. Hechos numéricos inventados	7.1 COMÚN: Fallan en determinados hechos numéricos
8. Otros	8.1 COMÚN: Abandonan

Tabla I. Errores posibles en los algoritmos de suma y resta

A partir de esta categorización, se ha diseñado un sistema de detección automática de los errores cometidos sobre los algoritmos estudiados. El objetivo planteado es la identificación de las causas potenciales por las que se cometieron los errores detectados, así como brindar una ayuda adaptada a las necesidades apropiadas. El tratamiento de la ayuda podrá realizarse mediante la plataforma implementada o de forma ajena al sistema.

El objetivo final de este trabajo es encontrar patrones de error propios de alumnos con Síndrome de Down y analizar si alumnos con determinadas características individuales tienen un determinado grupo de errores comunes. Para conseguir este objetivo hemos diseñado un sistema que es capaz de detectar errores aritméticos en los algoritmos de suma y de resta, los categoriza, infiere las posibles causas y ofrece pistas o ayudas adaptadas al error. Este sistema será descrito en las siguientes secciones de este artículo.

**2. Sistema automático de diagnóstico de errores en DIVERMATES**

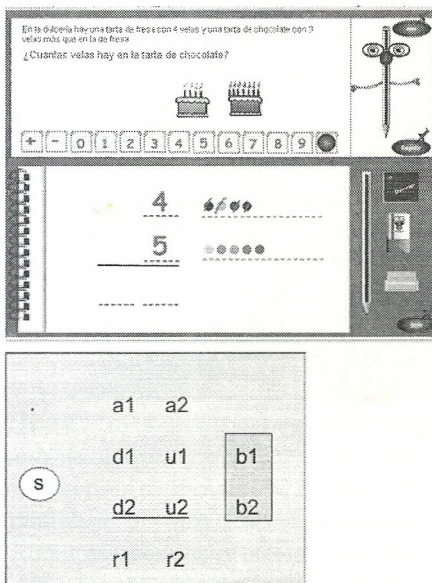
El poder monitorizar tanto las acciones como los resultados finales, obtenidos por los alumnos en la resolución de problemas y algoritmos, puede resultar de gran interés, no sólo por mantener un histórico sobre la evolución del alumno, sino por facilitar un análisis de errores

que conlleve a una enseñanza personalizada en función de las dificultades individuales. En este sentido, nuestro principal objetivo es crear un sistema capaz de diagnosticar los fallos y posibles causas para poder recomendar acciones a seguir para solventar estas carencias.

Por ello, hemos diseñado un sistema de diagnóstico capaz de detectar y clasificar errores automáticamente e identificar patrones de error entre los alumnos con síndrome de Down. Dicho sistema se encuentra dividido en 4 etapas principales: a) etapa de recolección de los resultados de interacción de batería de problemas y algoritmos realizados en una pizarra digital; b) etapa de preprocesamiento de categorías de error; c) etapa de generación de informes de incidencia de error por alumno y d) etapa de identificación y clasificación de patrones.

**a) Etapa de recolección de los resultados de interacción de batería de problemas y algoritmos realizados en la pizarra digital**

Para poder detectar los errores y sus causas, se ha diseñado una interfaz que representa el cuaderno donde el alumno está acostumbrado a resolver los ejercicios. A través de esta pizarra digital se registran la secuencia completa de pasos que lleva a cabo el alumno en el proceso de resolución del problema planteado: posiciones y valores de los operandos, signo, ayudas auxiliares, correcciones por parte del alumno y resultados.



Donde:

Acarreo :

$$a_i = \{(a_0, \dots, t_0), (a_1, \dots, t_1) \dots (a_n, \dots, t_n)\}$$

Unidad :

$$u_i = \{(u_0, \dots, t_0), (u_1, \dots, t_1) \dots (u_n, \dots, t_n)\}$$

Decena :

$$d_i = \{(d_0, \dots, t_0), (d_1, \dots, t_1) \dots (d_n, \dots, t_n)\}$$

Resultado:

$$r_i = \{(r_0, \dots, t_0), (r_1, \dots, t_1) \dots (r_n, \dots, t_n)\}$$

Signo:

$$s = 1 = \text{suma}; 0 = \text{resta}$$

Bolitas:

$$b_i = \text{cantidad usada}$$

Figura 1. Pizarra digital y estructura de la interacción

El resultado será el par formado por el último elemento de  $r1$  y  $r2$ :  $((r1n, \dots, tn), (r2n, \dots, tn))$ . Existen además, posiciones adicionales, que admiten la ubicación de números, para que ciertos tipos de errores puedan ocurrir. Esta estructura se particulariza a 3 tipos de formatos distintos de pizarra, dependiendo la estructura del algoritmo a resolver.

