SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: O DESAFIO DE (RE)CONSTRUIR PRÁTICAS EM SALA DE AULA

Ana Regina Gregory Brunet
José Carlos Pinto Leivas
Magda Leyser

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma atividade sobre semelhança de triângulos planos. A sugestão de elaboração da atividade utilizando recursos didáticos fundamentou-se nos níveis de van Hiele e utilizou a metodologia da investigação em sala de aula, uma das tendências atuais em Educação Matemática. O trabalho visa proporcionar ao professor da escola básica atividades apoiadas em referências teóricas que contribuam para a melhoria da qualidade do ensino de geometria na escola básica. A experiência dos autores, em ação continuada com as atividades aqui apresentadas, indica que é possível contribuir para uma melhor compreensão do conceito de congruência de figuras geométricas planas, em particular de triângulos, quando se utilizam atividades investigativas com materiais concretos, pois essas desenvolvem nos estudantes e nos professores interesse pela aprendizagem dos casos clássicos de congruência de triângulos. Acredita-se que o envolvimento dos alunos em atividades criativas, que desenvolvam intuição e visualização, venha facilitar a compreensão do processo de formação de conceitos abstratos e elaboração do processo dedutivo em geometria.

Palavras-chave: Semelhança de triângulos. Recursos didáticos. Intuição. Visualização. Educação Matemática.

Abstract

A classroom activity on triangles similarity is presented in this article. The suggestion to such activity elaboration using didactic resources is based on van Hiele levels and has used the classroom investigation methodology, this is one of the recent trends in Mathematical Education. The work aims to provide activities to the basic school teacher based in theoretical references which contribute to improving the quality of geometry teaching in the basic school. The authors experience, in continued action with the activities presented here, indicate that it is possible to contribute for a better understanding of the concept of congruence in plane geometrical forms, particularly in triangles, when investigative activities with concrete materials are used, since these develop interest, both in students and in teachers, on the learning of classical cases of triangles congruence. It is believed that the students engaging in creative activities that develop intuition and visualization will facilitate the abstract concept formation understanding and the deductive process elaboration in geometry.

Keywords: Similar triangles. Didactic resources. Intuition. Visualization. Mathematical education.

Introdução

A geometria, ao longo dos séculos, tem se constituído como uma forma de explicar os fenômenos que se encontram na natureza e na vida humana. Talvez pela própria necessidade de demarcação das terras pela invasão do Rio Nilo, como consta na literatura didática em geral, a palavra geometria (geo: terra; metria: medida) está ligada ao sentido de medir.

Incorporando e absorvendo culturas como as do Egito e da Babilônia, a dos gregos tornou-se berço do pensamento racional. O homem começou a indagar o porquê, não se satisfazendo mais somente com o como. Considerado como um dos sete sábios da Antiguidade, Tales de Mileto (cerca de 546 a.C.) teria viajado e vivido no antigo Egito, onde despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. Essa resolução exige o uso de semelhança de triângulos. Provavelmente Tales tenha sido o primeiro, ou um dos primeiros a pensar na Matemática demonstrativa, mais especificamente na geometria. Muitos são os resultados em geometria creditados a Tales, fundador da escola jônica, entre eles um teorema que leva seu nome que versa sobre proporção.

No período que inicia com Tales até Euclides (cerca de 300 a.C.) muito se produziu nas diversas áreas do conhecimento humano. O fato de Euclides ter tomado para si a tarefa de organizar os fatos geométricos em um sistema dedutivo fez com que a geometria viesse a ser estudada e ensinada por esse método. Demonstrações teóricas, baseadas em outras demonstrações, em axiomas e em entes primitivos, têm sido a forma de aceitação da verdade geométrica pela comunidade científica. A própria humanidade aceitou "a" verdade como sendo aquela oriunda do conhecimento geométrico, pois, segundo a concepção euclidiana de mundo, tudo se resume em validar os conhecimentos geométricos reais, aqueles que se encontram na realidade do ser.

A citação platônica no "museu": "aqui não entra quem não conhece geometria" é um belo exemplo do domínio da geometria no conhecimento da humanidade. Em geral essa expressão não queria significar que só entraria aquele que conhecesse geometria, especificamente, e sim que a geometria era o que explicava o mundo, muito embora por aproximadamente dois mil anos essa compreensão estivesse relacionada à interpretação da realidade por meio da geometria euclidiana.

