TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA: EXEMPLOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Didactic Transposition: Examples in Mathematics Education

José Carlos Pinto Leivas
Helena Noronha Cury

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns conceitos oriundos da Didática Francesa como um campo do saber e como uma área em que o principal objetivo é o ensinar. Trataremos mais diretamente da transposição didática definida por Chevallard, considerando que um dos problemas do ensino está no distanciamento entre os conteúdos abordados, a realidade em que vive o aluno e a origem do conhecimento a ensinar. Na transformação de um objeto de saber a ensinar em objeto de ensino, surgem as criações didáticas, as quais são geradas pelas necessidades do ensino, e este nosso trabalho consiste em detalhar dois exemplos citados por Chevallard sobre tais criações. No primeiro, temos o "grande cosseno" e o "grande seno", os quais foram utilizados na escola básica francesa e que, entretanto, não têm paralelo no ensino brasileiro, mas cuja origem do conhecimento bruto pode trazer contribuição para a formação do professor de Matemática. No segundo exemplo, detalhamos uma segunda criação didática citada por Chevallard que é o conceito de distância entre dois pontos, e para tal utilizamos a métrica euclidiana e uma não euclidiana.

Palavras-chave: Transposição didática. Criação didática. Grande cosseno e grande seno. Distâncias.

Abstract

This paper presents some concepts from the French Didactic, more specifically the didactic transposition, defined by Chevallard, considering that one of the problems of education is the distance between the discussed topics, the reality in which the student lives and the source of knowledge to teach. In the transformation of an object of knowledge in a teaching object, emerge didactic creations, which are generated by the needs of education. In this paper, we detail two examples of such creations, quoted by Chevallard. At first, we have the "great cosine" and "great sine", terms that were used in Elementary French School and, however, have no parallel in Brazilian education, but whose origin can bring a contribution to the mathematics teacher education. In the second example, we detail another didactic creation, also mentioned by Chevallard, which is the concept of distance between two points, and for this we use the Euclidean metric and a non euclidean one.

Keywords: Didactic transposition. Didactical creations. Great cosine and great sine. Distance.

Introdução

A Matemática, ao longo dos séculos, tem se defrontado com algumas tentativas de inovação em seu ensino, algumas das quais foram bem aceitas e produziram resultados positivos para a aprendizagem, outras, nem tanto; algumas foram rejeitadas momentaneamente, e outras, definitivamente.

Schubring (1999), ao tratar sobre reformas curriculares, por exemplo, afirma que elas não são recentes e destaca o papel desempenhado na Alemanha por Félix Klein (1849–1925), tendo esse matemático idealizado reformas a partir das universidades, seguidas por renovações no nível médio em escolas técnicas.

Sendo a Matemática considerada uma área "dura" do conhecimento, as tentativas de mudança no seu ensino esbarram, algumas vezes, em oponentes às propostas, como, por exemplo, o que ocorreu a partir da década de 50 nos Estados Unidos com o grupo *School Mathematics Study Group* (SMSG), empenhado, em particular, na renovação do ensino de Geometria. Nessa época, foi editado um texto denominado *Geometry*, escrito por Edwin E. Moise e Floyd L. Downs Jr, utilizando recomendações de comissões sobre Matemática e seu ensino, o que era um dos objetivos do grupo SMSG. Essa obra, de certa forma resultado do movimento Matemática Moderna, teve seus reflexos no Brasil, na década de 70 do século XX.

A partir dos resultados negativos oriundos do movimento da Matemática Moderna surgiram nos Estados Unidos alguns movimentos buscando um retorno ao ensino tradicional, e outros buscando métodos de ensino e de conteúdos alternativos. Entre as publicações americanas que têm influenciado as mudanças curriculares brasileiras, estão o Curriculum and Evaluation Standards, lançado originalmente em 1989. Kilpatrick, membro atuante do *National Council of Teachers of Mathematics* americano (NCTM), em palestra realizada em um evento realizado em Portugal, em 2008, questiona se os *Standards* ou normas para a Matemática escolar nos Estados Unidos constituíram uma reforma ou uma nova reforma, pois as pretendidas mudanças não ocorreram naquele país ou, pelo menos, ocorreram de forma diferente do que previam seus promotores. Ele justifica que apenas 10% dos professores foram envolvidos em tais reformas e que sempre houve muitas reações a mudanças em seu país.