La estructura permite registrar la interacción que ocurre a medida que el usuario se encuentre resolviendo un determinado problema. Así, se puede registrar de forma independiente y sin orden de precedencia la posición de un objeto y el valor correspondiente colocado en la pantalla del ordenador, pudiendo de esa manera seguir y registrar de forma secuencial todos los pasos, las posiciones y los valores utilizados para la resolución de un algoritmo.

#### **b) Etapa de preprocesamiento de categorías de error**

Tenemos como dato de partida un conjunto de errores (identificados en la sección 1) que el alumno puede cometer, subagrupados según sus similitudes. Asimismo, se reserva un último grupo/tipo de error, creado para reflejar todos aquellos ejercicios cuyo resultado no sea correcto y, además, no corresponda a ninguno de los errores anteriores.

Partimos de la resolución hecha por el alumno y los datos que corresponden a la resolución correcta del problema. Si se detecta que algunos de los campos no coinciden entre los resultados obtenidos y los esperados, bien porque contienen un valor distinto o porque solo en uno de los casos toma valor, se halla la ocurrencia de un error que habrá que pasar a analizarse.

A priori no existe ningún indicativo en el resultado que nos aproxime al tipo de error que puede estar cometándose, por ello resulta necesario comparar el resultado obtenido con el esperado en caso de que se produjese cada uno de los tipos de error posibles. De esta manera, cada resultado incorrecto puede haber sido consecuencia de un solo error identificable o de varios de ellos, entre los cuales no podemos hacer discriminaciones; por esta razón, se incrementará la incidencia de todos los errores que concuerdan.

Se ha diseñado un esquema básico según el cual las características propias del ejercicio excluyen ciertos errores que no podrán darse; por ejemplo, no podrá darse la situación de comenzar a operar por la izquierda en un ejercicio donde sólo existan unidades.

A la hora de formular un método para determinar las dificultades que presenta un alumno

en los diferentes errores, se ha optado por asignar a cada tipo un porcentaje de incidencia del error. Con este dato obtenemos un valor relativo al número de veces en que el alumno comete cada uno de los errores. El cálculo de estos porcentajes depende directamente del número de ejercicios que se estén evaluando en un instante dado, pues la incidencia de error se incrementa de forma constante ( $k$ ) con cada ocurrencia. Dicha constante debe adaptarse al caso de estudio, pues no es real que tome el mismo valor para baterías con un número diferente de problemas. Por ello, para una batería de problemas resueltos de  $n$  ejercicios, y partiendo de la idea de que la ocurrencia de un mismo error en los  $n$  ejercicios significa una incidencia del 100%, el cálculo de la constante  $k$  responde a una sencilla regla de tres, resultando que  $k = 100/n$ .

Este proceso se aplica por separado para los ejercicios de suma y resta, obteniendo un porcentaje de incidencia para cada tipo de error individual. No obstante, tal y como se comentó anteriormente, ciertos errores forman parte de un mismo grupo de error, por lo que, llegados a este punto, resulta interesante conocer una incidencia global asociada a los grupos de errores (clusters).

Estos nuevos porcentajes se obtienen aplicando una sencilla fórmula lineal, de la que obtendremos la media entre las incidencias de cada uno de los tipos de error que constituyen el cluster en análisis. Ahora mismo, las tablas de resultados obtenidas son cuatro: incidencias de tipo de error en el algoritmo de suma, incidencias de tipo de error en el algoritmo de resta, incidencia de grupos de error en el algoritmo de suma e incidencias de grupo de error en el algoritmo de resta.

#### **c) Etapa de generación de informes de incidencia de error por alumno**

Con la información obtenida del proceso de detección y análisis de errores, podemos generar un informe personalizado para cada alumno que sirva de orientación al profesorado, evitando el trabajo de analizar cada una de las resoluciones del alumno.

El sistema ofrece el acceso, restringido para proteger el derecho a la privacidad de los alumnos, a un módulo donde se muestran informes con la problemática detectada y destacada sobre cada participante. Por motivos de seguridad sólo los profesores que actualmente tengan a su cargo a un alumno concreto podrán ver la información que tiene el sistema sobre el mismo.

La información se almacena en un fichero temporal con formato xml por alumno, en el que se define una clase para cada uno de los algoritmos que soporta el sistema. De este modo, la inclusión de nuevos algoritmos en el proceso de análisis no afectará al funcionamiento de este módulo.

Dentro de cada una de las clases la información se estructura jerárquicamente según categorías y tipos de error. La información de interés referente a las categorías se encuentra en dos campos: nombre identificativo y porcentaje de incidencia del mismo. Los tipos de error contienen la misma información que las categorías más una variable cualitativa auxiliar que indica el grado de incidencia tomando valor entre cuatro posibles: "BAJA", "MEDIA", "ALTA" y "MUY ALTA". Cada uno de estos valores corresponde a uno de los rangos establecidos de forma proporcional a partir de un umbral mínimo. El valor de este umbral depende del número de ejercicios analizados y su utilidad reside en discriminar aquellos errores que son frutos de despistes ocasionales por parte del alumno y que no requieren un tratamiento especial; es decir, todos aquellos errores cuya incidencia se encuentre por debajo de ese límite establecido serán considerados como errores que no requieren un refuerzo y, por tanto, pueden obviarse.