Com a "crise dos fundamentos" no século XIX, "a" verdade cai por terra e passa a ser "uma" verdade. Enfrentamos uma mudança de concepção de mundo com a criação de outras teorias axiomáticas para explicar fenômenos, as geometrias não-euclidianas. A riqueza e a variedade de possibilidades de interpretações geométricas para a humanidade vêm evoluindo vertiginosamente nesses últimos tempos.

Constata-se na prática dos autores que professores da escola básica estão em busca de práticas pedagógicas que os auxiliem na construção de meios para ensinar o que é específico de sua disciplina. Nessa procura é valorizado o envolvimento em atividades que destaquem conhecimento matemático, intuição, visualização e criatividade. Alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática relataram que pouco ou nada trabalharam com material concreto na área de geometria plana ou sequer com tópicos de geometria no ensino fundamental. Após atividades paralelas em disciplina de curso superior todos afirmaram a intenção de uso de atividades com material concreto em sua prática pedagógica futura, pois consideraram que visualização e manuseio das figuras foi de extrema importância na conclusão e generalização dos resultados. (BRUNET; LEYSER, 2007).

Segundo Fainguelernt (1999), há pesquisas que demonstram existir uma inter-relação entre a visualização, habilidade espacial e o desenvolvimento do pensamento geométrico. Um curso intuitivo que explore a visualização geométrica, antes ou concomitante ao curso dedutivo, é recomendado por educadores matemáticos que estão envolvidos em desenvolvimentos curriculares nos cursos de formação de professores de Matemática.

Cabe questionarmos como tem sido realizado o ensino de geometria em diversos níveis de escolaridade. Alguns estudos já realizados no Brasil apontam para um abandono no ensino de geometria como o de Pavanello (1993) em sua dissertação de mestrado. Para a mesma autora, "pesquisas visando como se encontra o ensino de geometria em nossa escola básica têm constatado que os professores consideram sua formação em relação à geometria bastante precária" (PAVANELLO, 2007, p.25).

Andrade e Nacarato (2004) realizaram

levantamento nos anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs) apontando que 20% dos trabalhos são sobre geometria, o que modifica, na opinião dos autores, o discurso do abandono na escola dessa disciplina. Em parte concordamos com os autores, muito embora esses dados levantados possam caracterizar a geometria em ação continuada e não na formação inicial dos professores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) se constituem em um documento orientador para a escola básica nacional e por, assim dizer, um guia para as construções curriculares. No documento há indicativos de que a geometria deve integrar tais construções desde os anos iniciais da educação básica e serem abordados nos três blocos denominados espaço e forma, grandezas e medidas. Segundo os PCNs, "Os conceitos geométricos são importantes porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1997, p.66). Diz ainda, "A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama" (idem, p.15.).

Recursos didáticos para o ensino de Matemática têm sido foco de estudo e motivo de reflexão para autores como Pais (2000, p.2), para quem o uso de materiais didáticos deve envolver um vínculo entre os aspectos didáticos e epistemológicos. Para o autor, "se o predomínio de um formalismo absoluto é, para muitos, um ponto de crítica ao ensino tradicional da geometria, não estaríamos incorrendo no riso de recair, no extremo oposto, de um empirismo desprovido de significado? Como conciliar a utilização do suporte da materialidade no ensino da geometria sem perder de vistas seus valores educativos?".

O uso de materiais didáticos, particularmente para o ensino de geometria, não pode estar desvinculado das concepções de ensino do professor, de sua fundamentação teórica e de sua prática. Dessa forma, antes de utilizar um determinado recurso, o professor deve ter um cuidado especial com o conhecimento profundo do material a ser utilizado e sobre quais conceitos esse material pode proporcionar ao estudante a fim de que não se torne meramente um algoritmo a mais nos processos de memorização de determinadas idéias matemáticas.

Materiais didáticos nos processos de ensino não devem ser usados apenas no sentido exploratório; eles podem ser úteis também para o desenvolvimento de construções geométricas mentais. Ao tentar utilizar os materiais didáticos para construir estruturas dedutivas, é necessário tomar um cuidado muito especial para que a simples evidência intuitiva não seja aceita implicitamente e não proporcione a construção de conceitos ou idéias matemáticas erradas, o que, segundo Fischbein (1985), vem ocorrendo e tem interferido na história da matemática. Assim, para esse autor, deve-se avaliar, tanto quanto possível, até que ponto os efeitos enganosos de uma auto-evidência podem conduzir a uma utilização inadequada e sem concepção de uso.

