A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

The Historical Construction of the Function Concept

Rafael Winicius da Silva Bueno
Lori Viali

Resumo

Neste artigo, é feita uma investigação acerca da construção histórica do conceito de função rumo a sua definição atual, identificando as principais etapas evolutivas desse processo. O objetivo do trabalho é identificar o papel desempenhado e a contribuição dada pelo desenvolvimento das diferentes formas de representação semiótica na evolução desse conceito matemático para, assim, melhor utilizar as representações no processo de construção do conceito de função em sala de aula.

Palavras-chave: Conceito de função. Desenvolvimento histórico. Representação semiótica.

Abstract

In this paper is made an investigation about the historical concept of function, where are identified the main steps in the development of this basic mathematical content. The major aim of this work was identify the contribution of the different ways of the semiotic representation of the concept in its development. From this identification it is possibly to stress each representation in an appropriate way improving as a consequence the teaching and learning of the concept.

Keywords: Concept of function. Historic development. Semiotic representation.

Introdução

No estudo dos mais diversos campos da Matemática, há a necessidade de se trabalhar com variadas representações, com vistas a um melhor acesso ao objeto de estudo e, consequentemente, de uma comunicação mais efetiva. Essa característica se faz presente, de maneira muito evidente, ao se trabalhar com funções, uma vez que podemos representar uma função algébrica ou graficamente, bem como através de tabelas e diagramas.

Segundo Duval (2003), diferentemente de outras áreas, na Matemática trabalha-se com objetos abstratos e não há alternativas para se acessar esses objetos a não ser através de representações. Em outros campos de conhecimento, como botânica, geologia, astronomia e física, as representações são imagens ou descrições de fenômenos do mundo real, aos quais se pode ter acesso perceptual e instrumental. Já em Matemática, esse não é o caso.

De acordo com Elia e Spyrou (2006), ao se trabalhar com funções, a distinção entre estas e as representações utilizadas para descrever suas leis é uma das condições essenciais para a compreensão desse conceito. Os autores também afirmam que a compreensão do conceito de função não é uma tarefa fácil, dada a diversidade de representações utilizadas e as dificuldades encontradas pelos estudantes em fazer conexões entre elas, seja pela deficiência na utilização de representações distintas, causada muitas vezes pela concentração do trabalho docente na representação algébrica, seja pela inabilidade de coordenação entre representações.

Nesse sentido, fica evidente a importância das representações na construção do conhecimento matemático e, mais especificamente, no processo de construção do conceito de função em sala de aula. Cabe, então, o questionamento: a construção histórica do conceito de função é ligada diretamente ao desenvolvimento das representações utilizadas atualmente para sua comunicação?

Para a construção do conceito de função com o qual se trabalha atualmente nas escolas e universidades, foram necessárias contribuições de vários matemáticos durante séculos de estudos. Nesse período, surgiram conceitos que alicerçaram seus pensamentos rumo à construção da definição atual de função e suas implicações. Nesse artigo, é feita uma pesquisa bibliográfica buscando reconstruir o caminho percorrido para essa construção, fundamentando-se, principalmente, nos trabalhos de Monna (1972), Yuoschkevitch (1976), Ponte (1992), Boyer (1996) e Eves (2004).

Principais períodos de evolução

De acordo com Yuoschkevitch (1976), em seu estudo acerca da evolução da construção do conceito de função ocorrida até a metade do séc. XIX, os principais estágios do desenvolvimento dessa ferramenta são a Antiguidade, a Idade Média e a Modernidade.

Na Antiguidade, o pensamento matemático não criou uma noção geral da ideia de variável ou de função. Apenas casos práticos e particulares, principalmente no campo da Astronomia, foram estudados utilizando-se métodos quantitativos e a construção de tabelas que representavam funções entendidas como relações entre conjuntos discretos de constantes dadas. Na Idade Média, mais especificamente, na ciência europeia do séc. XIV, cada caso particular de dependência entre duas quantidades era definido através de uma descrição verbal ou gráfica, em detrimento do uso de fórmulas.

Na Modernidade, no final do séc. XVI e, principalmente, durante o séc. XVII, expressões analíticas de funções começam a surgir. A classe analítica de funções expressas por somas de séries infinitas torna-se a mais usual. Segundo Yuoschkevitch (1976), "foi o método analítico de introdução das funções que revolucionou a Matemática e, devido a sua grande eficiência, conduziu as funções a um papel central na área das ciências exatas." (p.39).

