TRABALHANDO VOLUME DE CILINDROS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Working on Cylinder Volume Through Problem Solving

Lourdes de la Rosa Onuchic
Norma Suely Gomes Allevato

Resumo

O objetivo do presente artigo é apresentar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como metodologia para o trabalho em sala de aula. Analisamos uma experiência realizada com professores em formação inicial e em exercício, em que o tópico matemático era a Geometria, especificamente o cálculo do volume de cilindros. Um minicurso foi ministrado aos professores, que realizaram atividades do mesmo modo que consideramos que a metodologia de ensino deveria ser implementada por eles, com seus alunos, em aulas de Matemática. A ideia era a de resolver um problema que foi proposto aos participantes pelas autoras deste artigo, partindo da constatação, a partir da manipulação de uma experiência concreta, para, em seguida, promover uma discussão e reflexões sobre o conteúdo e, somente ao final do trabalho, chegar à formalização da nova matemática construída. Os professores participantes puderam vivenciar essa forma de trabalho docente, em que os problemas são ponto de partida para a introdução de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos em aula.

Palavras-chave: Ensino médio. Resolução de problemas. Metodologia de ensino. Geometria.

Abstract

The objective of this article is to present the "Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Solving Problems" as a work methodology proposed for the classroom. In it we analyzed an experience done with pre-service and in-service teachers, where the worked topic was Geometry, and specifically the cylinder's volume calculation. A course was furnished to the teachers who did activities in the same way it would be treated in that learning methodology which would be implemented by them, with their learners during the math lessons. The idea was to solve a problem proposed to the participants under the guide of the authors of this article, going from the confirmation acquired from a concrete experienced manipulation, promoting reflections and a real discussion about new contents. Only at the work end, the authors could go to a correct mathematical formalization of the constructed new math. Then, we believe, the participant teachers could live that kind of teaching work, where the problems are the start point for the introduction of new concepts and new mathematical contents in their classrooms.

Keywords: High School. Problem Solving. Teaching-Learning-Assessment Methodology. Geometry.

Introdução

Este artigo relata o sucedido durante um minicurso oferecido para professores e futuros professores que buscavam recursos para uma nova forma de trabalhar matemática em suas salas de aula. Fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, um problema envolvendo o cálculo do volume de cilindros permitiu rever e construir novos conhecimentos de Matemática com compreensão e significado.

A resolução de problemas como metodologia de ensino

Para Van de Walle (2001), muitas vezes se fala em trabalhar com problemas para ensinar matemática sem se ter uma ideia clara do que é um problema. Há muitas diferentes concepções de problema. Para nós, é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer. Para ele, um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas e nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

Assim é importante reconhecer que a matemática deve ser trabalhada através da resolução de problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam um veículo pelo qual um currículo pode ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de resolução de problemas.

Vale relembrar que, em 1989, a publicação *Curriculum and Evaluation Standards*[1] (NCTM, 1989) dizia que a resolução de problemas deveria ser o objetivo principal de todo o ensino de matemática e uma parte integrante de toda a atividade matemática, e que os alunos deveriam fazer uso de abordagens em resolução de problemas para investigar e compreender os conteúdos matemáticos. Durante dez anos permaneceu evidente a ideia de que resolução de problemas era um veículo forte e eficiente para a aprendizagem matemática. Os *Standards*[2] (NCTM, 2000) afirmam, de uma maneira convincente, que resolução de problemas não é só um objetivo da aprendizagem matemática, mas, também, um meio importante para se fazer matemática. Essa visão, mesmo hoje, está longe de ser alcançada. Entretanto, na sala de aula, onde os professores têm adotado essa abordagem, o entusiasmo de professor e alunos é alto e ninguém quer voltar a trabalhar com a forma de ensino tradicional.

Para Van de Walle (2001), a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino, e ele chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma usual em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando-se o que os alunos trazem consigo para a sala de aula. Diz ainda que o valor de se ensinar com problemas é muito grande e que, apesar de ser difícil, há boas razões para empreender esse esforço.

O ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis à situação-problema dada. O aprendizado, desse modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Sem dúvida, ensinar matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM[3] e dos PCN[4] (BRASIL, 1997, 1998, 1999), pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de matemática deve acontecer num ambiente de investigação orientada em resolução de problemas.

Em nossa visão, a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Essa posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de: relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos, relacionar um dado problema às muitas ideias matemáticas implícitas nele e construir relações entre essas várias ideias matemáticas. Ressalte-se que as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema.