Nos anos seguintes à introdução da Matemática Moderna na França, alguns matemáticos, psicólogos e educadores matemáticos criaram os *Instituts de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques* (IREM), ou seja, Institutos de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática. Entre os mais conceituados pesquisadores desses institutos está Yves Chevallard, do IREM de Aix-Marseille, e muitas de suas ideias e conceituações são mencionadas em livros da área de Educação Matemática sem que saibamos, efetivamente, o significado das expressões por ele criadas.

Neste texto, vamos explorar a noção de "transposição didática" e trazer alguns exemplos propostos por Chevallard, detalhando os passos de transformação do saber matemático.

Transposição didática

Para falar de conceitos oriundos da chamada Didática Francesa, é necessário, primeiramente, conceituar esse campo do saber. De maneira geral, a Didática tem sido entendida como a ciência e a arte de ensinar. No entanto, alguns autores especificam esse conceito amplo, como, por exemplo, Martins (1988), que considera ser a Didática "a direção da aprendizagem numa perspectiva multidimensional onde se articulam harmoniosamente as dimensões humana, técnica e político-social." (p.63). Diferencia-se da Metodologia do Ensino, que é "o conjunto de métodos e técnicas que são utilizados a fim de que o processo ensino-aprendizagem se realize com êxito." (p.184).

Já D'Amore (2007) discute várias definições de Didática, para em seguida fixar-se na Didática da Matemática, afirmando, inicialmente, que essa é uma disciplina autônoma, "nem Didática geral, nem Matemática" (p.29). O autor considera que hoje a Didática da Matemática pode ser vista de duas maneiras: "como divulgação de ideias, fixando a atenção na fase do ensino", que ele chama de Didática A, e "como pesquisa empírica, fixando a atenção na fase de aprendizagem", a Didática B. (Ibid., p.37).

Pais (2001) preocupa-se em distinguir entre as expressões "Educação Matemática" e "Didática da Matemática". Segundo ele, no contexto brasileiro, pode-se dizer que

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (p.11)

Entretanto, apresentando o objetivo de seu livro, o autor afirma que vai analisar a "linha francesa da didática da matemática, procurando destacar uma de suas características principais: a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas." (PAIS, 2001, p.9). É nesse contexto que se situa o conceito de "transposição didática" que vamos apresentar nesse texto.

Um dos problemas do ensino de conteúdos matemáticos é o distanciamento entre o conteúdo abordado, a realidade do aluno e as origens do conhecimento em questão. A apresentação axiomática parece simplificar o ensino, pois os conteúdos são articulados em uma sequência rígida, em que toda nova definição depende das anteriores, todo teorema exige que já esteja aceito certo número de axiomas e demonstradas as proposições das quais ele depende.

De certa forma, talvez por ser a axiomática euclidiana o modelo para o ensino de Matemática por tantos séculos, esse tipo de apresentação é considerado pelo professor como o mais fácil, pois lhe dá a sensação do "dever cumprido", tendo mostrado a construção de um determinado saber sábio. No entanto, muitas vezes esse professor esquece que Euclides organizou os ensinamentos de sua época, cientificamente, e que apresentações desse tipo sempre são feitas *a posteriori*, depois que um determinado conhecimento já foi trabalhado sob vários enfoques e transformou-se em um *saber a ensinar*.

Brousseau (1986) critica a apresentação axiomática, comentando que "ela esconde completamente a história desses saberes, isto é, a sucessão de dificuldades e questões que provocaram a aparição dos conceitos fundamentais, seu uso para colocar novos problemas, a usurpação de técnicas e de questões nascidas do progresso de outros setores." (p.36). Esses procedimentos não são exclusivos da Matemática, pois, para qualquer *saber a ser ensinado*, há uma transformação que procura adequá-lo à compreensão daqueles aos quais vai ser apresentado. Esse processo tem sido denominado "transposição didática", e Chevallard (1985) traz várias conceituações para explicar suas ideias.