Entretanto, segundo o autor, em meados do séc. XVIII, a representação de função como uma expressão analítica provou-se insuficiente. Uma nova definição de função, que, posteriormente, acabou tornando-se universalmente aceita em análise matemática, foi introduzida. Já na segunda metade do séc. XIX, essa definição abriu possibilidades para o desenvolvimento da teoria de funções, mas acabou, também, ocasionando dificuldades lógicas, o que, durante o séc. XX, causou o movimento para que a essência desse conceito fosse revista, assim como outros conceitos importantes da análise matemática, chegando-se, então, a uma definição mais geral e abstrata do conceito de função. Esses períodos serão discutidos após o período definido como Modernidade.

A Antiguidade

Por volta do ano 2.000 a.C., de acordo com Eves (2004), a matemática babilônica já havia evoluído para uma álgebra bem desenvolvida. Tábulas sexagesimais eram amplamente utilizadas para calcular valores de quadrados e cubos dos números naturais de 1 a 30 e também de valores de $n^2 + n^3$, relativos a esse intervalo, com o objetivo de estudar o movimento dos planetas na esfera celeste. As funções empiricamente tabuladas acabaram se tornando, posteriormente, o suporte para a sequência do desenvolvimento de toda a astronomia.

Novas contribuições para a construção do conceito de função surgiram na Grécia, nos estudos matemáticos e nas ciências naturais. Tentativas, atribuídas aos pitagóricos, de estabelecer leis acústicas indicam a busca por relações de interdependência entre quantidades.

Também na Grécia, já como parte do Império Romano, as funções relativas a problemas astronômicos e matemáticos eram objeto de estudos similares aos da análise matemática atual. De acordo com os objetivos de estudo, funções eram tabuladas por meio do uso de interpolação linear e, em alguns casos simples, até mesmo por meio de limites de proporções de duas quantidades infinitamente pequenas. Problemas envolvendo valores extremos e tangentes, ou, ainda, o cálculo de áreas, volumes e comprimentos, eram resolvidos com a aplicação de métodos semelhantes aos utilizados no Cálculo Integral e Diferencial.

Entretanto, segundo Yuoschkevitch (1976), o simbolismo grego, até o séc. III d.C. restringiu-se apenas a denotar várias quantidades por diferentes letras do alfabeto. Somente com os trabalhos de Diofanto[1] e, possivelmente, de seus predecessores mais próximos, surgem os primeiros sinais, como, por exemplo, um sinal de igualdade. Contudo, com a decadência da sociedade antiga, suas notações acabaram não sendo desenvolvidas.

Apesar da carência de um simbolismo mais sofisticado, os gregos deram importante contribuição para o aumento do número de dependências funcionais utilizadas e dos métodos de estudá-las, mas a ideia geral do conceito de função não existia. Yuoschkevitch (1976) afirma que existe uma grande distância entre o instinto de funcionalidade e a sua percepção e que, na antiguidade, além de o termo *função* não ser utilizado, não havia sequer alusões a uma ideia mais geral e abstrata de relações de dependências.

As ideias de variação quantitativa ou de mudança faziam-se presentes no pensamento grego. Problemas de movimento, continuidade e infinito foram considerados. Entretanto, nem o sentido de velocidade como razão entre o espaço percorrido e o tempo, nem, obviamente, a ideia de velocidade instantânea foram introduzidos. Portanto, nenhum desses conceitos foi explorado pelos estudos gregos, de forma a gerar um pensamento mais complexo e abstrato com relação à noção de variabilidade.

A Idade Média

Com a decadência da cultura antiga, as primeiras ideias relativas à noção de função de uma forma mais geral e abstrata ocorrem no séc. XIV, nas escolas de Filosofia Natural de Oxford e Paris. Conforme Yuoschkevitch (1976), "seguindo pensadores como Robert Grosseteste e Roger Bacon, essas duas escolas, que floresceram no séc. XIV declararam a Matemática como o principal instrumento para o estudo de fenômenos naturais." (p.45).

Nesse período, surgiram muitos conceitos de grande importância para a evolução das ciências exatas, como, por exemplo, velocidade instantânea, aceleração, quantidade variável, considerada como um fluxo de qualidade. Todos esses conceitos contribuíram na síntese da cinemática e do pensamento matemático.

Simultaneamente, conforme Caraça (2005), em face das experiências e observações realizadas, percebeu-se que muitos fenômenos naturais apresentavam certa regularidade que poderia ser descrita através de leis quantitativas.

O estudo da intensidade das formas e seu aspecto mais importante, a cinemática, eram abordados na Inglaterra em um contexto aritmético, enquanto que, na França, Nicole Oresme[2] (1323–1382) desenvolveu esse estudo através de uma abordagem geométrica, introduzindo o conceito de *latitude das formas* em meados do séc. XIV. As formas ou qualidades são fenômenos como a luz, a distância, a velocidade, que possuem vários níveis de intensidade e que mudam continuamente, dentro de limites dados.

