

SESSÃO ESPECIAL

**À VISTA OU A PRAZO SEM JUROS:
QUAL DESSAS MODALIDADES DE PAGAMENTO É MAIS VANTAJOSA?****Cash or in Installments Without Interests: Which is the Best Way for a Payment?**

Lilian Nasser

e equipe do Projeto Fundão – IM – UFRJ

Resumo

A Matemática Financeira é, talvez, o conteúdo mais motivador do currículo do ensino médio e dos cursos de Educação de Jovens e Adultos. Por meio de seu estudo, o aluno pode ser preparado para enfrentar situações financeiras que ocorrem no seu dia a dia, como optar pela melhor forma de pagamento, à vista ou a prazo, seja de impostos ou de compras em geral. No entanto, esse conteúdo tem sido abordado de modo superficial, baseado na aplicação de fórmulas, como se pode observar pelos livros-textos mais usados. Além disso, a maioria dos cursos de licenciatura não inclui a Matemática Financeira em sua grade curricular. Como consequência, os professores não estão plenamente preparados para ensinar esse conteúdo, que não tem sido explorado nas salas de aula de modo adequado, discutindo situações financeiras reais e desafiadoras. Como reverter esse quadro, tornando o ensino de Matemática Financeira eficaz? Este artigo apresenta uma proposta inovadora para o ensino de Matemática Financeira que usa a visualização como recurso, por meio da representação da situação no “eixo das setas”, que facilita o entendimento da variação do dinheiro no tempo.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Visualização. Formação de Professores.

Abstract

Financial Mathematics is, certainly, the most motivating topic in the High School curriculum.

Studying financial mathematics, students can be prepared to face real situations, when they must decide which is the best way for the payment: cash or in installments. But this topic has been explored superficially in school, based in the application of formulas, as one can see in the most popular textbooks. Besides, Financial Mathematics is not included in the curriculum of the majority of the pre-service teacher education undergraduate courses. As a consequence, teachers are not prepared to teach this topic properly, exploring real and challenging financial situations. This article presents an innovative proposal for the teaching of Financial Mathematics, using visualization as a tool, by means of the representation in an “arrow axes”, facilitating the perception of the variation of money along time.

Keywords: Financial Mathematics. Visualization. Teacher education.

Introdução

Não há dúvida de que atualmente o ensino de Matemática Financeira nos níveis fundamental e médio é imprescindível para a formação de um cidadão crítico e atuante. De fato, o tópico de Matemática Financeira tem sido incluído na grade curricular de várias redes de ensino, como na do ensino médio da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (REORIENTAÇÃO CURRICULAR, SEE-RJ, 2005).

Mas o que deve ser ensinado de Matemática Financeira? E como abordar o tema de modo

eficaz? O que se deseja é que o aluno seja capaz de optar pela melhor forma de fazer seus pagamentos, efetuar compras à vista ou a prazo, decidir sobre empréstimos ou aplicações financeiras. Certamente, isso não pode ser alcançado por meio de um ensino baseado apenas na memorização e em fórmulas. Além dos tópicos tradicionais de porcentagem e de juros simples e compostos, a variação do dinheiro no tempo deve ser evidenciada, de modo que os alunos percebam que só é possível comparar pagamentos quando estes se referem à mesma data. É preciso, portanto, utilizar técnicas dinâmicas e motivadoras que despertem o interesse dos alunos e promovam a autonomia, permitindo o uso de uma estratégia própria para resolver os problemas.

Concordamos com os professores Ilydio e Vinicius P. de Sá, que, em artigo recente publicado na *Revista do Professor de Matemática*, alertam:

Fundamental, em matemática comercial e financeira, é o valor do dinheiro no tempo, conceito tão simples quanto negligenciado pela maioria das pessoas. Não podemos operar diretamente com valores monetários referentes a datas distintas. É necessário que coloquemos todos os valores numa mesma data, valorizando-os ou desvalorizando-os na linha do tempo. (SÁ, 2009, p.15)

Um grupo do Projeto Fundão (IM-UFRJ), que conta com a participação de professores da escola Básica e licenciandos de Matemática da UFRJ, está desenvolvendo um trabalho que propõe uma abordagem prática e visual para o ensino de Matemática Financeira. Com referência em uma ideia sugerida pelo prof. Morgado (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2005) e desenvolvida inicialmente por Rosa N. Novaes (2009), criamos uma estratégia baseada na visualização, em que a situação financeira é representada num eixo de setas, possibilitando enxergar a mudança de valor do dinheiro no tempo, e a porcentagem é apresentada na notação decimal, como fator.