Um dos principais conceitos apontados por Chevallard (1985) é o de "noosfera", a que ele chega a partir de considerações sobre o sistema de ensino e sobre o ambiente mais amplo, que engloba esse sistema e do qual fazem parte os pais, os matemáticos e os representantes das instâncias políticas e administrativas, debatendo propostas. Assim, resumindo, diz o autor que

> [...] estamos aqui na esfera onde se pensa – segundo modalidades talvez muito diferentes – o funcionamento didático. [...] Na noosfera, pois, os representantes do sistema de ensino, com ou sem mandato (desde o diretor até o professor militante), se encontram, direta ou indiretamente [...] com os representantes da sociedade. (CHEVALLARD, 1985, p.23-24. Grifos do autor)

Chevallard (1985) representa o conceito de noosfera por meio de um esquema, adaptado na Figura 1, a seguir:

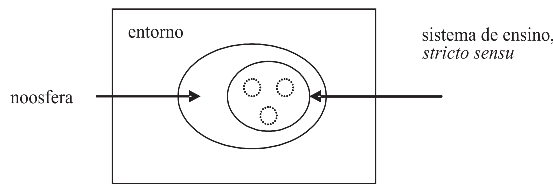


Figura 1: representação da noosfera[1].

Para Chevallard (1985, p.39), "*Todo projeto social de ensino e de aprendizagem* se constitui dialeticamente com a identificação e a *designação de conteúdos de saberes como conteúdos a ensinar*." (Grifos do autor). E, em seguida, o autor acrescenta:

> Os conteúdos de saberes designados como aqueles a ensinar (explicitamente: nos *programas*; implicitamente: pelo representante da tradição, evolutiva, da interpretação dos programas), em geral *pré-existem* ao movimento que os designa como tais. Entretanto, algumas vezes (e pelo menos mais frequentemente do que se poderia acreditar) são verdadeiras *criações didáticas*, suscitadas pela 'necessidades de ensino'. (Assim ocorreu, por exemplo, no ensino secundário francês, com ´grande cosseno` e ´grande seno`). (CHEVALLARD, 1985, p.39. Grifos do autor)

[1] Adaptado de Chevallard (1985, p.23).

Esses preâmbulos permitem, então, que Chevallard (1985, p.39), construa sua definição de "transposição didática":

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre desde então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar o seu lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática. (p.39. Grifos do autor)

Pensando especificamente no trabalho do professor, Perrenoud (1993) considera que:

> Ensinar é, antes de mais, *fabricar artesanalmente os saberes*, tornando-os ensináveis, exercitáveis e passíveis de avaliação no quadro de uma turma, de um ano, de um horário, de um sistema de comunicação e trabalho. É o que Chevallard [...] designa por *transposição didáctica*. (p.25. Grifos do autor)

No entanto, ao sofrer tais adaptações, o *saber sábio*, aquele que é produzido originalmente pelo cientista, é "exilado" de suas origens; a história de sua produção é escamoteada para os estudantes, e ele se apresenta como um saber neutro, sem ligação com quaisquer necessidades humanas ou jogos de poder.

Chevallard (1985) menciona as criações didáticas, geradas pelas necessidades do ensino, exemplificando com as expressões "grande cosseno" e "grande seno", que não têm paralelo no ensino brasileiro. Mas o que são essas expressões, efetivamente?

No boletim *Excursus*, da Universidade de Provence, campus de Aix-Marseille, sob responsabilidade de Chevallard, respondendo a perguntas de leitores (possivelmente alunos da instituição) esse autor explica que foi em torno de 1970 (no auge da influência da Matemática Moderna) que eram usadas as notações *Cos* e *Sen* (com letra maiúscula, de onde, então, as expressões "grande cosseno" e "grande seno"), para as funções trigonométricas de um ângulo, e as notações em letra minúscula, *cos* e *sen*, para as funções trigonométricas de valores reais. Segundo o autor, a passagem de uma para outra notação era estabelecida formalmente da seguinte maneira: se t é um número real que "mede" o ângulo θ, então cos t = Cos θ e sent = Senθ. (CHEVALLARD, 2004).