Segundo Yuoschkevitch (1976), essa teoria parece ser fundamentada em um uso de ideias gerais sobre quantidades variáveis dependentes e, de acordo com Boyer (1996), "os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com nossa geometria analítica." (p.181).

Com a teoria da latitude das formas, e o consequente desenvolvimento do registro[3] de representação gráfico, o estudo das funções do tempo se desenvolveu. Considerações sobre o infinito na resolução de problemas dessa área eram comuns. Conceitos como velocidade instantânea e aceleração passaram a ser amplamente estudados, e a descoberta mais importante da época, para a mecânica e talvez também para a Matemática, foi a determinação da velocidade média de um movimento uniformemente acelerado.

Durante os sécs. XV e XVI, a teoria da latitude das formas gozou de enorme prestígio e difundiu-se, principalmente, na Inglaterra, França, Itália e Espanha, sendo exposta em universidades e em livros publicados. Analisando, porém, o

[1] Diofanto de Alexandria viveu no século III e escreveu Aritmética, obra na qual propõe uma abordagem analítica da teoria algébrica.

[2] Nicole Oresme, de acordo com Eves (2004), foi o maior matemático de sua época.

[3] Segundo Duval (2003, p.14), "para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, falaremos, parodiando Descartes, de 'registro' de representação".

alcance dessa teoria e suas implicações, pode-se perceber, segundo Ponte (1992), que, apesar da grande evolução em termos de generalização e abstração e de alguns resultados particulares alcançados, o estudo das funções em Matemática como um conceito e objeto individualizado ainda não havia sido alcançado.

A Modernidade

O desenvolvimento do conceito de função foi catalisado, de acordo com Yuoschkevitch (1976), pelo desenvolvimento da álgebra simbólica e pela extensão do conceito de número, englobando tanto o conjunto dos números reais quanto o número imaginário *i* e o conjunto dos números complexos. Esses foram os conceitos matemáticos fundamentais que proporcionaram a introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica das funções através de fórmulas.

O que deve ser enfatizado, também, na concepção do autor,

> [...] é a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas (em primeiro lugar, para adição, subtração, potência e igualdade) e, acima de tudo, sinais para quantidades desconhecidas e parâmetros, que Viète em 1591 denotou por vogais A, E, I,... e consoantes B, G, D,... do alfabeto latino, respectivamente. A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada por Viète), dificilmente pode ser estimada. (p.51)

Contudo, o simbolismo de François Viète (1540-1603), que não avançou no estudo do conceito de função, e o desenvolvimento do registro de representação algébrico, careciam de progressos significativos, e estes logo vieram por meio das contribuições de inúmeros intelectuais, como René Descartes (1596–1650), Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Leibniz (1646–1716) e Leonhard Euler (1707–1793), entre outros.

A emergência do conceito de função como um objeto individualizado da Matemática começou, segundo Ponte (1992), com o início do cálculo infinitesimal. Primeiramente, Descartes estabeleceu claramente que uma equação de duas variáveis, representada geometricamente por uma curva, indica a dependência entre as variáveis. Através dos estudos de Descartes, segundo Yuoschkevitch (1976),

> [...] pela primeira vez e de forma clara, é sustentado que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível calcular a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra. (p.52)

A introdução de funções escritas através de equações iniciou uma verdadeira revolução no estudo de matemática. O uso de expressões analíticas, regidas por operações e relações específicas, introduzido, independentemente, por Pierre Fermat (1601–1665) e René Descartes, originou características específicas do estudo do tema. Proveniente da álgebra aplicada à geometria, essa nova forma de representar as funções logo se estendeu a outras áreas da Matemática e, especialmente, ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Para Monna (1972), "Descartes, com sua aplicação de métodos algébricos à geometria, abriu o caminho para a introdução da noção de função que, gradualmente, se desenvolveu até sua forma moderna" (p.58).