Assim, utilizar a intuição oriunda do uso do material didático deve ser, em nossa opinião, para produzir conhecimento intuitivo, no sentido utilizado por Fischbein (1987, p.13, trad. livre): "intuição como conhecimento intuitivo, não como origem, não como um método, mas, antes, como um tipo de cognição".

A exploração de materiais didáticos deve apresentar credibilidade própria de modo que se possa, por operações quase formais com os mesmos, chegar ao conhecimento matemático formal que produz certeza inerente à Matemática. A partir dessa concepção de uso de materiais didáticos para o ensino de geometria é que foi elaborada a seqüência apresentada neste trabalho para construir o conceito de congruência de triângulos. Esse tema é bastante debatido entre professores de Matemática, mas ainda é de difícil compreensão para um grande número de estudantes, inclusive os da formação inicial de professores, na qual os pesquisadores atuam como docentes.

Os PCNs afirmam que, entre os objetivos do Ensino Fundamental, se encontram o desenvolvimento do espírito de investigação, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e a argumentação sobre as conjecturas, inclusive colocando em destaque a investigação nos temas transversais, sendo que a tendência de investigação em sala de aula desperta, nos alunos, o interesse pela descoberta, proporcionando-lhes o prazer do descobrimento.

Ponte (2005) diz que a investigação apresenta as seguintes fases: introdução da tarefa a ser desenvolvida, realização da investigação e discussão dos resultados. Dessa forma, propor uma atividade que instigue a investigação é o ponto de partida. Ao discutir em grupo os resultados obtidos no processo investigativo, podem validar ou invalidar os resultados, o que ocorre, principalmente nas argumentações, e isto propicia o desenvolvimento de formação matemática.

Uma das teorias mais recentes para o tratamento do estudo de geometria é a do casal de matemáticos holandeses Dina e Peter van Hiele. Nessa teoria foi fundamentada uma atividade investigativa, objeto do presente artigo e que será descrita abaixo.

A teoria de van Hiele

A teoria dos van Hiele refere-se ao ensino e à aprendizagem de Geometria e foi desenvolvida nos anos 50. A teoria propõe cinco níveis de formação de raciocínio, estes cada vez mais complexos. O professor desempenha um papel fundamental ao definir tarefas adequadas e apropriadas para que os alunos progridam para níveis de pensamento mais elevados.

A teoria sugere ainda que o pensamento geométrico evolui de modo lento, iniciando por formas de pensamento simples, como a visualização e atingindo formas mais avançadas como a dedutiva na qual a intuição e a dedução se articulam. Os estudantes começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las por seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise de suas propriedades. Dessa forma, é importante que ao nível do 1º ciclo se privilegie a abordagem intuitiva, experiências do conhecimento, exploração do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), com aproximadamente 11-12 anos a criança inicia a fase do pensamento formal e estaria completamente desenvolvida por volta dos 15 anos. Em 1970, eles introduziram algumas modificações em sua teoria afirmando que provavelmente o pensamento formal, o último nível de van Hiele, é alcançado pelos sujeitos entre os 15 e 20 anos. Como é lembrado por Coll, Palácios e Marchesi (1995, p.328-329):

> *... a seqüência de fases evolutivas estabelecida por Piaget e colaboradores, no âmbito do desenvolvimento da inteligência – inteligência sensório motora, pensamento pré-operatório, pensamento operatório concreto, pensamento formal. A ordem do aparecimento dessas fases é a mesma, em todos os seres humanos, mas, como destacaram as investigações transculturais podem-se produzir importantes avanços ou retrocessos em função da experiência e da história educativa de cada pessoa. No que concerne à competência para levar a cabo raciocínios operatórios concretos, esses avanços ou retrocessos podem ser de vários anos, em relação à média de idade de aparecimento. No que concerne à natureza de levar a cabo raciocínios de natureza formal, a heterogeneidade é ainda maior e tudo parece indicar que é fortemente condicionada pelas experiências anteriores e pelo maior ou menor conhecimento daquilo sobre o qual se raciocina.*

As pesquisas de Piaget e colaboradores apontam para fases subseqüentes de tipos de pensamento que os seres humanos podem adquirir desde que tenham sido adequadamente estimulados e tenham conseguido desenvolver seu potencial cognitivo ao longo dos anos. O avanço até o nível formal não se dá sem a construção e aquisição cognitivas dos níveis anteriores, o que vem ao encontro da teoria de van Hiele.