Essas estratégias permitem visualizar a variação do dinheiro no tempo e facilitam a resolução dos problemas com o uso da calculadora.

Quando um produto sofre um aumento ou um desconto de $i\%$, o cálculo pode ser feito por meio de apenas uma operação de multiplicação

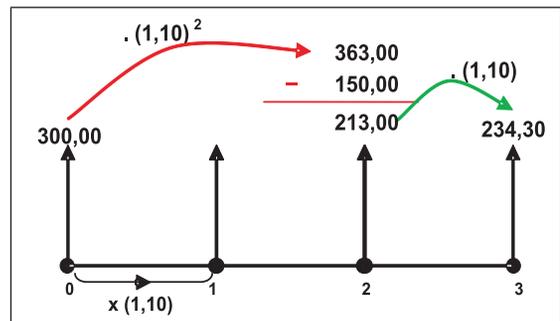
do preço original P por $(1 + i)$ no caso de aumento, e de $(1 - i)$, no caso de desconto. Assim, o aluno habitua-se desde o início da aprendizagem a lidar com a variação do dinheiro no tempo. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 1:

Bia pegou um empréstimo de R\$ 300,00 a juros mensais de 10%.
Dois meses depois, Bia pagou R\$ 150,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito.
Qual o valor desse último pagamento?

Solução:

Aplicar juros de 10% ao mês significa multiplicar a quantia por $(1 + 0,10) = 1,10$ em cada período de um mês. Essa situação pode ser representada no eixo das setas:



Os R\$ 300,00 tomados no empréstimo valem, 2 meses depois, com a taxa de juros de 10%, a: $300,00 \times (1,10)^2 = \text{R\$ } 363,00$.

Abatendo os R\$ 150,00, Bia ainda ficou devendo R\$ 213,00, que correspondem, um mês depois, a:

$$\text{R\$ } 213,00 \times 1,10 = \text{R\$ } 234,30.$$

É interessante observar que quando esse problema foi proposto a alunos do ensino médio, várias soluções criativas apareceram, sempre levando as quantias para uma mesma data, seja na data da obtenção do empréstimo, na data do primeiro pagamento ou na data da quitação da dívida, como na solução apresentada acima.

Esse método visual pode ser enriquecido com o uso da animação do PowerPoint, mostrando de modo dinâmico a variação do valor das quantias de um período para outro.

Uma oferta muito anunciada é do tipo “preço à vista igual a preço a prazo, sem juros”. O exemplo a seguir mostra que nem sempre isso é verdade.

Exemplo 2:

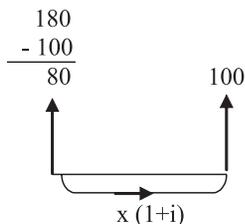
Uma loja anuncia um aparelho de DVD por R\$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento: à vista com 10% de desconto, ou em dois pagamentos de R\$ 100,00: um no ato da compra e outro um mês após. Qual a taxa mensal dos juros embutidos na venda parcelada?

Solução:

Com o desconto de 10%, o pagamento à vista é de R\$ 180,00.

No pagamento parcelado, é dada uma entrada de R\$ 100,00, e, em vez de pagar os R\$ 80,00 restantes, o comprador vai pagar R\$ 100,00 um mês após a compra. Isso significa que serão pagos R\$ 20,00 de juros no prazo de um mês. Isso corresponde a juros de R\$ 20,00 sobre o valor financiado de R\$ 80,00, o que corresponde a 25% de juros.

Esse problema pode ser representado no eixo das setas:



$$80 \times (1 + i) = 100 \Rightarrow 1 + i = 1,25$$

Segue que $i = 0,25$ ou 25%.