Ora, evidentemente essa criação didática mais atrapalha do que auxilia a aprendizagem! Consideramos que há, efetivamente, transposições didáticas que são necessárias e que têm sido usadas ao longo dos anos, em qualquer nível de ensino. No entanto, é necessário entender de onde vem o *saber a ensinar*, qual o *saber sábio* que lhe deu origem, para que os conteúdos não fiquem "picoteados" e apenas fórmulas mágicas sejam oferecidas aos estudantes.

Chevallard (1985) discute em profundidade se a transposição didática é boa ou má, se todo *objeto de saber a ensinar* pode ser um *objeto de ensino*, se há ou não resistência aos conceitos apresentados em sua visão da Didática da Matemática. No entanto, parece-nos que há ainda um outro ponto a mencionar: ao empregar criações didáticas que, supostamente, auxiliam o ensino de um determinado conteúdo, as dificuldades do professor são minimizadas. E as dos alunos?

Talvez por trás dessa questão esteja outra de caráter mais polêmico: por que os alunos (e também o professor!) se acomodam com aquele *objeto de ensino*? Por não saber que houve uma transposição? Por não ter informações anteriores sobre o *saber sábio*? Essas são questões que poderiam ser melhor aprofundadas em pesquisas sobre o tema.

Pais (2001) comenta que os conteúdos escolares são, muitas vezes, escolhidos pelos professores a partir dos programas ou dos livros didáticos. Em alguns casos, esses conteúdos são meras criações didáticas, adequadas aos propósitos do processo de ensino, mas, conforme o autor,

> [...] o problema surge quando sua utilização acontece de forma desvinculada de sua finalidade principal. É o caso dos produtos notáveis que, quando ensinados sem um contexto significativo, passam a figurar apenas como o objeto de ensino em si mesmo. (PAIS, 2001, p.20)

Não poderíamos pensar, talvez, em mostrar ao professor o saber em "estado bruto" e solicitar que ele faça a transposição de acordo com as necessidades e possibilidades de seus alunos? Em um primeiro momento, essa proposta pode parecer complicada, pois há *saberes sábios* que, se não forem *transpostos* para uma linguagem mais acessível, ficam restritos a uma minoria de especialistas, em geral, professores universitários. No entanto, talvez possamos fazer com que o professor se envolva também no processo de transformar o saber científico no saber a ser ensinado, ainda que o *objeto de ensino*, no fim das contas, apresente-se um pouco diferente do que os autores dos livros-texto apresentam.

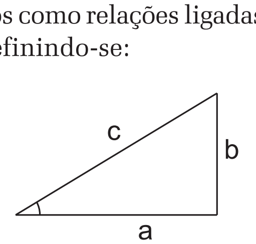
Exemplos de criações e transposições didáticas

Chevallard (1985) considera que

> Os conteúdos de saber designados como estando a *ensinar* [...] em geral pré-existem ao movimento que os indica como tais. Algumas vezes, entretanto [...] são verdadeiras *criações didáticas*, suscitadas pelas ´necessidades de ensino`. (Foi o caso, por exemplo, no ensino secundário francês, do ´grande cosseno` e do ´grande seno`). (p.39. Grifos do autor)

O que seriam, então, essas criações didáticas? Significariam "monstros cossenos" e "monstros senos"? A seguir, tentamos explicitar nossa compreensão do tema, a partir da explicação encontrada em Chevallard (2004), já citada.

Originalmente, podem-se interpretar senos e cossenos como relações ligadas ao triângulo retângulo, definindo-se:



$\cos\theta = \frac{a}{c}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c}$, em que θ é o ângulo assinalado.

Figura 2: triângulo retângulo.

Ao falar em definir, há um questionamento sobre a diferença entre as palavras "definir" e "conceituar". Segundo Ferreira (1999), um dos significados de "definir" é: "Enunciar os atributos essenciais e específicos de (uma coisa), de modo que a torne inconfundível de outra." (p.614). Bueno (1981) considera que uma definição é uma distinção, uma enunciação de qualidades e de características do que se está a definir.

Já "conceituar", segundo Ferreira (1999), significa: "Formar conceito acerca de; julgar, avaliar." (p.518). Assim, aqui estamos, efetivamente, tratando de definições, e a de cosseno é baseada na propriedade geométrica da proporcionalidade tratada por Tales de Mileto (LEIVAS, 2006).