Nesse período histórico, propaga-se, então, a utilização da prática da conversão, caracterizada por Duval (2006) como a transformação de uma representação semiótica em outra, na qual ocorre mudança de registro, mas conserva-se o mesmo objeto denotado. Sua importância para o desenvolvimento do conceito de função e do pensamento matemático é enfatizada por D'Amore, que afirma que

> A construção do conhecimento matemático depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica dos referidos conceitos: *representado-os* em um dado registro; *tratando* tais representações no interior de um mesmo registro; fazendo a *conversão* de um dado registro para outro. (p.62. Grifos do autor)

De uma forma inicial, a ideia de que uma expressão infinita era uma função não era recente: progressões geométricas decrescentes e infinitas já eram conhecidas há bastante tempo. Entretanto, apenas na segunda metade do séc. XVII, as séries de potência acabaram sendo percebidas como instrumento importante para o estudo das funções. Devido às séries de potência, o conceito de função passou a ocupar papel central no estudo da análise matemática e foi o cerne das teorias de Newton e de Leibniz no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

Isaac Newton e Gottfried Leibniz

Figura 1 - Leibniz

De acordo com Yuoschkevitch (1976), Newton[4], sucessor de Isaac Barrow[5] (1630–1677), apresentou em Cambridge, nos anos de 1664 e 1665, uma interpretação cinemática e geométrica clara das concepções básicas da análise matemática, descrevendo concepções de tempo e movimento, escolhendo o tempo como um argumento universal e interpretando as variáveis dependentes como uma quantidade continuamente fluente que possui uma velocidade de variação.

Os dois problemas principais do cálculo infinitesimal eram expressos em termos mecânicos: dada a lei para a distância, determinar a velocidade do movimento (diferenciação) e, dada a velocidade de um movimento, determinar a distância percorrida (integração). No entanto, as concepções de Newton sobre o tema eram mais abstratas. Em 1669, Newton comunicou a Barrow o seu *Método das fluxões*[6], que, apesar de escrito em 1671, foi publicado somente em 1736. Nesse trabalho, apenas as noções básicas foram introduzidas através da cinemática.

Por outro lado, Leibniz também chegou, a partir das curvas geométricas, às noções básicas de diferenciação e integração. Entre os anos de 1673 e 1676, inventou o seu Cálculo e, em 1675, utilizou, pela primeira vez, o símbolo de integral, um *S* alongado, vindo da primeira letra da palavra soma[7]. Pouco tempo depois, já utilizava as notações de diferenciais, derivadas e integrais como se conhece atualmente.

A palavra função, de acordo com Yuoschkevitch (1976), surgiu em 1673, pela primeira vez, em um manuscrito de Leibniz intitulado *O método inverso das tangentes, ou sobre funções*. Entre 1692 e 1694, surgiu em seus artigos a definição de função, que foi caracterizada como qualquer parte de uma linha reta, ou seja, segmentos obtidos pela construção de infinitas linhas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva. A definição de função construída, porém, não corresponde, em nenhum aspecto, ao contexto analítico.

A relação de Leibniz com Johann Bernoulli (1667–1748) e suas discussões matemáticas, principalmente entre 1694 e 1698, levaram à necessidade de um termo geral que representasse quantidades arbitrárias dependendo de uma variável à definição do termo função no sentido de uma expressão analítica.

Johann Bernoulli e Leonhard Euler

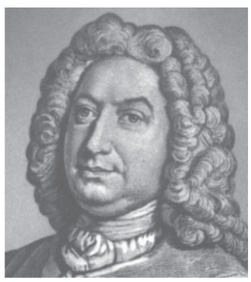

Figura 2 - Johann Bernoulli

Bernoulli[8] utilizou pela primeira vez a palavra função, segundo Yuoschkevitch (1976),

[4] Segundo Leibniz, "tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade" (apud BOYER, 1996, p.269).

[5] De acordo com Eves (2004), Isaac Barrow foi um homem de grande destaque acadêmico, alcançando projeção em Matemática, Física, Astronomia e Teologia. Ao renunciar à sua cátedra lucasiana em Cambridge, em 1669, indicou para substituí-lo o nome de um jovem e talentoso colega, Isaac Newton.

[6] Methodus fluxionum.

[7] Do latim summa.

[8] Conforme Eves (2004), Johann Bernoulli foi um dos primeiros matemáticos a perceber a importância do cálculo e a aplicá-lo na resolução de problemas.

em 1698, em um artigo dedicado à resolução de um problema proposto por seu irmão Jakob. Não há, na publicação, referência à definição do que foi chamado de função, mas, segundo o autor, dificilmente poderia referir-se a algo que não fosse uma expressão analítica. Em 1718, de acordo com Ponte (1992), Bernoulli publicou um artigo contendo a definição de função de uma variável como uma quantidade composta, de alguma forma, por uma variável e constantes.

No mesmo período, Leibniz introduziu os termos constante, variável, coordenadas e parâmetros e dividiu as funções e curvas em duas classes: as algébricas, que poderiam ser representadas por uma equação de certa ordem, e as transcendentais, que poderiam também ser objetos de estudos e cálculos de uma natureza diferente, por suas representações por equações de ordem indefinida ou infinita que transcendem as equações algébricas.