[1] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics – Padrões Curriculares e de Avaliação para a Matemática Escolar (EUA).

[2] Standards 2000 – Principles and Standards for School Mathematics – Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (EUA).

[3] National Council of Teachers of Mathematics – Conselho Nacional de Professores de Matemática (EUA).

[4] Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil).

Acreditamos que, ao trabalhar com resolução de problemas, deveríamos fazer da compreensão seu foco central e seu objetivo. O papel da resolução de problemas no currículo passaria, desse modo, de uma atividade limitada para engajar os alunos, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído (ONUCHIC, 1999).

Van de Walle (2001) sugere que uma aula, através da resolução de um problema, deve ser estruturada em três partes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa, isto é, o professor deve saber que um conhecimento prévio deve ser do domínio do aluno para a construção dessa nova matemática que ele quer construir. Na fase "durante", os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho. Nessa fase, o professor deve fornecer pistas, mas não soluções; estimular os estudantes a explicarem e testarem suas próprias ideias; ouvir atentamente enquanto, em grupos, os alunos estão em busca da solução do problema. Na terceira, "depois", o professor aceita as soluções dos alunos sem avaliá-las e coloca a classe toda em discussão, numa plenária, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas

A opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação. Ela é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando a aprendizagem e reorientando as práticas de sala de aula, quando necessário.

O ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é diferente daquele trabalho em que regras de "como fazer" são privilegiadas. Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem realiza-se de modo cooperativo e colaborativo em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2007; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, 2009).

Não há formas rígidas para colocar em prática essa metodologia. Uma nossa proposta consiste em organizar as atividades seguindo as seguintes etapas a seguir.

1) Preparação do problema – Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula

2) Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

- Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema.
- Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema – De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da "matemática nova" que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o

problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, não mais como transmissor do conhecimento, mas como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

- O professor incentiva os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários, que podem surgir no decurso da resolução e que lhes poderão dificultar a continuação do trabalho: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias e outros.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor coloca-se como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Esse é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Nesse momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Reitere-se que, nessa metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema.

O trabalho com geometria no ensino médio

Depois de algum tempo de abandono, parece que o ensino de geometria está sendo revitalizado. Apesar disso, os professores se preocupam com esse tipo trabalho, pois eles o veem, relacionado com espaço e forma, ainda fortemente ligado às demonstrações de teoremas que garantam a construção e a validação de fórmulas. Entretanto, atualmente a geometria está sendo vista como um ramo da matemática presente em quase todos os currículos e, na maioria das vezes, trabalhado, tanto a geometria plana quanto a espacial, no ensino médio.

É preciso considerar os objetivos da geometria, em termos de duas estruturas bastante diferentes, mas relacionadas: o raciocínio espacial e seu conteúdo específico. A primeira dessas estruturas refere-se ao modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre forma e espaço; há uma base teórica, bem pesquisada, para organizar o desenvolvimento do pensamento geométrico que guia essa estrutura. A segunda estrutura é o conteúdo em seu sentido mais tradicional – ter conhecimento sobre simetria, triângulos, linhas paralelas, etc.

Outro fato a considerar é que a relação entre medida e geometria é mais evidente no desenvolvimento de fórmulas para medidas de figuras geométricas. As fórmulas nos ajudam a usar medidas mais fáceis para determinar indiretamente alguma outra medida que não é tão facilmente encontrada. Por exemplo, é fácil medir as três dimensões de uma caixa com uma régua, mas não é tão fácil medir o volume da mesma caixa. Usando uma fórmula, o volume pode ser determinado a partir das medidas dos comprimentos.

Embora as fórmulas se apresentem como caminhos eficientes para determinar medidas, infelizmente elas podem mascarar o que está sendo medido. Por exemplo: quando a fórmula do volume refere-se às medidas dos lados de um objeto tridimensional, os estudantes se confundem quanto à forma de unidades lineares transformarem-se em unidades cúbicas.

Uma das descobertas mais interessantes que as crianças podem fazer é a de buscar a relação entre o comprimento C da circunferência de um círculo (a distância que circunda o círculo ou o perímetro) e o comprimento D do diâmetro (uma reta que passa pelo centro ligando dois pontos da circunferência). O comprimento da circunferência de um círculo é cerca de 3,14 vezes o comprimento do diâmetro. A razão exata entre C e D é um número irracional próximo de 3,14 e é representado pela letra grega π. Assim, $\pi = C/D$, o comprimento da circunferência dividido pelo seu diâmetro. Ou, de uma forma diferente, $C = \pi D$. Como metade do diâmetro é o raio r, então a mesma equação pode ser escrita $C = 2\pi r$.