Por argumentações geométricas, Tales deduziu, considerando-se triângulos como os representados abaixo, que: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = k$, ou seja, a relação é uma constante que independe do triângulo considerado. Depende, isto sim, do ângulo. A relação constante é denominada cosseno do ângulo em questão.

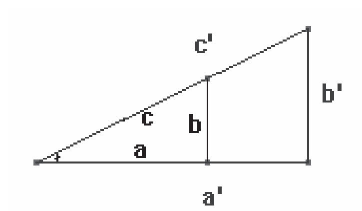


Figura 3: triângulos retângulos com lados proporcionais.

Há uma discussão sobre a denominação e propriedades na definição de funções trigonométricas. A trigonometria do triângulo retângulo tem uma deficiência que é não poder ser definida para ângulos obtusos. É preciso, assim, ampliar as ideias de seno e cosseno para ângulos quaisquer e não apenas agudos, e a partir do triângulo retângulo. Para tal, buscam-se as proporções associadas ao círculo e circunferência. Considere duas circunferências concêntricas de raios r e r', conforme figura 4, e nelas dois raios formando um ângulo θ, limitado pelos arcos s e s', respectivamente, das circunferências de raios r e r'.

A razão $\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$, da mesma forma que nas relações anteriores, é um invariante que depende exclusivamente do ângulo θ. Este invariante é o que se denomina de "medida do ângulo" e, como é uma relação entre duas grandezas de mesma dimensão, é um número adimensional. Assim, a medida de um ângulo é um número real e recebe o nome de radiano.

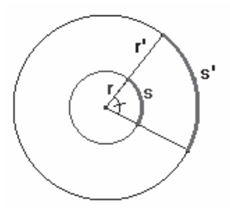


Figura 4: radiano.

Em lugar de s e s', na relação anterior, usando, respectivamente, o comprimento da circunferência menor C e da maior C', obtém-se: $\frac{C}{r}=\frac{C'}{r'} \Leftrightarrow \frac{C}{2r}=\frac{C'}{2r'}=k$, em que a constante k passa a ser o número irracional π.

A discussão ou dificuldade didática de obtenção das funções trigonométricas para ângulos obtusos precisa ser enfrentada. Para tal, estendem-se as definições ao círculo trigonométrico, e uma maneira de fazer isso é utilizar coordenadas cartesianas no plano, primeiramente reinterpretando-se o caso já conhecido e posteriormente generalizando-se.

Para a reinterpretação, constrói-se um triângulo retângulo da seguinte forma: um dos catetos é colocado sobre o eixo horizontal, tendo uma extremidade na origem do sistema cartesiano, e correspondendo a um dos vértices associado a um dos ângulos agudos, e a outra extremidade correspondendo ao vértice associado ao ângulo reto. O terceiro vértice corresponde a um ponto da circunferência trigonométrica determinado pela extremidade do segundo cateto.

Considera-se a unidade no sistema como sendo o raio da circunferência construída. O vértice, na circunferência, é associado ao par ordenado P=(a,b), e, usando a definição anterior, escreve-se, para a Figura 5:

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad e \quad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{r}$$

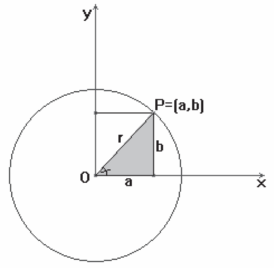


Figura 5: triângulo acutângulo.

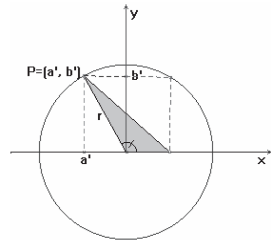


Figura 6: triângulo obtusângulo.

Para a Figura 6, tem-se:

$$\cos\theta = \frac{a'}{r} < 0 \quad e \quad \text{sen}\theta = \frac{b'}{r} > 0$$

Na sequência elaborada, há de se discutir a questão epistemológica envolvida, que é útil e interessante ao professor e que, no entanto, deve ser analisada quanto a sua adequação para levá-la ao ambiente da escola dessa forma.