A ideia de relação funcional não é mencionada, porém, até o artigo escrito por Euler, discípulo de Bernoulli, em 1744, e publicado em 1748, no qual a análise matemática é referida como uma ciência geral de variáveis e suas funções.

A primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica, conforme Yuoschkevitch (1976), foi publicada em um artigo de Bernoulli, no qual ele propõe a letra grega φ como notação para a representação de uma função, ainda escrevendo sem o auxílio de parênteses, ou seja, φx. Os parênteses, assim como a letra f para designar uma função, são atribuídos a Euler, que os utilizou em uma publicação de 1740.

Euler[9] também foi o responsável pelos avanços seguintes mais significativos no desenvolvimento do conceito de função, detalhando o seu estudo de acordo com o padrão da análise matemática da época. Definiu uma constante como uma quantidade definitiva que assume sempre um e o mesmo valor, uma variável como um valor indeterminado ou universal que compreende todos os valores determinados e uma função de uma variável como uma expressão analítica composta por uma quantidade variável e números ou quantidades constantes.

De fato, a grande maioria das funções estudadas na época de Euler era analítica e enquadrava-se em sua definição, que foi aceita por muitos outros matemáticos do seu tempo. Entretanto, Euler sabia que funções de outros tipos também existiam e, segundo Ponte (1992), de acordo com a terminologia atual, sua definição incluía apenas as funções analíticas, um subconjunto do já pequeno conjunto das funções contínuas. Nas principais correntes matemáticas, entretanto, a relação da definição de função com expressões analíticas permanece estática até o século XVIII.

A controvérsia sobre as cordas vibrantes

A próxima grande discussão envolvendo a construção do conceito de função aconteceu em estudos na área da Física-Matemática, principalmente por meio dos trabalhos acerca do célebre problema sobre vibrações infinitamente pequenas em cordas homogêneas, finitas e com suas extremidades fixas. Jean-le-Rond D'Alembert (1717–1783), que, segundo Eves (2004), foi um dos pioneiros no estudo das equações diferenciais parciais, representou o problema das cordas vibrantes por uma equação desse tipo.

D'Alembert restringiu a classe de cordas admitidas, pois, sem essas restrições, segundo pensava, não seria possível construir a solução do problema através da análise matemática. Entre essas restrições, há o fato de assumir que a forma inicial da corda deve ser representada em toda a sua extensão por apenas uma equação, o que, na teoria de Euler, seria determinar que a corda é contínua.

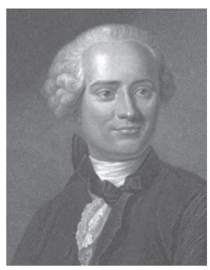

Figura 3 - D'Alembert

A terminologia de Euler, utilizada até meados do século XIX, segundo Yuoschkevitch (1976), determinava que continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da lei de formação da função em todo seu domínio. Já a

9 Segundo Anton (2000), Euler foi, provavelmente, o matemático mais prolífico que já apareceu, fazendo matemática tão facilmente quanto a maioria dos homens respira.

descontinuidade de uma função significava a mudança da lei de formação da função em dois ou mais intervalos do seu domínio. As funções descontínuas, segundo Euler, eram compostas de partes contínuas, sendo chamadas, por essa razão, de curvas mistas ou irregulares.

Começa então uma longa discussão sobre a natureza das funções aceitas nas condições iniciais. A controvérsia continua com o ingresso de um novo participante: Daniel Bernoulli (1700–1782). Bernoulli argumentou que tanto a forma arbitrária inicial da corda quanto suas vibrações subsequentes podiam ser representadas por uma série infinita de termos, incluindo senos e cossenos.

A controvérsia, entretanto, não acaba. Segundo Monna (1972), essa discussão tornou-se, de certa forma, confusa e não se tem ainda uma concepção clara sobre o problema.

A definição de Euler

Figura 4 - Euler

Como, de acordo com Euler, funções descontínuas não são, geralmente, analiticamente representáveis, suas definições iniciais de função tornaram-se obsoletas. Nesse sentido, segundo Yuoschkevitch (1976), Euler formula uma nova definição para o conceito de função compreendendo todas as classes de relações. Trata-se de uma abordagem utilizando uma noção que esteve sempre presente em seus textos, mesmo que não expressa explicitamente em seus métodos de introduzir função: a noção geral de correspondência entre pares de elementos, cada qual pertencendo ao seu próprio conjunto de valores de quantidades variáveis.