A busca de uma fórmula para o cálculo da área A de um círculo pode ser feita de várias maneiras. Uma delas, utilizando um trabalho manual com os alunos, poderia ser realizado tomando-se um círculo e dividindo-o em 8 setores, todos tendo a mesma área:

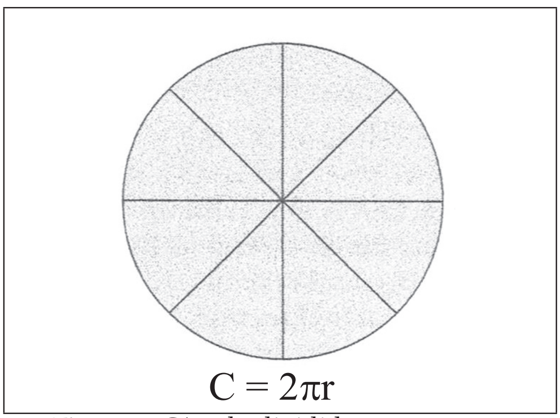


Figura 1: Círculo dividido em 8 setores

Os 8 setores podem ser arranjados numa figura "próxima de um paralelogramo", assim:

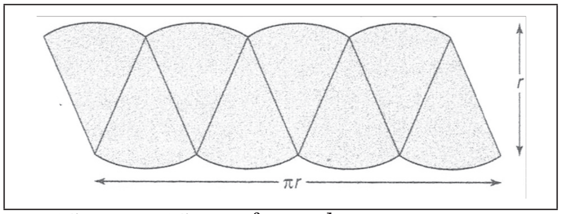


Figura 2: Figura formada por 8 setores

Se, ao invés de 8, construíssemos 24 setores, essa figura ficaria "muito mais próxima de um paralelogramo":

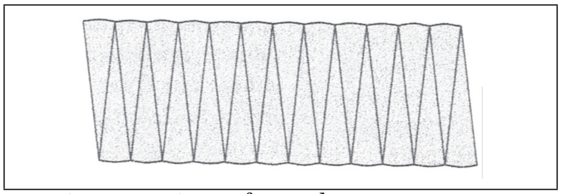


Figura 3: Figura formada por 24 setores

Como o número de setores pode se tornar bem maior, a figura então se tornará "mais e mais próxima de um retângulo", que é um particular paralelogramo:

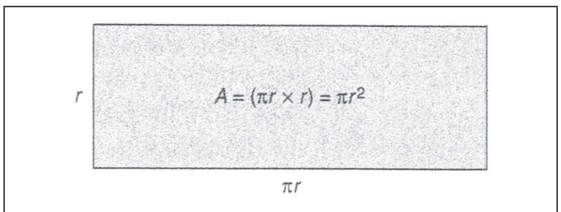


Figura 4: Área do retângulo

cuja área é dada por $A = (\pi r \text{ x } r) = \pi r^2$.

Observamos que essa abordagem, para desenvolver a fórmula da área de um círculo, deveria ser trabalhada pelos próprios alunos, individualmente ou em grupos, fazendo com que os alunos descobrissem como arranjar 8, 12 ou 24 setores de um círculo numa figura cada vez mais parecida com um paralelogramo.

No ensino médio, os alunos já terão trabalhado as ideias de área e perímetro. A maioria deles pode encontrar a área e o perímetro de determinadas figuras, e esses alunos podem até estabelecer as fórmulas para achar o perímetro e a área de um retângulo. Entretanto, eles ainda, com frequência, ficam confusos quanto à fórmula que devem utilizar.

Uma pergunta que o professor deve fazer, nessa situação, aos alunos seria: *O que se entende por perímetro? Como se mede o perímetro?* Depois de chegar a essas definições, pode-se enfatizar que as unidades usadas para medir o perímetro são unidimensionais ou lineares, e que o perímetro é exatamente a medida do comprimento da linha que circunda o objeto.

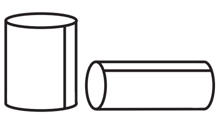
De modo análogo, deve-se perguntar: *O que se entende por área? Como se mede a área?* Aqui é preciso tornar explícito que as unidades usadas para medir a área são bidimensionais e que, portanto, cobrem a região.