O trabalho dos van Hiele já é de conhecimento público desde a década de 70 e sua principal divulgadora no Brasil é a professora Lílian Nasser, do projeto "Fundão" da UFRJ. Muito embora se reconheçam dificuldades no ensino-aprendizagem de geometria, parece que a falta de um referencial teórico a ser seguido pelo professor ainda é um dos maiores entraves.

Apresentam-se os cinco níveis do modelo dos van Hiele, com algumas características:

1. nível zero – também denominado nível básico ou de visualização ou de reconhecimento.

Nesse nível, os estudantes aprendem pelo simples reconhecimento dos objetos que são colocados à sua disposição. As idéias e os conceitos geométricos são identificados, comparados, e figuras ou objetos são nomeados por sua forma global, sem atributos específicos. As figuras geométricas planas e espaciais são distinguidas pela sua forma global, por exemplo, em linhas retas e em linhas curvas.

2. nível um – também denominado nível da análise.

Nesse nível, os objetos geométricos são percebidos pelo reconhecimento de suas propriedades, e os conceitos geométricos são analisados a partir do nível anterior. As características dos objetos ou figuras começam a emergir, e as propriedades comuns a uma dada classe começam a ser explicitadas e também utilizadas na resolução de alguns problemas como, por exemplo, calcular o perímetro de um quadrado multiplicando a medida dos lados por quatro, uma vez que já se distinguiu que o quadrado tem quatro lados de mesma medida. Segundo essa teoria, a passagem ao nível seguinte só é possível depois de atingido o nível anterior.

3. nível dois – da dedução informal, da abstração ou da ordenação.

Nesse nível, o aluno ordena logicamente as propriedades dos objetos geométricos; percebe ser necessária uma definição precisa de um determinado objeto; reconhece que uma propriedade pode ser decorrente de outras e estabelece relações entre essas propriedades. Também é capaz de construir argumentações lógicas informais; de deduzir propriedades de certas figuras para reconhecer as classes com uma mesma propriedade. Entretanto, nessa fase ainda não consegue estabelecer argumentações formais amplas, não tendo compreensão sobre axiomas e teoremas.

4. nível três – da dedução formal.

A geometria é compreendida como um sistema lógico dedutivo, e esse sistema é considerado uma forma de validar as verdades matemáticas. Já há o reconhecimento de condições necessárias e suficientes e há a compreensão do sentido de definições, de axiomas, de teoremas e do significado de demonstrações.

5. nível quatro – do rigor.

Nesse último nível, categorizado pelos van Hiele, o aluno é capaz de estabelecer comparativos entre mais de um sistema axiomático. Percebe a geometria como um modelo abstrato e é capaz de compreender outros modelos axiomáticos de geometrias, por exemplo relacionar o axioma das paralelas em geometria euclidiana e em geometrias não euclidianas.

No modelo dos van Hiele, o conhecimento geométrico vai evoluindo de forma gradual iniciando nos níveis mais simples, chegando aos níveis mais complexos, buscando estabelecer uma articulação entre a intuição e a dedução e levando em conta o papel relevante desempenhado pela visualização.

Conforme Nasser (1997), as pesquisas apontam que a maioria dos alunos chega às séries finais do ensino fundamental raciocinando no nível zero de van Hiele, ou até abaixo dele. Cabe ao professor identificar o nível em que seus alunos se encontram e, a partir daí, desenvolver e proporcionar condições para que eles avancem.

A atividade a seguir é uma possível introdução ao tópico semelhança de triângulos que procura respeitar a hierarquia dos níveis de van Hiele diante da realidade captada pelas pesquisas. Sendo assim, a atividade inicia preparando o nível zero, de reconhecimento, favorecendo a unificação do nível da turma e segue buscando preparar avanços para o nível um, de análise. Alcançando esse nível, o aluno saberá reconhecer quando dois triângulos são semelhantes. Além disso, a atividade propicia uma preparação ao nível dois, da dedução informal.

O reconhecimento dessa propriedade é fundamental para resolver muitos dos clássicos problemas sugeridos nas séries finais do ensino fundamental. É, também, um fundamento necessário à compreensão de tópicos matemáticos tais como trigonometria no triângulo retângulo, identidades trigonométricas, geometria analítica.