Portanto, se o comprador tiver o dinheiro, é melhor pagar à vista.

Ao longo de três anos de trabalho, essa proposta tem sido apresentada a diversos grupos de professores e licenciandos de Matemática. Nessas ocasiões, observa-se que alguns professores ou futuros professores cometem erros básicos, talvez porque muitos cursos de Licenciatura não incluam Matemática Financeira em seus currículos. Esses professores e seus futuros alunos tornam-se alvos fáceis das propostas enganosas da mídia, como as do tipo “preço à vista igual a preço a prazo” ou “financiamento em 12 vezes sem juros”.

Descrição da pesquisa

Nesse contato com professores e licenciandos de Matemática de diversas universidades públicas e particulares, observamos que a grande maioria comete enganos comuns ao lidar com situações financeiras, como comparar ou somar quantias que se referem a datas distintas.

Decidimos, então, elaborar um problema da realidade do aluno e do professor, para que fosse resolvido antes do início de cada oficina. Em alguns casos foi possível pedir aos professores que resolvessem o mesmo problema após vivenciar a nossa proposta para o ensino de Matemática Financeira.

O problema é o seguinte:

A diretora de uma escola juntou dinheiro para comprar um computador. Comparando os preços de mercado, encontrou a seguinte oferta numa loja:

Computador: R\$ 1.800,00 à vista
ou em
3 x iguais sem juros (entrada + 2)

A diretora pediu um desconto para o pagamento à vista, mas o vendedor respondeu que o preço a prazo sem juros era igual ao preço à vista e, portanto, não era possível dar desconto. Considerando que o dinheiro pode render 4% ao mês, qual seria o preço justo para o pagamento à vista?

A resolução desse problema envolve a noção básica de variação do dinheiro no tempo, e é uma ótima oportunidade de alertar os alunos para a proposta enganosa anunciada pela mídia de que o preço a prazo sem juros pode ser igual ao preço à vista. Uma vez que todos os pagamentos não são feitos na data da compra, e sempre é possível aplicar o dinheiro referente às prestações futuras, conclui-se que o valor pago não é equivalente ao preço à vista.

Para nossa surpresa, do primeiro grupo a que apresentamos esse problema, composto por 15 professores do Ensino de Jovens e Adultos do Município do Rio de Janeiro, apenas um deu a resposta correta. Uma segunda aplicação foi feita numa turma do Curso de Especialização em Ensino de Matemática e, dos 27 professores que resolveram o problema, novamente apenas um deu a resposta correta. Após assistir à aula com a abordagem do

eixo das setas, o número de professores que acertaram o problema subiu para 21, o que corresponde a 77,8% da turma. Em várias outras ocasiões, nenhum dos professores ou licenciandos dos grupos conseguia resolver corretamente o problema antes de participar da oficina.

As resoluções incorretas mais comuns estão descritas a seguir:

1ª resolução:

No pagamento a prazo, seriam 3 prestações de R\$ 600,00.
Do total de R\$ 1.800,00, é dada uma entrada de R\$ 600,00, e é financiada a quantia de R\$ 1.200,00.
Sobre R\$ 1.200,00 incide a taxa de 4% no 1º mês, que fica valendo R\$ 1.248,00.
Abatendo a parcela de R\$ 600,00, resta uma quantia de R\$ 648,00.
Calculando 4% de juros, ao final do 2º mês essa quantia equivale a R\$ 673,92. Com o pagamento de R\$ 600,00 da última parcela, restou uma diferença de R\$ 73,92.
Conclui-se, então, que o desconto deve ser de R\$ 73,92, e o preço à vista seria de R\$ 1.726,08.

2ª resolução:

Vamos supor que a 1º pagamento seja de x reais, na data da compra. Um mês após, com 4% de juros, a prestação seria de $1,04 \cdot x$ e, dois meses após a compra, o último pagamento seria de $(1,04)^2 \cdot x$. Então:
 $x + 1,04 \cdot x + (1,04)^2 \cdot x = 1800$
Resolvendo essa equação, encontra-se $3,1216 \cdot x = 1800$ e $x = 576,63$
Portanto, o preço justo para o pagamento à vista seria de $3 \times 576,63 = \text{R\$ } 1.729,89$.