A ideia de relação foi, então, dada por Euler (apud YUOSCHKEVITCH, 1976) de uma maneira universal e abstrata em sua definição de função no prefácio de sua *Institutiones calculi differentialis*:

> Se algumas quantidades dependem de outras quantidades de forma que se essas são alteradas aquelas passam por mudanças, então, as quantidades que sofreram mudanças são chamadas de funções das outras. Essa denominação é de natureza ampla e abrange todos os métodos através dos quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, portanto, x denotar uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem, em qualquer forma, de x ou são determinadas por x, são chamadas de funções do mesmo. (p.70)

O conceito de função proposto por Euler influenciou positivamente todo o desenvolvimento da matemática a partir de então.

Apesar da oposição de D'Alembert, que apontava defeitos na definição de Euler, muitos matemáticos aderiram à sua ideia, como Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) e Pierre-Simon Laplace[10] (1749–1827).

Era necessária, entretanto, uma separação mais concreta entre as funções contínuas e descontínuas (no sentido atual das palavras). Segundo Euler, funções determinadas por uma expressão analítica em todo o seu domínio eram chamadas de contínuas, e essas eram as funções genuínas. Já as funções descontínuas ou arbitrárias (no sentido de Euler) não eram funções genuínas.

O século XIX

Figura 5 - Dirichlet

De acordo com Monna (1972), no século XIX houve muito progresso na construção do conceito de função, com contribuições principalmente dos trabalhos de Augustin-Louis

[10] Devido ao lançamento dos cinco volumes do *Traité de mécanique*, Laplace ganhou o cognome de "Newton da França" (EVES, 2004).

Cauchy (1789–1857), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).

A ideia de Euler das funções mistas foi criticada e foi provado que funções introduzidas por diferentes expressões analíticas em diferentes intervalos do seu domínio também podem ser representadas por apenas uma equação. Cauchy[11] faz sua crítica à definição de continuidade proposta por Euler e prova como são inadequadas as definições de funções contínuas e descontínuas de Euler a partir de um simples exemplo: $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Na concepção de Monna (1972), a questão notável é que Cauchy propôs, em seu *Résume des leçons à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal*, a definição de continuidade de uma função no sentido atual:

> Quando uma função f(x) admite um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença f(x + i) – f(x) sendo sempre uma quantidade infinitamente pequena, diz-se então que f(x) é uma função contínua de variável x entre os limites dados. (CAUCHY, 1823, apud MONNA, 1972, p.61)

Fourier também prestou importante contribuição para a evolução do conceito de função. Em seus estudos da teoria da propagação do calor, considerou a temperatura como uma função de duas variáveis: o tempo e o espaço. Nesses trabalhos, de acordo com Eves (2004), refutou a afirmação de Euler de que não era possível representar por uma série de termos contendo senos e cossenos de arcos múltiplos a figura inicial de uma corda definida por duas equações em dois diferentes intervalos do seu domínio. Ascende, então, a teoria geral das séries trigonométricas.

Dirichlet[12] posteriormente formulou as restrições necessárias, conhecidas como condições de Dirichlet, para que uma função seja passível de ser representada por uma série de Fourier, provando, portanto, que nem toda função, mesmo que contínua em um dado intervalo pode ser determinada por sua série trigonométrica, pois essa pode divergir em infinitos pontos. Entretanto, as séries de Fourier envolvem uma relação mais geral entre variáveis do que as estudadas até então.

Com a intenção de construir uma definição de função que englobasse essa forma de relação, Dirichlet, conforme Eves (2004) apresenta a seguinte formulação:

> Uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra um valor a y, então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada de *variável independente* e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada de *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (p.661. Grifos do autor)

Uma função torna-se então uma correspondência entre duas variáveis: todo valor da variável independente é associado a um e apenas um valor da variável dependente. De acordo com Boyer (1996), essa definição está próxima, do ponto de vista moderno, de uma correspondência entre dois conjuntos de números. Entretanto, os conceitos de conjunto e de número real ainda não haviam sido estabelecidos. Trata-se de uma definição ampla e que não restringe a relação que há entre *x* e *y* a uma forma qualquer de expressão analítica, acentuando a ideia de relação entre dois conjuntos de números.

De acordo com Ponte (1992), com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Georg Cantor (1845–1918), a noção de função continua sua evolução. No século XX, o conceito de função é estendido de maneira a incluir todas as correspondências arbitrárias, satisfazendo a condição da unicidade, entre conjuntos numéricos e não-numéricos.

[11] Segundo Boyer (1996), Cauchy foi a "estrela" matemática da década de 1820.