Atividade de semelhança de triângulos

1. Organizando o cenário

A turma deve distribuir-se em grupos de até quatro pessoas, escolhendo um redator e um orador para o grupo. Os grupos devem ser nomeados para fins de identificação no decorrer da atividade. O professor, tendo preparado antecipadamente e com cuidado o material necessário para a atividade, distribui para cada grupo a Tabela 1, abaixo, e uma folha impressa com triângulos. Cada folha possui uma família de triângulos com a propriedade de ser possível estabelecer relação biunívoca entre os vértices de cada um de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes. Os lados correspondentes podem ser congruentes ou não. Diferentes famílias de triângulos não possuem essa propriedade. É interessante para o bom andamento da atividade que os lados dos triângulos tenham medidas precisas até a primeira casa decimal.

As figuras abaixo mostram duas possíveis famílias de triângulos. Para a construção delas, sugere-se um software de geometria dinâmica ou régua e compasso.

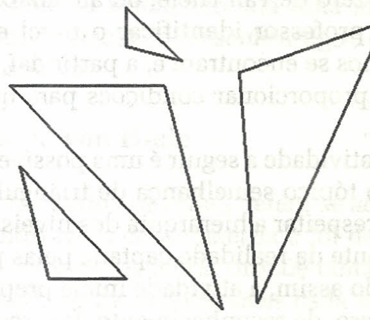

Figura 1: Família de triângulos com lados proporcionais a 2, 3 e 4.

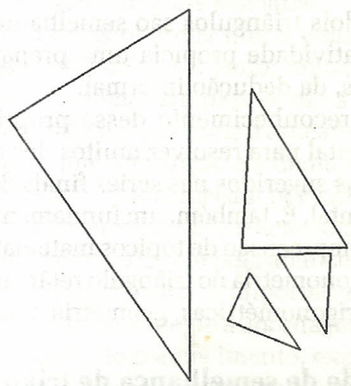

Figura 2: Família de triângulos com lados proporcionais a 4, 6 e 7.

Os alunos recortam os triângulos e procuram características que permitam agrupá-los utilizando algum critério estipulado pelo grupo. Devem ser explicitadas diferenças e semelhanças entre todos os triângulos da família, e o redator deve completar a Tabela 1, a seguir, de acordo com os critérios estabelecidos pelo seu grupo e identificar na primeira coluna o nome de seu grupo.

Tabela 1: Diferenças e semelhanças obtidas por cada grupo.

Grupo	Semelhanças	Diferenças

Nesse primeiro momento da atividade é proposto aos estudantes explorar o material para reconhecer e estabelecer relações entre os objetos geométricos colocados à sua disposição. O registro das idéias discutidas pelo grupo fortalece a necessidade de identificação e nomeação dos objetos, mesmo que pela sua aparência global, já que os critérios são estabelecidos livremente pelos alunos. Com isso a atividade contempla o nível zero.

O professor elabora uma tabela igual à anterior, no quadro, registrando as semelhanças e diferenças encontradas por cada grupo, relatadas pelo orador. Após todos os oradores auxiliarem o professor a completar a tabela no quadro, inicia-se uma discussão com o grande grupo sobre a tabela preenchida.

Espera-se que, a partir das discussões, os alunos tirem conclusões sobre a congruência entre pares de ângulos dos triângulos de seu grupo e sobre o fato de todos os grupos possuírem famílias de triângulos com essa propriedade. O grupo que não reconheceu a congruência entre os ângulos da sua família de triângulos até esse momento provavelmente testará essa propriedade e concluirá sobre sua pertinência. Caso contrário, o professor deverá conversar com o grupo a respeito da existência dessa propriedade na família que lhes coube, e, em último caso, pedir ao grupo que verifique tal existência. É fundamental para o bom andamento da atividade que os alunos estejam convencidos da validade dessa propriedade na sua família de triângulos. Anotar no quadro as considerações de cada grupo.

As primeiras etapas dessa atividade propiciam ao aluno a possibilidade de reconhecer e explorar os objetos matemáticos de forma livre. A ação de recortar os triângulos é uma maneira de o aluno perceber sua forma, em particular seus ângulos, o que engloba os sentidos, a visão e o tato. O manuseio do material proporciona ao aprendiz reconhecer os objetos de forma mais genérica do que um protótipo fixo em uma folha de papel, o que acreditamos facilitar a construção do nível zero de van Hiele.