Para hacer más comprensible la interpretación de la información obtenida, a cada categoría de error identificada en el informe le acompaña una gráfica estadística donde se reflejan los porcentajes de incidencia ponderados.



Figura 2. Informes y gráficas con los errores detectados de un alumno

**d) Etapa de identificación y clasificación de patrones.**

El último paso para completar el proceso de análisis de error corresponde a una identificación de patrones, entre los cuales se puedan clasificar a

los diferentes alumnos. Para ello, y partiendo de resultados reales obtenidos por una muestra variada de alumnos, se lleva a cabo un análisis cluster. El objetivo de esta etapa es determinar un conjunto inicial de patrones unívocamente identificables, que constituirán la entrada para el algoritmo de clasificación. Para su detección se emplean técnicas de análisis cluster, estructurado en dos fases:

- *análisis jerárquico*: se estudian diversas técnicas de clustering jerárquico para poder hacer una comparativa entre los resultados obtenidos y poder extraer el número de patrones distinguibles, así como una primera aproximación sobre las características de los mismo.
- *análisis k-means* (Duda y otros 73; Juan y otros, 1994): tomando como k el valor obtenido en el análisis jerárquico, en esta fase determinamos claramente las propiedades que caracterizan cada patrón detectado. Cada patrón vendrá definido por un conjunto de tipos de error y el rango de porcentajes sobre los que toma valor.

Para esta etapa de reconocimiento de patrones se ha optado por aplicar la versión lineal el algoritmo AESA (Vidal, 1994), que requiere una etapa de preprocesamiento y una etapa de clasificación. Ésta última, a su vez, se encuentra subdividida en dos etapas etiquetadas como aproximación y eliminación (que puede identificarse con un proceso de ramificación y poda sobre los posibles patrones).

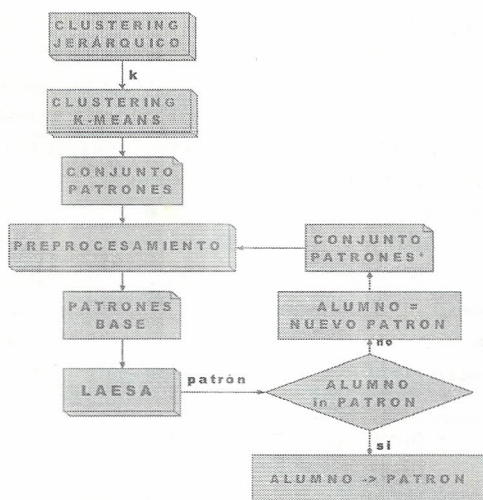


Figura 3. Etapas de identificación y clasificación de patrones

En la fase de preprocesamiento resulta necesario determinar un conjunto de patrones base. La elección de los patrones considerados como base no tiene repercusión sobre el resultado, pero sí sobre la eficiencia del algoritmo. Dada la existencia de una restricción que determina que el tamaño del conjunto de patrones base debe ser menor que el conjunto total de patrones, se ha optado por limitar el tamaño del primero a la mitad del segundo. Los patrones que se incluirán en el conjunto de patrones base pueden obtenerse por diferentes metodologías, entre las cuales se ha elegido una adaptación del algoritmo de búsqueda de vecinos próximos (Shapiro, 1997; Ramasubramanian y otros, 1990). Se ha implementado un algoritmo de selección por separación máxima conocido como MDM (máximo de distancias mínimas) donde la idea es seleccionar, en cada iteración, aquel patrón que se encuentra a mayor distancia de entre las distancias mínimas al resto de prototipos previamente calculados. Cierto es que este método utiliza una estrategia voraz para la selección del conjunto de prototipos base y, por tanto, subóptima; sin embargo, requiere un procesamiento temporal lineal respecto al tamaño del conjunto de prototipos, además de presentar excelentes resultados en pruebas empíricas.

En la aplicación del algoritmo LAESA (Mico y otros, 1994) se trata cada muestra (alumno a clasificar) como un conjunto de porcentajes de incidencia de error y cada uno de los patrones como un vector dinámico de incidencias. Es importante tener presente que cada patrón definirá un comportamiento sobre un subgrupo de tipos de error, cuyo tamaño y/o variables puede cambiar entre patrones.