Outra interessante relação pode ser estabelecida, a partir de então, sobre cosseno de um ângulo e cosseno de um número real. Nessa situação, é necessário tratar das funções trigonométricas cujas imagens são esses números. Falar na função cosseno e na função seno só tem sentido se o valor correspondente no domínio for um número real e não um valor dado em unidades 'graus'. Não faz sentido, nessa situação, utilizar $\cos 180^0$, e sim $\cos\pi$.

Observe-se ainda que, antes do advento das calculadoras e dos computadores, para o cálculo de valores trigonométricos, que constituíam as tabelas trigonométricas, havia interesse no desenvolvimento em séries das funções trigonométricas. Assim,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

Por ser definida como f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, tem-se x $\in$ **R**, isto é, x é dado em radianos e não em graus.

Resumindo, define-se cosseno e seno de ângulos agudos explorando o triângulo retângulo, passa-se a outros ângulos obtusos e, posteriormente, ao tratado com números reais. Os matemáticos querem ir além, e por isso definem também essas funções no campo dos números complexos RXR = {(a,b) | z=a+bi, em que a,b$\in$ **R** e i= $\sqrt{-1}$ }. Note-se que, para b=0, tem-se z=a $\in$ R, isto é, um número real pode ser pensado com um par (a,0).

Uma outra abordagem ou conexão que pode ser estabelecida é a denominada fórmula de Euler, que expressa cosseno e seno em termos de números complexos, fazendo uma reinterpretação que necessita da construção básica inicial.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Reescrevendo-se as duas igualdades acima da seguinte maneira

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad isen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

podem-se reduzir termos semelhantes e obter a expressão $\cos\theta + isen\theta = e^{i\theta}$, em que, substituindo valores para θ, obtém-se a igualdade que produz números que são essenciais para a matemática, a saber:

Para θ=π $\Rightarrow\ -1 = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$;

Para θ=0, tem-se $1 = e^{i.0} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i0} - 1 = 0$;

Para θ=$\frac{\pi}{2}$, tem-se $isen\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

O que foi mostrado antes é um exemplo do que se considera uma criação didática, e o trabalho de Chevallard (1985) é interessante por apresentar exemplos, ainda que pouco explorados. Outro exemplo abordado por ele é o das distâncias, detalhado a seguir.

O autor considera que a transposição didática *lato sensu* pode ser representada pelo esquema "objeto de saber ➔ objeto a ensinar ➔ objeto de ensino". Para exemplificar esse movimento representado pelo esquema, Chevallard (1985) considera:

> - a noção de *distância* (entre dois pontos) é utilizada espontaneamente 'desde sempre';
> - o *conceito matemático* de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
> - no primeiro ciclo do ensino secundário francês, a noção matemática de distância, surgida a partir da definição de Fréchet, aparece em 1971 no programa da classe do quarto ano[2] (objeto a ensinar).
> - seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o 'trabalho` de transposição. (p.40)

No que segue, esclarecemos um pouco mais a respeito do conceito matemático de distância e a exemplificação da relação estabelecida por Chevallard (1985):

(1) ➔ objeto a ensinar (2) ➔ objeto de ensino (3)

(1) noção de distância entre dois pontos é um conceito utilizado empiricamente desde cedo nas atividades humanas quotidianas. Ela corresponde a um número real não negativo, simbolizado por d = d(P,Q), em que P e Q são os dois pontos quaisquer de um espaço[3], ou na forma geométrica e, segundo Chevallard (1985, p.46) "seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o *trabalho de transposição*."

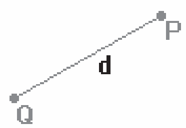


Figura 7: representação geométrica da distância entre dois pontos em espaços euclidianos com a métrica usual.

(2) o objeto a ensinar, metaforicamente é "a sopa em receita". A noção empírica de distância traz alguns itens que devem ser selecionados. Define-se métrica como sendo a função que associa a cada dois pontos P e Q um número real, não negativo, denotado por d(P,Q), denominado de distância entre os pontos P e Q, satisfazendo às seguintes condições:

i) $d(P,Q) \geq 0$ e $d(P,Q)=0$ se e somente se $P=Q$;

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$;

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q);\ \forall P, Q, R$.