[12] Dirichlet, que tem seu cérebro preservado atualmente na Universidade de Göttingen, foi, conforme Eves (2004), um eminente matemático alemão e participou da fase inicial de deslocamento do centro das atividades matemáticas da França para a Alemanha.

O século XX

Os anos próximos a 1900, conforme Monna (1972), são interessantes no que diz respeito à evolução do conceito de função, principalmente porque, mesmo com a definição geral de função dada por Dirichlet, matemáticos como René Baire (1874–1932), Emile Borel (1871–1956) e Henri Leon Lebesgue (1875–1941) continuam a discussão acerca do tema.

Segundo Monna (1972), nos trabalhos desses matemáticos há discussões e polêmicas sobre o conceito de função e resquícios da antiga definição como uma expressão analítica. É importante ressaltar também que a teoria dos conjuntos de Cantor penetrava gradualmente na Matemática.

Dedekind já havia trazido à Matemática uma concepção completamente geral do conceito de função. Fugindo das concepções anteriores que se valiam apenas de funções reais, generalizou, de acordo com Dieudonné (1990), da seguinte forma:

> [...] sendo dados dois conjuntos quaisquer E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder a qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor em x é notado de modo geral f(x). Tomamos agora o hábito de escrever $x \mapsto f(x)$ para notar uma aplicação f, o que evita muitas vezes ter de introduzir uma nova letra, quando por exemplo se escreve $x \mapsto x^2$ para $x \in R$; utiliza-se também bastante na atual escrita das matemáticas as noções $f: E \to F$ ou para precisar o conjunto E onde está definida a função f e o conjunto F onde esta toma seus "valores". (p.149. Grifos do autor)

Posteriormente, conforme Dieudonné (1990), Cantor introduz a noção de produto cartesiano ExF de dois conjuntos quaisquer. Faz-se, então, a conexão da ideia de aplicação como um subconjunto de ExF.

Na concepção de Eves (2004), a teoria dos conjuntos levou à ampliação do conceito de função, abrangendo, nesse sentido, relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, desmistificando a ideia de que esses elementos devem ser necessariamente números.

Segundo Monna (1972), em 1939, no primeiro livro da série de Nicolas Bourbaki, *As estruturas fundamentais da análise, teoria dos conjuntos*, todas as questões acerca do que seria uma função são encerradas. Bourbaki dá a seguinte definição:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou uma relação funcional de E em F, se, para qualquer que seja x E, existe um, e somente um, elemento y de F que esteja na relação considerada com x.
>
> Denomina-se função a operação que associa a todo elemento de x E um elemento y F que se encontra na relação com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais são equivalentes se determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1939, apud MONNA, 1972, p.82)

O grupo Bourbaki foi criado em 14 de janeiro de 1935, em Paris, França, e a composição inicial incluiu sete jovens matemáticos franceses. O grupo teve grande influência na matemática francesa e mundial, mas a sua contribuição para o ensino da matemática é controversa. Os membros fundadores foram Henri Paul Cartan (1904–2008), Claude Chevalley (1909–1984), Jean Frédéric Auguste Delsarte (1903–1968), Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906–1992), Lucien Alexandre Charles René de Possel (1905–1974), André Weil (1906–1998). A pretensão do grupo era modernizar a matemática da época. Isso originou uma coleção de livros que foi denominada "Elementos de Matemática", com o último volume da coleção sendo publicado em 1998.

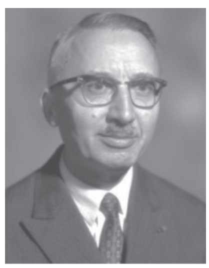

Figura 6 - Cartan

Finalmente, o conceito de função, fundamental no estudo da Matemática, conforme Eves (2004), passa a ser defendido por matemáticos como Félix Klein (1849–1925), desde as primeiras décadas do século XX, como princípio central e unificador dos cursos elementares de matemática. O conceito torna-se um guia natural para a construção de textos de matemática.

Considerações finais

Investigando a evolução histórica do conceito de função, fica evidente a importância das representações e o papel central que desempenharam em cada passo dado rumo ao seu conceito atual. Duval (2003) afirma, inclusive, que "é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático." (p.13).

Por meio da recapitulação da construção histórica do conceito de função, fica claro que o surgimento dessa ideia foi alicerçado pela introdução, na civilização babilônica, de representações tabulares de funções elementares para cálculos envolvendo o movimento dos planetas na esfera celeste. A primeira noção evidenciada de função, mesmo que ainda muito rudimentar e distante de um pensamento formal e abstrato, é relacionada, então, à utilização do registro de representação semiótica tabular.