Dado que el algoritmo determina el patrón solución como el patrón más cercano a la muestra, es obvio que la implementación del cálculo de distancias juega un papel decisivo. Es precisamente en este apartado donde hemos de afrontar una decisión determinante pues nos enfrentamos a la necesidad de calcular la distancia entre patrones cuyo tamaño puede ser desigual. En este aspecto nos podemos enfrentar a tres situaciones al estudiar un tipo de error concreto:

- ambos patrones tiene valor definido, con lo cual la distancia puede calcularse mediante distancias euclídeas.
- ninguno de los patrones define el comportamiento para ese error, por lo

que podemos determinar que la distancia entre ambos no es determinante

- sólo uno de los patrones toma valor, mientras que el otro no presenta ningún comportamiento sobre el tipo de error. Este caso presenta mayores dificultades pero se ha comprobado que la mejor solución pasa por asignar al segundo patrón un valor medio, es decir, una incidencia de un 50%. Optar por alguna de las múltiples alternativas restantes afecta al resultado, al favorecer a unos patrones frente a otros.

Una vez obtenido un resultado disponemos de dos valores: un patrón y la distancia entre la muestra y el mismo. Dado que las características de comportamiento de cada alumno son muy diversas, y pueden diferir de la muestra inicial tomada para generar el conjunto de patrones, no es trivial asignar cada alumno al resultado generado. Se precisa una última decisión según la cual: si la distancia entre la muestra y el patrón es cercana la relación es directa y si, por el contrario, la distancia entre ambos es muy elevada, el alumno constituirá un nuevo patrón que debe añadirse entre la lista de patrones posibles. La inserción de un nuevo patrón es el único factor que implica rehacer la fase de preprocesamiento para actualizar el conjunto de patrones base.

### 3. Validación

Para realizar un análisis experimental sobre el funcionamiento del módulo de detección de errores en algoritmo se ha pasado un batería de 15 problemas a un grupo 9 alumnos con síndrome de Down de la ATT21 divididos en 3 niveles educacionales. Los ejercicios se escogieron de forma que fueran proporcionales al nivel educacional del alumno. De entre los ejercicios propuestos, 7 de los algoritmos fueron de suma y los 8 restantes fueron algoritmos de resta.

Almacenada toda la información referente a la interacción del alumno con el programa, se procedió a analizar los datos obtenidos, estructurando el análisis en las fases ya mencionadas. Vamos a presentar, a modo de ejemplo, el análisis de errores realizada sobre un alumno de esta prueba, al que denominaremos alumno X.

En primer lugar se estudió la incidencia de cada tipo de error en ambos algoritmos obteniendo las siguientes tablas:

TIPO ERROR SUMA	INCIDENCIA	INDICENCIA	TIPO ERROR RESTA
Confunde los números	0	0	Confunde los números
Suma por la izquierda	70	0	Resta por la izquierda
Suma y resta alternativamente	14	0	Suma y resta alternativamente
Alineación incorrecta	0	0	Alineación incorrecta
Suma unidades de distintos orden	0	0	Resta unidades de distintos orden
Resultados intermedios incompletos	56	0	No llevada
No acarreo	70	0	Lleva siempre
No decenas en la última columna	84	0	Resta siempre la cifra menor
Error al reagrupar	14	0	$N-0 = 0$
$N+0 = 0$	0	0	Pone 0 en lugar de resta
Identifica el 0 con el 10	0	0	Resta 0 al sustraendo
Omite números	0	0	Identifica el 0 con el 10
Suma un número dos veces	0	0	Abandona
Ignora el valor posicional	0	0	Suma en lugar de restar
Resta en lugar de sumar	0	36	Otros tipos de error
Otros tipos de error	0		

Tabla II. Incidencias por tipo de error

En función de estos resultados, podemos calcular los mismos índices de incidencia para los grupos/clusters definidos para cada algoritmo, de forma que los errores cometidos

por el alumno queden agrupados por categorías. La incidencia del alumno que realizó la prueba para los diferentes grupos de error son:

GRUPO ERROR SUMA	INCIDENCIA	INDICENCIA	GRUPO ERROR RESTA
Percepción y grafomotriz	28	0	Percepción y grafomotriz
Encolumnamiento	0	0	Encolumnamiento
Reagrupación	56	0	Reagrupación
Confusión con el 0	0	0	Confusión con el 0
Omisión/Repetición	0	0	Desconocimiento algoritmo
Desconocimiento algoritmo	0	0	Desconocimiento operación
Desconocimiento operación	0	36	Otros
Otros	0		

Tabla III. Incidencias por grupo de error

Analizando de manera conjunta la información disponible en ambas tablas podemos extraer conclusiones sobre las dificultades que presenta el alumno en estos algoritmos.

Es importante tener en cuenta que siempre se reserva un margen de error fruto de un despiste ocasional. Para este número de problemas el umbral mínimo que marcará esta diferencia se sitúa sobre 10, por lo que, en vista de la información obtenida, ningún error será obviado.