O professor solicita que cada grupo enumere sua família de triângulos atribuindo um número natural de 1 a 4 para cada um. Isto feito, pede para que nomeiem os vértices de cada triângulo com letras e índices, por exemplo A_1, B_1, C_1 para o triângulo 1; A_2, B_2, C_2 para o triângulo 2, e assim, sucessivamente, de forma que ângulos congruentes recebam a mesma letra em seu vértice. Com isso se estabelece uma correspondência biunívoca entre pares de triângulos por meio de seus vértices. O professor verifica ainda, em cada grupo, se a nomeação foi feita corretamente e conversa com os alunos sobre a possibilidade de, a partir da nomeação feita, nomear também os lados de cada triângulo da família de modo que lados diferentes possuam nomes diferentes. A seguir, escreve no quadro, com o auxílio do grande grupo, a definição:

"Dados dois triângulos diferentes, os ângulos designados pelas mesmas letras serão chamados de **ângulos correspondentes** e os lados determinados pelas mesmas letras de **lados correspondentes.**"

As componentes dos triângulos, ângulo e lado, somente foram relacionadas e nomeadas após manipulação dos objetos pelo grupo. É possível que isso melhore a compreensão desses objetos pelos sujeitos.

Acreditamos que as etapas cumpridas até aqui auxiliam no preparo para o avanço dos alunos que estão no nível de reconhecimento, no nível de análise.

2. Coleta e registro de dados

O professor fornece a cada grupo uma segunda tabela e solicita que sejam feitas as medidas dos lados dos triângulos e os registros dessas medidas na Tabela 2. Isso exigirá concentração e organização.

Tabela 2: medidas dos lados dos triângulos de cada grupo

Triângulo	Medida de A_iB_i	Medida de B_iC_i	Medida de A_iC_i
1			
2			
3			
4			

3. Estruturando e observando os dados

Após o preenchimento da Tabela 2, por cada grupo, o professor solicita que os alunos calculem os quocientes entre as medidas dos lados de dois triângulos obedecendo sempre a mesma ordem e organizem esses dados em uma terceira tabela, que lhes é distribuída.

Tabela 3: Quocientes entre os lados de dois triângulos.

	A_2B_2	A_2C_2	B_2C_2
A_1B_1			
A_1C_1			
B_1C_1			
Observações:			

Entre as observações registradas pelos alunos, espera-se a constatação da igualdade entre os números da diagonal principal da tabela. Por exemplo, as células cinza da Tabela 4 ilustram onde os números da Tabela 3 devem ter mesmo valor numérico registrado.

Tabela 4: os números registrados nas células cinza devem ser iguais.

	A_2B_2	A_2C_2	B_2C_2
A_1B_1			
A_1C_1			
B_1C_1			
Observações:			

O professor conversa com os grupos sugerindo a verificação da validade das observações acerca dos valores encontrados na Tabela 3 quando são comparados outros dois triângulos entre os disponíveis em cada grupo. Para tanto, pode ser fornecida outra tabela, como a 3, da qual os alunos devem preencher os índices, visto que a escolha dos triângulos é arbitrária, e é interessante o grupo decidir qual par de triângulos da sua família utilizar. Se o grupo quiser, pode comparar tantos pares de triângulos quantos julgar necessário, sempre registrando em uma nova tabela o modelo Tabela 3. Esse processo deve culminar na ratificação da observação de que sempre os números da diagonal principal da tabela modelo 3 são iguais entre os triângulos da família.

4. Organizando as conclusões

Agora o professor solicita que cada grupo tome como referência o triângulo 1 e calcule os quocientes entre os lados correspondentes desse triângulo com cada um dos demais. O registro deve ser feito sempre em tabelas, construindo uma tabela para a comparação de cada par de triângulos. Por exemplo, a comparação entre os triângulos 1 e 2 será registrada na Tabela 5, abaixo:

Tabela 5: Quocientes entre lados correspondentes.

Triângulo 1	Triângulo 2	Quocientes entre lados correspondentes	Conclusões
medida $(A_1 B_1)$ =	medida $(A_2 B_2)$ =		
medida $(B_1 C_1)$ =	medida $(B_2 C_2)$ =		
medida $(A_1 C_1)$ =	medida $(A_2 C_2)$ =		

Entre as conclusões esperadas está a de que o quociente entre a medida dos lados correspondentes seja igual. Cabe ao professor lembrar, nesse momento, que, quando isso ocorre, dizemos que os segmentos, no caso os lados dos triângulos, são **proporcionais**.