Em ambas as soluções acima, o erro cometido foi comparar o valor dos pagamentos em datas distintas com o valor do computador na data da compra. Em situações desse tipo, os valores devem ser comparados na data da compra, isto é, em vez de calcular o valor futuro dos pagamentos, devem-se calcular os valores dos pagamentos futuros na data da compra e aí, então, comparar com o preço praticado à vista. Apareceram muitos outros tipos errados de soluções, como as seguintes.

3ª resolução:

No pagamento a prazo, são 3 prestações de R\$ 600,00.
Então a entrada é de R\$ 600,00.
A segunda prestação é acrescida de 4% de 600 = 24,00, e
a terceira prestação é acrescida de $2 \times 24 = 48,00$.
Total de juros: $24,00 + 48,00 = 72,00$
Portanto, o preço justo para o pagamento à vista seria de $1.800,00 - 72,00 = \text{R\$ } 1.728,00$

Essa solução apresenta o mesmo erro de comparar os valores em datas distintas e, além disso, tem o agravante de usar juros simples em vez de juros compostos.

Já na solução a seguir, os valores foram trazidos para a data inicial, mas os cálculos foram feitos com juros simples.

4ª resolução:

No pagamento a prazo, são 3 prestações de R\$ 600,00.
Então a entrada é de R\$ 600,00.
O valor referente à segunda prestação na data da compra é de $600 - 4\% \text{ de } 600 = 576,00$, e o valor referente à terceira prestação na data da compra é de $600 - 8\% \text{ de } 600 = 600,00 - 48,00 = 552,00$
Portanto, o preço justo para o pagamento à vista seria de $600,00 + 576,00 + 552,00 = \text{R\$ } 1.728,00$

Apareceram também soluções com tentativas de usar as fórmulas de juros simples ou compostos, que não levaram ao valor correto. Outras soluções incorretas foram apresentadas, com erros como não considerar a entrada, ou calcular os juros sobre o valor total do computador.

Uma abordagem alternativa para o ensino de Matemática Financeira

Diante do fracasso quase total dos professores e licenciandos na resolução desse problema nas oficinas em que foi apresentado, fica claro que grande parte dos cursos de licenciatura em Matemática não tem capacitado os alunos para o ensino de Matemática Financeira. E quando

o tema é abordado na escola básica, isso é feito por meio de fórmulas, não preparando o aluno para resolver os problemas que vai enfrentar no seu cotidiano.

Portanto, é preciso abordar a teoria de Matemática Financeira de modo alternativo. A exploração da visualização como recurso na resolução de problemas de matemática financeira tem sido muito positiva, propiciando aos alunos a compreensão da situação, e a criação de estratégias próprias para a sua resolução.

Usando esse modelo, uma solução correta do problema proposto é apresentada a seguir.

Resolução correta 1: calcula-se o valor das prestações na data da compra.

A cada mês, o dinheiro é valorizado em 4%. O eixo das setas abaixo representa a situação, em que o fator de correção é de 1,04. A entrada foi de R\$ 600,00.

O segundo pagamento, de R\$ 600,00, um mês após, equivale, na data da compra, a $\frac{600}{1,04}$ e o terceiro pagamento, também de R\$ 600,00, efetuado 2 meses após a compra, equivale, na data da compra, a $\frac{600}{(1,04)^2}$. Logo, na data da compra, os pagamentos efetuados a prazo equivalem a:

$$600 + \frac{600}{1,04} + \frac{600}{(1,04)^2} =$$

$$600,00 + 576,92 + 554,73 = \text{R\$ } 1.731,65.$$

Os valores também podem ser comparados na data da última prestação. Mas, nesse caso, é preciso tomar cuidado para não cometer o mesmo erro de grande parte dos professores e licenciandos testados, que compararam esse valor com o preço original do computador.

Nesse caso, há duas alternativas: trazer o valor obtido na data 2 para a data da compra e

calcular o valor justo para a venda do computador, ou então, pode-se transferir o que exceder R\$ 1.800,00 para a data da compra, obtendo o desconto que deve ser dado para a compra à vista.