La información final que se le presentará al profesor acerca de la resolución del alumno es un conjunto de proposiciones como la que se muestra a continuación:

**INFORME DEL ALUMNO**

En el análisis de los errores en el algoritmo de la SUMA el alumno presenta las siguientes dificultades:

presenta problemas de percepción y grafomotrices — frecuencia BAJA(28%)

**1) ERROR: suma por la izquierda**

CAUSA: procedimiento mal aprendido/posible dificultad perceptiva

FRECUENCIA: ALTA(70%)

**2) ERROR: suma y resta alternativamente**

CAUSA: problemas de despiste/posible dificultad perceptiva

FRECUENCIA: BAJA(14%)

presenta problemas de reagrupación (acarreo) — frecuencia ALTA(56%)

**1) ERROR: escribe resultados parciales intermedios incompletos**

CAUSA: falta de comprensión dd sistema de numeración y rango  
 FRECUENCIA: ALTA(56%)

2) **ERROR: no tiene en cuenta el acarreo**

CAUSA: falta de comprensión dd sistema de numeración y rango  
 FRECUENCIA: ALTA(70%)

3) **ERROR: no escribe las decenas en la última columna**

CAUSA: falta de comprensión dd sistema de numeración y rango  
 FRECUENCIA: MUY ALTA(84%)

4) **ERROR: comete errores al reagrupar**

CAUSA: falta de comprensión dd sistema de numeración y rango  
 FRECUENCIA: BAJA(14%)

En el análisis de los errores en el algoritmo de la RESTA el alumno presenta las siguientes dificultades:

presenta problemas de invención de hechos — frecuencia  
 MEDIA(36%)

1) **ERROR: falla en determinados hechos numéricos**

CAUSA: mal aprendizaje/falta de práctica  
 FRECUENCIA: MEDIA(36%)

A partir de este informe que el profesor podrá obtener cada vez que considere oportuno, se podrá aplicar una técnica específica que aporte una ayuda concreta a los problemas del alumno.

A pesar de que con la obtención del informe, el análisis de errores en algoritmo se consideraría finalizado; vamos a realizar un estudio comparativo para reseñar un caso particular observado.

Dado que la detección de errores en problemas aún forma parte de los módulos a realizar en una próxima fase, durante el análisis

de la información nos encontramos con frecuencia ante el caso de que alumno decidió sumar cuando estaba frente a una operación de resta, y viceversa. Tratando este tipo de errores tal y como se presentó anteriormente, observamos que la resolución de un algoritmo que no corresponde con el adecuado al enunciado conduce a la incidencia de diversos tipos de error, aún habiéndose realizado la operación correctamente. Es decir, si el alumno debió sumar y en lugar de ello restó, se considerará que se han producido diversos errores de tipo suma (en función de la resolución concreta) aun habiéndose realizado la resta correctamente.

Este resultado conduce a un análisis incorrecto de los problemas que presenta el alumno. Dado que estos errores se especificarán y detectarán en el módulo de errores en problemas, el módulo de errores en algoritmo sólo deberá detectar errores concretos en la resolución que el alumno desea hacer, sea cual sea la operación que se esté realizando.

Teniendo en cuenta este matiz, el algoritmo se modifica ligeramente para que se adapte a la interpretación que el alumno está haciendo del enunciado. De esta manera, los resultados obtenidos distan muchos de los anteriores, tal y como se observa en las siguientes tablas:

TIPO ERROR SUMA	INCIDENCIA	INDICENCIA	TIPO ERROR RESTA
Confunde los números	0	0	Confunde los números
Suma por la izquierda	28	0	Resta por la izquierda
Suma y resta alternativamente	0	0	Suma y resta alternativamente
Alineación incorrecta	0	0	Alineación incorrecta
Suma unidades de distintos orden	0	0	Resta unidades de distintos orden
Resultados intermedios incompletos	14	0	No llevada
No acarreo	28	0	Lleva siempre
No decenas en la última columna	28	0	Resta siempre la cifra menor
Error al reagrupar	0	0	$N-0 = 0$
$N+0 = 0$	0	0	Pone 0 en lugar de resta
Identifica el 0 con el 10	0	0	Resta 0 al sustraendo
Omite números	0	0	Identifica el 0 con el 10
Suma un número dos veces	0	0	Abandona
Ignora el valor posicional	0	0	Suma en lugar de restar
Resta en lugar de sumar	0	12	Otros tipos de error
Otros tipos de error	0		

Tabla IV. Incidencias por tipo de error tras modificaciones



GRUPO ERROR SUMA	INCIDENCIA	INDICENCIA	GRUPO ERROR RESTA
Percepción y grafomotriz	9	0	Percepción y grafomotriz
Encolumnamiento	0	0	Encolumnamiento
Reagrupación	17	0	Reagrupación
Confusión con el 0	0	0	Confusión con el 0
Omisión/Repetición	0	0	Desconocimiento algoritmo
Desconocimiento algoritmo	0	0	Desconocimiento operación
Desconocimiento operación	0	12	Otros
Otros	0		