Novos avanços relativos às representações precisaram ocorrer para elevar a matemática a um posto de destaque entre as ciências e também para que a ideia de relação funcional se desenvolvesse. Foram necessárias, então, contribuições como as de Oresme no estudo da intensidade das formas, desenvolvendo o registro de representação gráfico, abordando ideias sobre quantidades variáveis dependentes, para que o conceito de função se desenvolvesse na direção de uma ideia mais geral.

A construção desse conceito avançou quando houve o desenvolvimento da álgebra simbólica, fundamentada em contribuições como as de Diofanto e Viète no desenvolvimento do registro de representação algébrico. Com essa evolução em mais um registro de representação, ocorreu a introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos numéricos e como uma expressão analítica através de fórmulas.

Com os registros de representação tabular, gráfico e algébrico bem desenvolvidos, há, então, a partir das ideias de Descartes de aplicação da álgebra à geometria, o componente que levou o conceito de função a se desenvolver mais rapidamente e a alcançar o cerne de toda a Matemática atual. A partir das ideias e inovações de Descartes, foi possível desenvolver-se, então, o estudo do cálculo diferencial e integral, da análise matemática e de outros campos fundamentais para o desenvolvimento da ciência moderna.

Analisando, cuidadosamente, a grande contribuição de Descartes, que foi fundamental para os estudos de cientistas como Newton e Leibniz, entre outros, percebe-se que nasceu, nessa inovação, a rotina de construir transformações de objetos matemáticos entre diferentes registros de representação semiótica. As transformações propostas por Descartes consistiam em converter a representação de objetos matemáticos do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico, assim como no sentido inverso. Com a ideia da geometria analítica, surge, então, a prática da transformação denominada atualmente por Duval de conversão.

Duval (2003) afirma, inclusive, que no estudo da Matemática, diferentemente de outras ciências baseadas na experimentação e observação, é essencial que o aluno aprenda a reconhecer um objeto de estudo através de múltiplas representações que, por sua vez, podem ser feitas em diferentes registros de representação. Segundo o autor, a utilização de ao menos dois registros de representação simultaneamente é a única possibilidade para não se confundir o objeto de estudo com o conteúdo de uma representação. Ressalta, também, que o desenvolvimento dessa habilidade é fundamental para que o aluno possa, de forma independente, transferir ou modificar formulações e representações de informações durante a resolução de um problema.

Nesse sentido, evidenciando-se o papel das representações na construção do conceito de função e a sua importância no processo de construção do conhecimento matemático escolar, destaca-se a necessidade de se explorar cada uma dessas representações para se alcançar uma aprendizagem efetiva e para que a construção do conceito de função seja sólida e que, como consequência, o pensamento funcional, caracterizado como a capacidade de pensar por intermédio de relações, seja desenvolvido.

Assim, nessa reconstrução do caminho percorrido para se chegar à ideia atual do conceito de função, enfatizando o desenvolvimento dos registros de representação semiótica, fica evidente que a história pode ser um auxiliar efetivo para se entender a construção de um conceito e também as dificuldades que devem ser superadas no seu processo de ensino-aprendizagem.

Referências

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2005.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da Matemática Contemporânea**. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n.61, p.103-131, 2006.

ELIA, Ilíada; SPYROU, Panayotis. How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. **The Montana Mathematics Enthusiast**, v.3, n.2, p.256-272, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

MONNA, A. F. The concept of functions in the 19th and 20th Centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Archive for History of Exact Science**, v.9, p.57-84, 1972.

PONTE, João Pedro. The history of the concept of function and some educational implications. **Mathematics Educator**, v.3, n.2, p.3-8, 1992.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre o tema função**: uma investigação das praxeologias. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th Century. Archive for History of Exact Sciences, v.16, n.1, p.37-85, 1976.

Rafael Winicius da Silva Bueno – Mestre, chefe do departamento de ensino de Matemática e diretor do Instituto Padre Reus. E-mail: rafbueno@terra.com.br. – Endereço para correspondência: Rua Ernesto Alves, 1087, 96810-912 – Santa Cruz do Sul/RS. Fone: (51) 3711.4000.

Lori Viali – Doutor, professor titular da Faculdade de Matemática da PUCRS. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS. Professor Adjunto do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Endereço para correspondência: Av. Ipiranga, 6681, 90619-900, Porto Alegre, RS. Fone: (51) 3353.7708. E-mail: viali@pucrs.br

RECEBIDO em: 25/08/2009
CONCLUÍDO em: 31/10/2009