Esse raciocínio aparece na 2ª resolução correta.

Resolução correta 2: calcula-se o valor das prestações na data da última prestação.

A entrada de R\$ 600,00 equivale, na data 2, a $600 \times 1,04^2 = 648,96$. O 2º pagamento, de R\$ 600,00, equivale, na data 2, a $600 \times 1,04 = 624,00$, e o terceiro pagamento, na data 2, é de R\$ 600,00.

Logo, na data do último pagamento, os valores pagos correspondem a:

$$600 \times 1,04^2 + 600 \times 1,04 + 600 = 648,96 + 624,00 + 600,00 = 1.872,96$$

Para comparar esse valor com o preço à vista, é preciso transferi-lo para a data da compra:

$$\frac{1.872,96}{(1,04)^2} = \text{R\$ } 1.731,65.$$

Portanto, esse deve ser o valor a ser pago à vista pelo computador.

Em geral, os alunos preferem essa última resolução, em que os valores são multiplicados por potências de $(1 + i)$, mas é preciso lembrar de achar o correspondente do valor futuro encontrado na data da compra (valor atual).

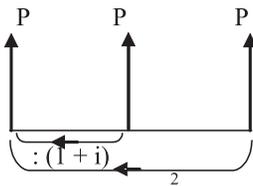
Vale ressaltar que a diferença entre a resposta correta (R\$ 1.731,65) e algumas das respostas incorretas encontradas é pequena, pelo fato de o problema envolver apenas 3 pagamentos. Quando a situação admite pagamentos em prazos longos, como em 12 prestações, a diferença entre o preço à vista e o valor financiado é significativo. Nesta pesquisa, optamos por um problema que pudesse ser resolvido com uma calculadora simples, ou mesmo sem calculadora. Nos casos de prazos longos, muitas vezes é conveniente usar a

fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica para calcular a soma dos valores transferidos para a data inicial.

Com essa abordagem, os alunos são capazes de resolver problemas reais do seu cotidiano, permitido uma postura crítica perante as ofertas oferecidas pela mídia, e a tomada de decisão quanto ao pagamento de taxas e impostos.

Por exemplo, o pagamento anual do IPVA dos automóveis pode ser efetuado à vista com 10% de desconto, ou em 3 parcelas mensais iguais, sendo paga a 1ª na data do vencimento. Qual dessas modalidades é mais vantajosa?

Para calcular a taxa de juros praticada no pagamento parcelado, vamos representar a situação no eixo das setas, onde P representa o valor de cada parcela. O valor total de 3P, quando pago à vista com desconto de 10%, é de $0,9 \times 3P$.



Transferindo o valor das parcelas para a data inicial, temos:

$$0,9 \times 3P = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}$$

$$2,7 = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2}$$

$$1,7 (1+i)^2 = 1 + i + 1$$

$$17 i^2 + 24 i - 3 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, encontramos $i = 0,115$. Portanto, $i = 11,5\%$.

Essa taxa mensal de juros é mais alta até do que a do cheque especial, o que nos leva à conclusão que o pagamento à vista é sempre mais vantajoso.

Os pontos principais da sequência didática adotada são:

- ✓ uso da porcentagem como fator, na notação decimal, de modo que, para encontrar um valor com acréscimo de $i \%$, multiplica-

se a quantia original por $(1+i)$ e, se for desconto de $i \%$, multiplica-se a quantia original por $(1- i)$;

- ✓ representação da situação no eixo das setas e transposição dos valores para uma mesma data para que possam ser comparados e/ou somados;
- ✓ uso da animação do PowerPoint para permitir a visualização da variação do dinheiro no tempo;
- ✓ exploração de problemas práticos, do dia a dia dos cidadãos;
- ✓ integração com outros conteúdos como progressões e gráficos das funções afim e exponencial;
- ✓ análise de diversas estratégias para resolver um mesmo problema, exemplificando com soluções apresentadas por alunos de ensino médio.