Tabla V. Incidencias por tipo de error

Tal y como se observa, la incidencia tanto los tipos de error como en los grupos de ambos algoritmos se reduce considerablemente. Según estas tablas, los problemas que presenta el alumno son básicamente los mismos pero con una transcendencia menor. Con estos nuevos resultados podemos llegar a concluir, inclusive, que los errores de tipo "perceptivos y/o grafomotrices" no son una problemática presente en el alumno sino unos errores ocasionales que no forman parte de su perfil.

El informe que determina las características del alumno en función sólo de los errores en algoritmos es:

**INFORME DEL ALUMNO X**

En el análisis de los errores en el algoritmo de la SUMA el alumno presenta las siguientes dificultades:

presenta problemas de reagrupación (acarreo) — frecuencia BAJA (17%)

**1) ERROR: escribe resultados parciales intermedios incompletos**  
CAUSA: falta de comprensión del sistema de numeración y rango  
FRECUENCIA: BAJA (14%)

**2) ERROR: no tiene en cuenta el acarreo**  
CAUSA: falta de comprensión del sistema de numeración y rango  
FRECUENCIA: BAJA (28%)

**3) ERROR: no escribe las decenas en la última columna**  
CAUSA: falta de comprensión del sistema de numeración y rango  
FRECUENCIA: BAJA (28%)

En el análisis de los errores en el algoritmo de la RESTA el alumno presenta las siguientes dificultades:

presenta problemas de invención de hechos — frecuencia BAJA (12%)

**1) ERROR: falla en determinados hechos numéricos**  
CAUSA: mal aprendizaje/falta de práctica  
FRECUENCIA: BAJA (12%)

Se ha podido comprobar que este segundo análisis corresponde a una interpretación más fiel de las características reales conocidas del alumno X.

**4. Sistema de ayudas adaptadas al alumno**

Una vez programado y comprobado el correcto funcionamiento del módulo de detección de errores explicado en las secciones 2 y 3, se planteó la posibilidad de utilizar esta información como datos fuente para el proceso de enseñanza de los alumnos. Como se comentó anteriormente, la salida de la detección se ofrece al profesorado para personalizar el aprendizaje; no obstante, se abría la perspectiva de un nuevo reto: realimentar el sistema con dicha información para poder crear un módulo que permitiera a los alumnos la práctica de los algoritmos y el autoaprendizaje de los mismos.

En la actualidad no se ha entrado a desarrollar el módulo que permita ofrecer un conjunto de ayudas adaptadas en función de los patrones identificados. El módulo con el que sí ya se cuenta dentro del sistema es aquel que permite la práctica del usuario, reforzando aquellos ejercicios tipo en los que se detecte una mayor incidencia de error por parte del alumno. Para facilitar la tarea de autoaprendizaje del alumno, al detectarse un error se le ofrecerá una serie de pistas orientativas para que sea el propio alumno quien pueda identificar el error cometido.

El proceso llevado a cabo en este apartado se refleja en el siguiente diagrama de flujo:

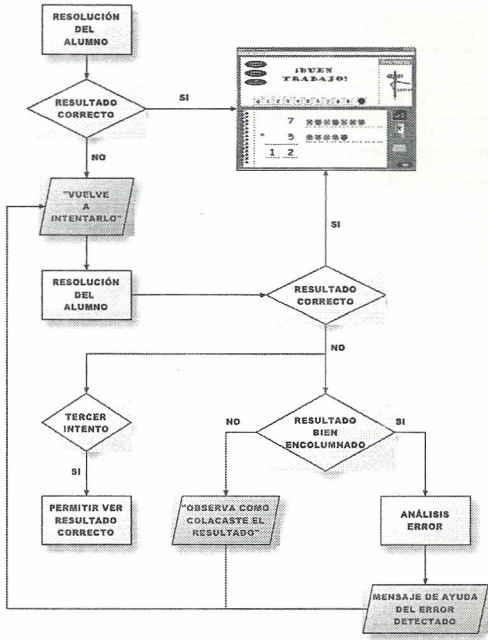


Figura 4. Diagrama de flujo para la oferta de pistas orientativas

Sobre el diagrama anterior cabe destacar algunos aspectos:

- la primera ayuda ofertada es independiente del posible error cometido, el sistema se

limita a informar de que el resultado no es correcto y da la posibilidad al alumno de auto-corrección.