As relações entre as fórmulas *para medir o volume* são completamente análogas àquelas usadas para a área. Note-se que há semelhanças entre retângulos e prismas retos, entre paralelogramos e prismas oblíquos e entre triângulos e pirâmides. Não somente as fórmulas estão relacionadas, mas também o processo para o desenvolvimento das fórmulas é semelhante. As unidades usadas para medir o volume são tridimensionais e preenchem todo o espaço ocupado pelo sólido.

Uma aplicação da metodologia a um problema de geometria

Os fatos que serão relatados nesta seção ocorreram durante um minicurso do qual participaram professores em formação inicial, alunos de licenciatura em Matemática e professores em exercício nos níveis fundamental, médio e superior de ensino.

O problema[5] a seguir foi proposto aos participantes.



A professora Norma entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

Jorge disse: – No meu cabe mais, porque é mais alto.

Ema disse: – No meu cabe mais, porque é mais largo.

Laura disse: – Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.

Quem está certo? Como você sabe?

Dado um certo tempo, cada participante começou a mostrar o seu cilindro, construído a partir da folha recebida, medindo 20cmx30cm. Uns tinham por base um círculo menor (maior) e uma altura maior (menor), assim:

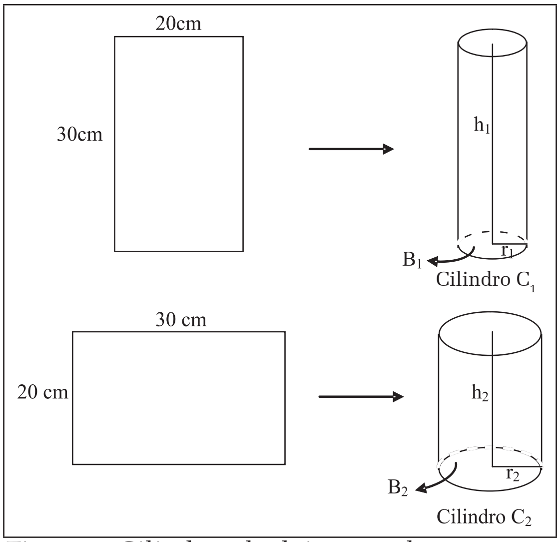


Figura 5: Cilindros de dois tamanhos construídos com folhas com mesmas dimensões (20cm x 30cm)

Ao ouvir os alunos, pudemos sentir várias respostas concordando com Jorge, outras com Ema e outras com Laura.

Pedindo que as diferentes respostas fossem justificadas, pudemos registrar algumas delas: uns diziam que o volume V_1 de C_1 é maior do que o volume V_2 de C_2, visto que a altura h_1 é bem maior que h_2; outros, por sua vez, defendiam que V_2 é maior que V_1, pois que o círculo da base B_2 de C_2 era maior que B_1; mas a que com mais frequência se ouviu foi que V_1 é igual a V_2, já que os cilindros foram construídos a partir da mesma folha de papel A.

Haveria alguma forma concreta para justificar isso?

Chamamos alguns participantes à frente e, numa mesa, pedimos que pusessem de pé o cilindro mais alto dentro do cilindro mais largo:

[5] Adaptado de Krulik e Rudnick (2005).

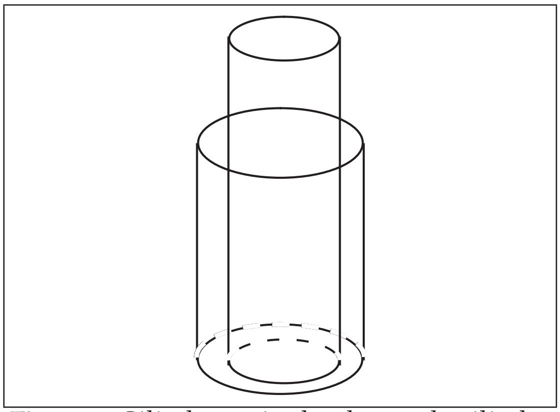


Figura 6: Cilindro mais alto dentro de cilindro mais largo

Demos-lhes um pacote com feijões e dissemos: – Preencham o cilindro mais alto com feijões, com cuidado e completamente.