Resultados

Os resultados obtidos nas testagens em que o problema foi resolvido antes (pré-teste) e depois da oficina (pós-teste) indicam que houve uma melhora de cerca de 70% de acertos, em média.

Se considerarmos que as amostras eram compostas de professores ou futuros professores, esse resultado não é satisfatório. Mas deve-se levar em conta que o pós-teste foi aplicado imediatamente após a oficina e, em alguns casos, seriam necessários mais exercícios para o domínio do processo de resolução pelo eixo das setas.

No final das oficinas, costumamos pedir aos presentes que opinem sobre o método apresentado dando um depoimento por escrito. A grande maioria dos depoimentos tem sido favorável, destacando suas vantagens, como a ausência de fórmulas decoradas e o fato de que a visualização da situação no eixo das setas permite ao aluno criar uma solução própria,

Um dos alunos do curso de especialização do IM/UFRJ usou o método do eixo das setas em sua turma de 1º ano do ensino médio, com 39 alunos. Antes de ensinar o método, apenas 11 alunos tinham obtido média acima de 5, e, após ensinar o método, 28 alunos atingiram nota superior a 5 no mesmo teste. Segundo esse professor, os alunos disseram que “o método do eixo das setas mostra o que temos que fazer”.

Comentários finais

Os alunos do ensino médio e dos cursos destinados ao Ensino de Jovens e Adultos devem ser preparados para resolver as situações financeiras que se apresentam na sua vida diária. Mas, para isso, os professores precisam ser capacitados para abordar o conteúdo de Matemática Financeira de modo prático e eficaz. A formação dos professores em muitos casos é deficitária, pelo fato de esse conteúdo não fazer parte do currículo da maioria dos cursos de licenciatura.

Cerbasi (2006) afirma que “Um canal importante a desenvolver para a boa formação financeira de nossos filhos é a divulgação deste tipo de conhecimento entre os professores” (p.37).

No entanto, referindo-se ao professor, Cerbasi alerta que

Além de não ser orientado e motivado para isso, ele, como todo brasileiro adulto, não recebeu esse tipo de informação em sua infância. Se possui algum interesse por finanças, seus conhecimentos na área são recentes e sua insegurança ao utilizá-los é provavelmente grande. (CERBASI, 2006, p.38)

Completamos afirmando que o professor não recebeu esse tipo de formação nem nos cursos preparatórios para o magistério.

O tópico de Matemática Financeira deve ser abordado na escola básica de forma prática e dinâmica, destacando que:

- acréscimos ou descontos acumulados devem ser multiplicados e não somados;
- pagamentos da mesma quantia em datas distintas não têm o mesmo valor;

- os juros devem ser calculados sobre o saldo devedor, e não sobre o valor total da compra;
- quantias que se referem a datas distintas não podem ser somadas;
- só é possível comparar formas diferentes de pagamento se as quantias forem calculadas com referência à mesma data.

Respondendo à pergunta do título: deve-se exigir sempre um desconto para o pagamento à vista, pois, se parte do pagamento vai ser efetuado um mês (ou mais) após a compra, essa quantia pode ser investida e, certamente, vai estar valorizada na data dos pagamentos futuros. Caso não seja concedido desconto no pagamento à vista, deve-se optar pelo pagamento a prazo.

Acreditamos que a população deve ser alertada para esses e outros erros que ocorrem frequentemente, e a melhor maneira de cumprir essa tarefa é conscientizando os licenciandos e professores de Matemática de como evitá-los.

Referências

CERBASI, G. **Filhos inteligentes enriquecem sozinhos**. São Paulo: Gente, 2006.

MORGADO, A. C., WAGNER, E.; ZANI, S. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

NOVAES, ROSA C. N. **Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no ensino médio**. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, UFRJ, 2009.

SÁ, ILYDIO P.; SÁ, V. G. P. Duas vezes 100 é igual a 200? **Revista do Professor de Matemática**, n.70, p.13-16, SBM, 2009.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO: Reorientação Curricular, Livro II, 2005.

Lilian Nasser – Professora aposentada do IM-UFRJ, pesquisadora do Projeto Fundão e professora do CETIQT/SENAI.
E-mail: lnasser@im.ufrj.br

Autor convidado