- en caso de que el alumno insista en un resultado incorrecto, lo primero que debe comprobarse es la correcta ubicación del resultado en los espacios disponibles en la interfaz. La corrección de este fallo es un primer paso indispensable independientemente del análisis de la información.
- si persiste la detección de un error en el resultado propuesto se pasa a realizar un análisis de los posibles errores cometidos para ofertar la ayuda que más se aproxime a las necesidades del alumno.
- tras un tercer intento fallido por parte del alumno de resolución del ejercicio, se ofrecerá la posibilidad de comprobar el resultado correcto a fin de no insistir en un ejercicio que el alumno pueda no saber resolver, lo que llevaría a un rechazo por parte del usuario.

Se ha llevado a cabo la realización de una lista de mensajes de ayuda posibles para cada uno de los errores que el sistema es capaz de detectar:

- Error 1:** Confunden los números 3-5, 6-9...  
**Ayuda:** Revisa los números que has colocado
- Error 2:** Comienzan a operar por la izquierda  
**Ayuda:** Es mejor que comiences a efectuar la operación por la columna de las unidades y sigas por la columna de las decenas.
- Error 3:** Suman y restan alternativamente  
**Ayuda:** Fíjate en la operación que has realizado. ¿Es una suma o una resta?
- Error 4:** Colocación incorrecta  
**Ayuda:** Observa cómo colocaste las unidades y las decenas. Escribe las unidades en la columna de las unidades y las decenas en la columna de las decenas.
- Error 5:** Operan con unidades de distinto orden  
**Ayuda:** Observa si estás sumando/restando las decenas con las unidades.
- Error 6:** Resultados parciales intermedios incompletos  
**Ayuda:** Es una suma con llevadas. Revisa la columna de las decenas.
- Error 7:** Se olvidan de llevar  
**Ayuda:** ¿Te has olvidado de llevar?
- Error 8:** No escriben las decenas en la última columna  
**Ayuda:** Corrige el resultado. Faltan las decenas.
- Error 9:** Error al reagrupar  
**Ayuda:** Es una suma con llevadas. Revisa las unidades y la cifra de la llevada.
- Error 10:** Llevan siempre  
**Ayuda:** Revisa la operación. No es una suma/resta con llevadas.
- Error 11:** Restan siempre la cifra menor  
**Ayuda:** Revisa la operación. Recuerda que al minuendo se le resta el sustraendo.
- Error 12:**  $N + 0 = 0$  /  $N - 0 = 0$   
**Ayuda:** Fíjate en las columnas de las unidades. En este caso, la suma/resta de las unidades no pueden dar cero.
- Error 13:** Ponen cero en lugar de restar  
**Ayuda:** Es una resta con llevadas. En este caso, el resultado de las unidades no puede ser cero.
- Error 14:** Restan cero de la cifra correspondiente del sustraendo  
**Ayuda:** Fíjate bien. No has efectuado la resta de las unidades.

**Error 15:** Identifica el 0 con el 10

**Ayuda:** Revisa la operación. No es una suma/resta con llevadas.

**Error 16:** Ignoran en el valor posicional de las cifras y suman todos los números

**Ayuda:** No te olvides que debes sumar las unidades y luego sumar las decenas.

**Error 17:** Restan cuando hay que sumar y viceversa

**Ayuda:** Vuelve a intentarlo. ¿Es una suma o una resta?

**Error 18:** Fallan en determinados hechos numéricos

**Ayuda:** Vuelve a intentarlo. Revisa el resultado de la operación.

**Error 19:** Abandonan

**Ayuda:** ¿Has terminado la operación? Observa la columna de las decenas.

Tabla VI. Mensajes de ayuda adaptados al tipo de error

No obstante, la ocurrencia de varios de tipos de error puede darse de forma simultánea. Ante esta situación se requiere la imposición de un orden de prioridades entre los diferentes tipos de error que puedan solaparse. A continuación se muestra algún ejemplo de estas decisiones:

- colisión entre error 2 y error 7 → prioridad el error 2
- colisión entre error 7 y error 11 → prioridad al error 7
- colisión entre error 3 y error 17 → prioridad al error 17
- colisión entre error 8 y error 17 → prioridad al error 17
- etc.

Una vez solventados todos los incidentes, la plataforma está preparada para ofertar en cada caso el mensaje que pueda resultar de más ayuda al alumno. No obstante, resultaría muy enriquecedor que el propio sistema optase por proponer determinados algoritmos en función de los errores que se detectan con mayor frecuencia. Por ejemplo, si el sistema comprueba que el alumno presenta dificultades especialmente en el proceso de resolución de una resta, podrían plantearse algoritmos de resta con una frecuencia de aparición proporcionalmente mayor al de suma, en función de la incidencia del error detectado. Así mismo, si se detecta que la aparición del número 0 en los operandos implicados resulta una dificultad, el sistema fomentará la aparición de estos ejercicios a fin de incentivar la práctica de los mismos. Esto se adaptará a cada situación detectada.