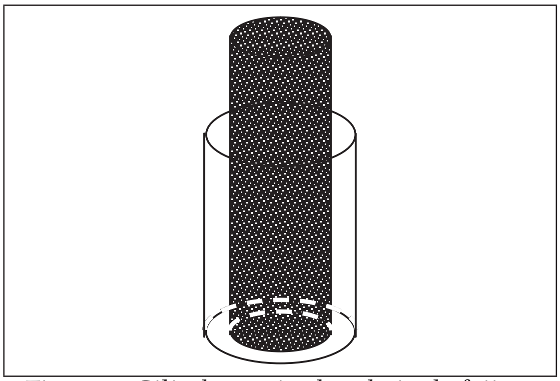


Figura 7: Cilindro mais alto cheio de feijões

Depois dissemos: – Retirem, com cuidado, o cilindro mais alto deixando os feijões caírem no cilindro mais largo. Surpreendentemente, para a maioria deles, o feijão lá dentro deixou uma parte vazia no cilindro mais largo.

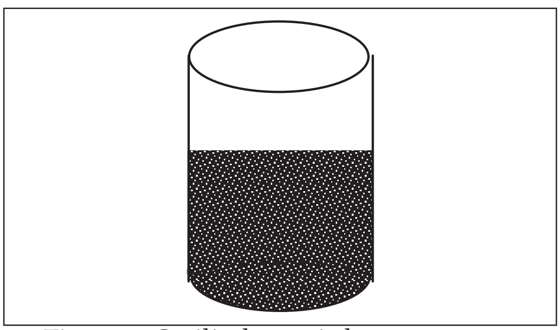


Figura 8: O cilindro mais largo com uma parte vazia

Assim, concretamente, foi possível constatar que V2 > V1.

Como a matemática poderia mostrar isso?

Diante das diferentes posições manifestadas, pedimos que, agora matematicamente, mostrassem de uma forma rigorosa o que já haviam constatado concretamente.

Como todos os participantes já haviam feito, pelo menos o terceiro ano do ensino médio, já conheciam a fórmula para o cálculo do volume do cilindro $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h a altura do cilindro.

Fazendo uso dessa fórmula, e efetuando o cálculo das medidas necessárias, sabendo que o comprimento da circunferência da base do cilindro é dada por $C = 2\pi r$ e que $\pi \cong 3{,}14$, escreveram:

$V_1 = \pi r_1^2 h_1$

A = 20 cm x 30 cm

$r_1 = 3{,}18$ cm

$h_1 = 30$ cm

$B_1 = \pi r_1^2 =$

$= 3{,}14 \,.\, (3{,}18 \text{ cm})^2 =$

$= 31{,}75 \text{ cm}^2$

$V_1 = B_1 h_1 =$

$= 31{,}75 \text{ cm}^2 \,.\, 30 \text{ cm} =$

$= 952{,}5 \text{ cm}^3$

$V_2 = \pi r_2^2 h_2$

A = 20 cm x 30 cm

$r_2 = 4{,}78$ cm

$h_2 = 20$ cm

$B_2 = \pi r_2^2 =$

$= 3{,}14 \,.\, (4{,}78 \text{ cm})^2 =$

$= 71{,}74 \text{ cm}^2$

$V_2 = B_2 h_2 =$

$= 71{,}74 \text{ cm}^2 \,.\, 20 \text{ cm} =$

$= 1434{,}8 \text{ cm}^3$

Logo, $V_2 > V_1$ e $V_2 - V_1 = 482{,}3 \text{ cm}^3$

Após esses cálculos realizados pelos participantes, nova pergunta surgiu:

- Qual o motivo dessa diferença nos volumes dos cilindros construídos a partir de uma mesma folha de papel?
Quem é o responsável direto por essa diferença?

Houve várias colocações dos alunos, mas alguns não conseguiam perceber que, na fórmula do volume, a presença do quadrado do raio na área da base era a responsável. No entanto, uma das alunas, quase que prontamente, disse que o responsável era o quadrado do raio, que fazia com que a área da base crescesse mais rapidamente e, consequentemente, apesar da altura menor que aparece multiplicativamente na fórmula do volume, fazia com que ele aumentasse.

A generalização feita por uma das participantes

Entusiasmada com o resultado, enquanto os colegas do minicurso calculavam o volume dos cilindros com os dados numéricos, uma participante[6] resolveu o problema de forma genérica, fazendo uso do seguinte raciocínio, reproduzido por nós, abaixo.