Na Figura 8, pode-se visualizar a condição iii no caso da métrica[4] euclidiana.

---

[2] "[...] classe de quatrième".

[3] Que pode ser R, R^2, R^3 ou espaços discretos, por exemplo.

[4] No que segue, definiremos duas métricas equivalentes no plano, que têm uma interpretação geométrica que nos interessa, embora exista uma terceira, que não serve aos nossos

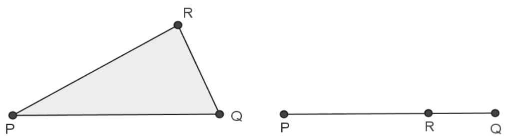


Figura 8: a desigualdade triangular na métrica euclidiana.

No trocadilho feito acima, está aí a 'receita da sopa'.

(3) O objeto de ensino é a 'sopa pronta'. Voltemos ao empírico.

Os objetos matemáticos são abstratos, e por isso esses objetos admitem reinterpretações, o que dá riqueza ao seu conceito. As reinterpretações tornam-se concretas e vão ser ensinadas, tornando-se o objeto de ensino.

Retornando a Fréchet e à reinterpretação que originará as criações didáticas, temos

distâncias → distância euclidiana
distâncias → outras distâncias

Sendo P = (x_1,y_1) e Q = (x_2,y_2) dois pontos quaisquer, dados por suas coordenadas no plano cartesiano, definem-se as distância abaixo:

$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, denominada distância euclididana;

$d(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, denominada distância dos catetos.

A primeira é a usualmente utilizada e descreve a 'linha reta', dada pelo segmento de reta entre os dois pontos considerados, conforme a primeira figura abaixo. A segunda, embora não seja a usualmente utilizada no percurso acadêmico, é a que se usa ao descrever trajetórias numa cidade perfeitamente organizada em quadras retangulares, dando inclusive origem à denominada Geometria do Taxista. A figura 9, a seguir, ilustra as distâncias entre os pontos P e Q nas duas formas.

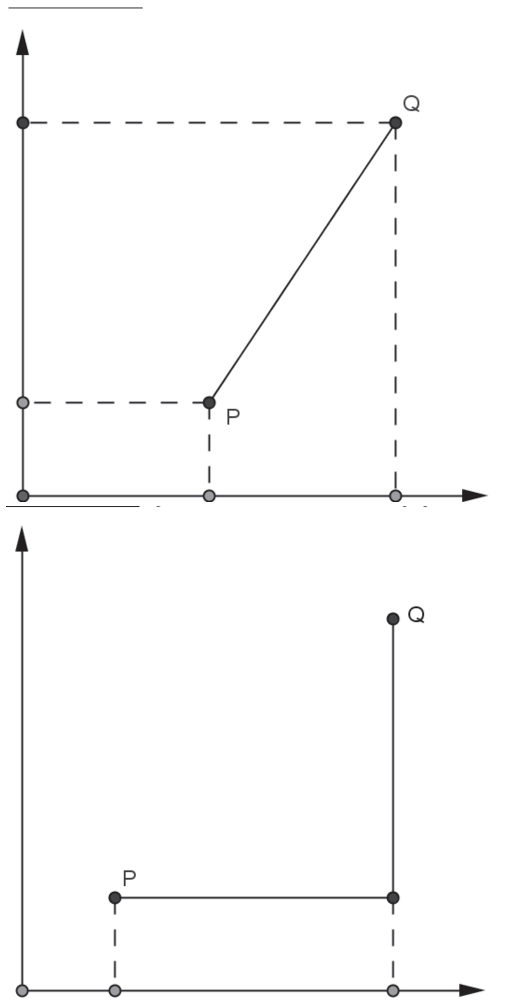


Figura 9: distância nas duas métricas – euclidiana e dos catetos.

Pode-se dizer que se volta ao concreto de diversas formas. Na escola, muitas vezes, fica-se apenas com o concreto e não se estabelecem correlações entre os conceitos matemáticos. Exemplificando esse fato, temos, associado aos conceitos de funções distâncias (métricas), o de circunferência. Lembrando o conceito de circunferência, lugar geométrico dos pontos P que estão a uma mesma distância de um ponto fixo Q , tem-se o objeto geométrico nas duas métricas acima, respectivamente, da seguinte forma:

propósitos no momento.