Ao organizarem os dados retirados da família de triângulos nas Tabelas 2, 3 e 5, acreditamos estarmos auxiliando os alunos a progredirem ao nível um, nível da análise, visto que, além de organizar os dados, eles devem observar, reconhecer e deduzir a propriedade comum da sua família de triângulos, a saber, "o quociente entre a medida dos lados correspondentes é igual", isto é, "os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais".

5. Interligando grupos

O professor solicita que cada grupo passe um triângulo para outro grupo, estabelecendo um rodízio de um triângulo entre os grupos. Após, pergunta se as conclusões obtidas na Tabela 5, anteriormente, continuam válidas ao comparar com o novo triângulo recebido do grupo vizinho. Indica que cada grupo construa uma outra tabela modelo Tabela 3, para fazer o registro e poder estabelecer o comparativo.

Essa etapa da atividade é fundamental para o aluno se convencer de que a propriedade "quociente entre a medida dos lados correspondentes são iguais" só é válida dentro de certas famílias de triângulos, isto é, não é qualquer par de triângulos que gozará dessa propriedade. Assim, por meio de um contra-exemplo, esperamos que as características dos triângulos comecem a emergir, e as propriedades comuns a cada família, pares de ângulos congruentes as traduzam como uma classe de triângulos. Essa etapa da atividade é de cunho investigativo. Uma vez que é introduzida a tarefa a ser desenvolvida, o aluno possui suporte para a sua realização, culminando na invalidação do resultado a partir da discussão e argumentação realizada no grupo. Nesse momento, os alunos que conseguiram acompanhar e compreender todas as etapas estão ou avançaram para o nível 1, o nível da análise.

6. Representações

O professor solicita aos pequenos grupos que desenhem dois triângulos com as propriedades observadas, a saber, dois triângulos entre os quais seja possível estabelecer uma relação biunívoca entre os vértices de forma que pares de ângulos correspondentes sejam congruentes e o quociente entre lados correspondentes seja igual, e descrevam o que norteou a construção dos mesmos.

A seguir, retorna ao grande grupo a fim de discutir e formular conclusões a partir das atividades desenvolvidas nos pequenos grupos. Cada grupo deve relatar como construiu seu par de triângulos e tentar justificar por que possuem as propriedades solicitadas. O professor anota no quadro as conclusões a que cada grupo chegou debatendo as informações fornecidas pelos alunos no intuito de melhorar e fortalecer suas argumentações.

Ao tentar construir os triângulos que gozem das propriedades mencionadas acima, o aluno poderá iniciar o processo de ordenação lógica, pois terá que pensar em como construir dois triângulos de uma mesma classe. Terá de avaliar quais características são necessárias aos triângulos. Para tanto, ele deverá ter uma definição precisa de congruência entre ângulos de triângulos para construí-los, independentemente do conhecimento de sua necessidade. Novamente a investigação é contemplada nessa atividade. É apresentada a tarefa a ser desenvolvida – a construção de triângulos com as propriedades pares de ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais – e oportunizada a realização e discussão dos resultados. A argumentação é incentivada a partir da solicitação do relato da justificativa da construção realizada pelo grupo. Inicia-se aqui o favorecimento para o progresso ao nível da dedução informal, nível dois.

7. Formalizando a definição de triângulos semelhantes

O professor busca consolidar em grande grupo as propriedades investigadas levantando considerações pertinentes, tais como: ao trocarmos as identificações dos vérticies de um triângulo, estabelecemos uma nova correspondência entre esse triângulo e os demais de sua família. Os lados correspondentes terão obrigatoriamente o mesmo quociente entre suas medidas? (Não.) É necessário, então, estabelecer relação biunívoca entre os vértices de forma que ângulos congruentes estejam em correspondência? (Sim.)

O professor escreve no quadro, com o auxílio do grande grupo, a definição:

"Seja *S* uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência *S* é uma **semelhança**, e dizemos que os **triângulos são semelhantes.**"

A atividade acima permite concluir que triângulos com ângulos correspondentes congruentes são semelhantes. Na verdade, observamos que bastam dois ângulos correspondentes serem congruentes, o que é formalizado por Rezende (2000, p.75), como Corolário A.A. do teorema de semelhança A.A.A.: "Seja *S* uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos são congruentes, então a correspondência *S* é uma semelhança".