Para proporcionar esta funcionalidad, la solución propuesta pasa por mantener actualizada la información acerca de los errores cometidos por el alumno durante el último acceso al módulo. Hasta este momento la generación de los algoritmos se producía de forma totalmente aleatoria, a partir aquí la incidencia de cada error influirá proporcionalmente en la generación de los futuros operandos. El sistema debe mantenerse actualizado en todo momento para

ser fiel al autoaprendizaje del alumno, para ello se dispone de unas variables que aumentan y decrecientan tras cada análisis en función de los resultados analizados; esto promoverá que el aprendizaje y consecuente desaparición de un determinado tipo de error conduzca a incentivar otro tipo de errores que no estén igualmente resueltos.

## 5. Conclusiones

En este artículo se ha presentado un sistema que es capaz de diagnosticar y analizar los patrones de error en las operaciones aritméticas de suma y resta. En consecuencia, el profesorado tendrá una herramienta en sus manos que le ayude a tener un mayor conocimiento sobre los problemas que presentan sus alumnos en matemáticas.

Por otra parte, se ofrece un sistema destinado al alumnado que le permite autocorregirse a partir de sus errores y pistas que se le ofrecen. De esta manera, se genera un autoaprendizaje a partir de la reflexión sobre sus propios errores.

Hemos realizado una primera experiencia con un grupo de alumnos síndrome de Down de la ATT21 seleccionados por niveles educacionales, con el fin de validar las interfaces de interacción y los algoritmos y de los resultados hallados hemos ya incorporado modificaciones al sistema, tanto en el registro de la interacción como en las categorías de error.

Actualmente, estamos trabajando en dos líneas de investigación en cuanto al análisis de errores y detección de patrones:

- la inclusión de un módulo que analice los errores asociados a problemas de comprensión en los enunciados. Para ello se aplican diversas técnicas de minería de datos, entre los que destacan técnicas de minería de texto, etc.

- considerar en la detección de patrones, no sólo las incidencias en los diversos tipos de error, sino también la influencia del perfil del alumno, el método de resolución de los algoritmos, etc.

Asimismo, se está desarrollando un sistema multimedia de enseñanza aprendizaje de conceptos matemáticos, habilidades sociales y autonomía personal, el cual estará conectado al módulo de diagnóstico de errores, lo cual permitirá utilizar esta herramienta de detección automática de errores no solo en la fase de evaluación, sino todo el proceso de enseñanza aprendizaje.

### Bibliografía

Baroody, A. J. *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor, 1988.

Buckley, S.; Sacks, B. The adolescent with Down's Síndrome. Portsmouth: Portsmouth Polytechnic, 1987. In: Monari, E. *Learning mathematics at school...and later on*. The Down Syndrome Educational Trust. 2002. <http://www.down-syndrome.net/library/periodicals/dsnu/02/01>.

Dikson, L.; Brown, M.; Gibson, O. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Centro de Publicaciones del MEC ; Editorial Labor, 1991.

Duda R.; Hart, P. *Pattern Classification and Scene Analysis*. New York: Wiley and Sons, 1973.

Fernández, F.; Llopis, A.; Pablo, C. *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Madrid: Santillana, 1991. Aula XXI.

Jiménez, J.; Girando, L. *Cálculo en la escuela*. Barcelona, 1993. Colección El Lápiz.

Juan, A.; Vidal, E. Fast K-means-like clustering in metric spaces. *Pattern Recognition Letters*, v. 15, n. 1, p. 19-25, Enero 1994.

Luseño, J. *El número y las operaciones aritméticas básicas: su psicodidáctica*. Alcoy: Editorial Marfil, 1993.

Maza, C. *Sumar y restar*. Madrid: Editorial Visor, 1989.

Mico, L.; Oncina, J.; Vidal, E. A new version of the nearest-neighbour approximating and eliminating search algorithm (AESA) with linear preprocessing-time and memory requirements. *Pattern Recognition Letters*, v. 15, n. 1, p. 1-7, Enero 1994.

Ramasubramanian, V.; Paliwal, K. An Efficient Approximation-Elimination Algorithm for Fast Nearest-Neighbour Search Based on a Spherical Distance. *Coordinate Formulation Signal Processing V: Theories and Applications*, p. 1323-1326, 1990.

Roa, R. *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, 2001. Madrid.

Shapiro, M. The Choice of Reference Points in Best-Match File Searching. *Artificial Intelligence/ Language Processing*, n. 20, p. 339-343, 1977.

---

Carina S. González, D. Guerra, M. Noda, A. Bruno, H. Sanabria, L. Moreno - email: [cjgonza@ull.es](mailto:cjgonza@ull.es)  
 Escuela Superior de Ingeniería Informática. Universidad de La Laguna. España

submetido em 02/08/2007

aprovado em 16/09/2007