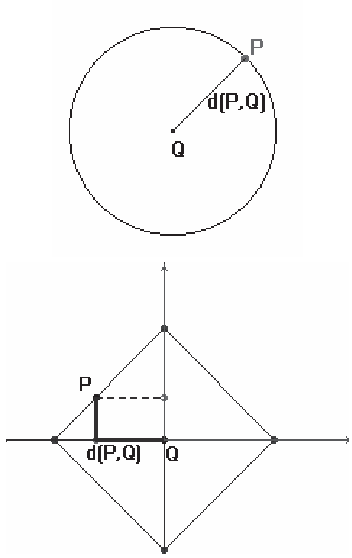


Figura 10: circunferência nas duas métricas – euclidiana e dos catetos.

Há também que se observar que essas não são as únicas duas maneiras de definir distâncias, mas são as que escolhemos para ilustrar a representação geométrica. Daí se pode concluir que a circunferência é um conceito matemático que se concretiza de diversas maneiras – objetos. Em Leivas (2009), encontram-se os detalhes da construção de uma bola quadrada a partir da métrica dos catetos, o que pode ser desenvolvido num curso de Geometria Analítica do Plano no ensino médio.

Outra questão a observar é que outros objetos da Geometria oriundos da noção de distância, como elipses e hipérboles, têm representações distintas. Por fim, outro exemplo para discutir se é conceito ou objeto é o número π. Como ele representa o quociente entre as medidas da circunferência e do diâmetro, obtém-se 3,1415..., sendo assim um valor circunstancial – um conceito. De outra forma, ao obter a relação utilizando-se a segunda métrica, tem-se o valor quatro – um objeto.

Conclusão

Modernismos e inovações no ensino são conhecidos ao longo da história, e alguns deles acabam caindo no esquecimento ou simplesmente rejeitados. As expressões "grande seno" e "grande cosseno" são ideias que foram esquecidas no ensino francês de Matemática. No entanto, a partir dessas ideias, e aproveitando a menção feita a elas por Chevallard (1985), exploramos as definições de seno e cosseno e mostramos como se pode passar de um *objeto de saber* a um *objeto de ensino*, à luz da transposição didática conceituada por esse autor.

Com isso, foi possível discutir conceitos matemáticos que nem sempre são estudados pelos professores da educação básica, mas que são necessários para aqueles que lidam com o ensino de Trigonometria. Esperamos, assim, ter contribuído com o professor e o futuro professor de Matemática, especialmente no esclarecimento de pressupostos históricos e teóricos do conhecimento matemático.

Referências

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.7, n.2, pp.33-115, 1986.

BUENO, F. da S. **Dicionário escolar da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: FENAME, 1981.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

______. **Excursus sur l´enseignement des mathématiques**: le forum des questions. n.3, 15 juin. 2004. Disponível em:

<http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/textes/excursus_3.doc>. Acesso em: 15 ago. 2009.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo Aurélio Século XXI**: o dicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

LEIVAS, J. C. P. Tales: mil e uma utilidades. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v.20/21, p.69-76, 2006.

______. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, 2009.

MARTINS, J. do P. **Didática geral**: fundamentos, planejamento, metodologia, avaliação. 2.ed. São Paulo: Atlas, 1988.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte; Autêntica, 2001.

PERRENOUD, P. **Práticas pedagógicas, profissão docente e formação**: perspectivas sociológicas. Lisboa: Edições Dom Quixote, 1993.

SCHUBRING, Gert. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. **Zetetiké**, v.7, n.11, p.29-50, 1999.

José Carlos Pinto Leivas – Doutor em Educação (Matemática), professor titular aposentado da FURG e professor adjunto da ULBRA. leivasjc@yahoo.com.br

Helena Noronha Cury – Doutora em Educação, professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática da UNIFRA. curyhn@unifra.br

RECEBIDO em: 01/08/2009
CONCLUÍDO em: 06/10/2009