Essa atividade busca favorecer o avanço dos alunos ao nível de van Hiele da dedução informal, da abstração ou da ordenação, nível dois. Acreditamos que ela facilitará a resolução de problemas que envolvam semelhança de triângulos, já que o reconhecimento dessa propriedade foi visceralmente explorado.

O trabalho aqui apresentado foi um recorte de um projeto de pesquisa realizado pelos autores e vivenciado em sua prática docente na licenciatura em Matemática, em uma disciplina oferecida a alunos ingressantes, tendo havido repercussão em disciplinas de geometria posteriormente cursadas. Os acadêmicos mostraram satisfação e interesse por esse tipo de atividade. Uma grande maioria desses manifestou não ter realizado durante a escola básica o uso de materiais alternativos no ensino de geometria. Em atividades extensionistas, atitudes de engajamento e vislumbre de possibilidades de aplicações imediatas nas práticas de professores em exercício na escola básica foram observadas.

Conclusão

Apresentamos um estudo de fundamentação de atividades relativas à semelhança de triângulos utilizando os níveis de van Hiele para a formação de raciocínio em geometria. As atividades foram planejadas para serem utilizadas com alunos da Licenciatura em Matemática, bem como na ação continuada com professores em exercício, embora não tenha sido objeto deste artigo descrever os resultados de tais aplicações. Das diversas aplicações, em momentos distintos, foi observado que os participantes das oficinas, onde as atividades foram aplicadas, manifestaram interesse e entusiasmo na realização das atividades, pela possibilidade de construção de conceitos explorando especialmente a manipulação dos materiais cuidadosamente elaborados pelos executores. Ainda mais, foi vislumbrada a possibilidade de utilização de tais atividades na prática docente dos envolvidos em ação continuada, pois ela concilia o uso de materiais concretos para o ensino de geometria na formação do conceito de semelhança de triângulos. Percebe-se que atividades como as propostas neste artigo possam suprir o que os PCN sugerem, ou seja, desvincular o ensino e a aprendizagem em Matemática, centrado em procedimentos mecânicos, sem significação aos alunos. Acreditamos que este artigo possa contribuir para uma melhoria na prática docente do professor da escola básica e, conseqüentemente, na aprendizagem em geometria.

Referências

ANDRADE, J.A.; NACARATO, Adair M. Tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEN. Educação matemática em revista. Recife, n.17, pp.61-7, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRUNET, A.; LEYSER, M. Semelhança de triângulos: o desafio de (re)construir práticas em sala de aula. Anais... IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas: ULBRA, 2007. 1 CD-ROM.

COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia evolutiva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação matemática: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

FISCHBEIN, Efraim. Intuition in science and mathematics: an educational approach. London: Mathematics Education Library, 1987.

NASSER, L.; SANT'ANA, N. P. Geometria segundo a teria de van Hiele. Instituto de Matemática – Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

PAIS, Luiz Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. 23ª reunião anual da ANPED, Caxambu, 2000. Disponível em <http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1919T.PDF>. Acesso em: 04 abr. 2008.

PAVANELLO, Regina M. O abandono do ensino de geometria: causas e conseqüências. Zetetiké. Campinas, n.1, p.7-17, mar. 1993.

PAVANELLO, Regina M. O ensino de geometria no Brasil nas últimas décadas: algumas preocupações a partir de pesquisa. In: I SEMINÁRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA, 2007, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: UFOP, 2007. 1 CD-ROM.

PIAGET J.; INHELDER, B.: trad. [de] Bernardina Machado de Albuquerque. A representação do espaço na criança. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PONTE, João P. da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. 1.ed., Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B. de. Geometria euclidiana plana e construções geométricas. Campinas, SP: Editora da UNICAMP; São Paulo, SP: Imprensa Oficial, 2000.

Ana Regina Gregory Brunet – Profa. adjunta da ULBRA; profa. FAPA – anabrunet@cpovo.net

José Carlos Pinto Leivas – Prof. aposentado da FURG; prof. adjunto da ULBRA; doutorando na UFPR, e-mail: leivasjc@yahoo.com.br

Magda Leyser – profa. ULBRA – m.leyser@terra.com.br

RECEBIDO em 30/07/2008
APROVADO em 30/09/2008