Considerando a folha com lados medindo a e b, com $0 < a < b$, construímos dois cilindros: um enrolando a folha ao longo de a com altura b, chamado cilindro C_A e o outro, enrolando ao longo de b com altura a, chamado cilindro C_B. Sendo **a** o perímetro da base de C_A, tem-se $R_A = \frac{a}{2\pi}$ como raio de sua base e, portanto, seu volume será $V_A = \frac{a^2 b}{4\pi}$. De modo análogo, o volume do cilindro C_B será $V_B = \frac{ab^2}{4\pi}$. A razão entre os volumes será, então,

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{a^2 b \big/ 4\pi}{ab^2 \big/ 4\pi} = \frac{a}{b} < 1 \text{, pois } 0 < a < b.$$

Assim $V_A < V_B$ e a razão entre os volumes é a mesma razão existente entre os lados da folha, ou seja, o volume do cilindro construído com maior altura será inferior ao volume do cilindro com menor altura.

Em um contato posterior que essa participante fez conosco, por escrito, ela registrou: "Apresentei este resultado aos outros participantes e foi uma experiência interessante, pois o resultado não era o esperado".

[6] Agradecemos à professora Sabrina Zancan Peripolli, CESNORS da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), que desenvolveu esta resolução.

Estendendo o problema

Muitos livros-texto definem cilindros estritamente como cilindros circulares. Esses livros não têm nomes especiais para outros tipos de cilindro. Sob essa definição, o prisma não é um caso especial de cilindro. Isso aponta para o fato de que as definições são convenções, e nem todas as convenções são universalmente aceitas.

Se olharmos para o desenvolvimento das fórmulas do volume, é possível ver que a definição mais inclusiva de cilindros e cones permite uma fórmula para qualquer tipo de cilindro – portanto prismas – com uma afirmação semelhante que é verdadeira para cones e pirâmides. Um cilindro é um sólido com duas bases paralelas congruentes e lados com elementos paralelos que ligam pontos correspondentes das bases. Desse modo, o raciocínio desenvolvido pela professora, mostrado anteriormente, aplica-se a outras classes especiais de cilindros, como os prismas retos, prismas retangulares e cubos. Prismas estão para os cilindros assim como pirâmides estão para cones. Conhecer essas relações ajuda na aprendizagem das fórmulas de volume.

O volume V de um cilindro é dado por V = área da base x altura. Mas, quando a base do cilindro é um círculo, cuja área é dada por $A = \pi r^2$ e a altura é h, então o volume V do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$.

Estendendo esse problema poder-se-ia, ainda, trabalhar a relação funcional do volume do cilindro em relação às suas variáveis, raio da base e altura do cilindro. Assim $V = V(r, h)$, uma função de duas variáveis. Conforme o nível das turmas, vários problemas novos poderiam ser explorados: a construção do gráfico; a expressão analítica para V em função de suas variáveis **r** e **h**; e, até, ir em busca, matematicamente, do cilindro de maior volume construído com a folha dada.

Considerações finais

Ao apresentar essa metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas a professores do ensino médio, estamos convencidas de que ela pode ser assumida como um caminho capaz de fazer os alunos se entusiasmarem com o aprendizado da matemática, realizando-o com compreensão e significado. Também estamos convencidas de que, quando um aluno entende o que está fazendo ao resolver um problema, ele se vê como alguém capaz de raciocinar por si mesmo e de buscar descobrir caminhos para a sua resolução. Entretanto, é necessário, para isso, que o professor, como guia e orientador, esteja preparado para ser o veículo que conduz os alunos nesse empreendimento.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. O ensino de números racionais e proporcionalidade através da resolução de problemas. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 12., 2007. **Anais**... Santiago de Querétaro: Benemérita Escuela Normal de Querétaro, 2007. 1 CD-ROM. p.1-12.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – 1º e 2º ciclos (1997). Brasília, DF.

______. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – 3º e 4º ciclos (1998). Brasília, DF.

______. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – Ensino médio (1999). Brasília, DF.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Problem-Driven Math:** Applying the Mathematics Beyond Solutions. Chicago, IL: Wright Group/McGrawHill, 2005.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, V. A.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

______. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, V. A.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs). **Educação Matemática** – pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p.213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores – Mudanças urgentes na licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSE, L. (orgs). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p.169-187.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, ed.4, 2001. 478p.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, H. L. **Teaching Student-Centered Mathematics**. Grades 5–8. New York: Pearson, 2006.

Lourdes de la Rosa Onuchic – Professora aposentada pelo ICMC – USP – São Carlos/SP. Docente voluntária, orientadora e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP – Rio Claro/SP.

Norma Suely Gomes Allevato – Doutora em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro/SP. Professora e pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo/SP.

Artigo encomendado.