COMO PROFESSORES E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM CONTEÚDOS ALGÉBRICOS EM SUA PRODUÇÃO ESCRITA

How do high school teachers and students work with algebraic contents in their written production

Gefferson Luiz dos Santos
Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa que investigou a produção escrita de professores e estudantes de Matemática do Ensino Médio, buscando identificar os modos de resolução que estes utilizaram para resolver onze questões de álgebra das provas de conhecimentos gerais de três universidades estaduais paranaenses. Numa abordagem predominantemente qualitativa, com cunho interpretativo, identificamos os conteúdos algébricos presentes nas questões, a linguagem e a simbologia algébricas, e inferimos sobre possíveis características do pensamento algébrico. Concluímos que os conteúdos abordados nas questões são, em sua maioria, conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental. Os professores e estudantes apresentaram modos de resolução baseados na matemática escolar da Educação Básica, o aritmeticismo como característica do pensamento algébrico e indícios desse pensamento em uma fase de transição permeada por uma linguagem natural e alguns símbolos algébricos, considerando que muitas vezes o próprio enunciado das questões possa ter norteado algumas das produções apresentadas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Linguagem Algébrica. Produção Escrita.

Abstract

This article presents the results of a research that investigated the written production of mathematic teachers and high school students, searching to identify the resolution ways that these ones had used to solve eleven questions of algebra of the tests of general knowledge of three universities in the state of Parana. In a predominantly qualitative boarding, with interpretative matrix, we identify algebraic contents present in the algebraic questions, language and symbology and inferred on possible characteristics of the algebraic thought. We conclude that the boarded contents in the questions are, in its majority, contents worked in elementary school. The teachers and students had presented ways of resolution based on mathematics of the basic education, the aritmeticism as characteristic of the algebraic thought and indications of this thought in a phase of transition based for a natural language and some algebraic symbols, considering that many times the own enunciated of the questions can have guided some of the presented productions.

Keywords: Mathematics Education. Algebraic Thinking. Algebraic Language. Written Production.

Introdução

Considerando que a álgebra é abordada no Ensino Fundamental e no Médio e que exames vestibulares muitas vezes exigem esse tipo de conteúdo, pensamos ser pertinente buscar indícios de pensamento algébrico, linguagem algébrica e simbologia algébrica na produção escrita de estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio, em questões de álgebra de alguns vestibulares de universidades estaduais do Paraná.

Na busca de literatura a respeito do assunto, fizemos um levantamento de trabalhos apresentados em eventos, como SIPEM (2006) e EBRAPEM (2004, 2007 e 2008), além de artigos de autores como Kaput (1999), Kieran (1992) e Lins e Gimenez (1997), entre outros, e notamos que existem poucos estudos que investigam pensamento algébrico em questões de vestibulares. Além disso, procuramos identificar como o pensamento algébrico, a álgebra, a simbologia e a linguagem algébrica estão presentes na literatura em Educação Matemática, no desenvolvimento histórico da Matemática e no documento do NCTM (1989, 2000)[1].

Em seguida, aplicamos um instrumento contendo questões de álgebra dos vestibulares de verão de três universidades estaduais paranaenses, no período de 2005 a 2007, a estudantes e professores de Matemática do Ensino Médio de escolas do município de Telêmaco Borba/PR.

Na análise desses registros escritos, utilizamos caracterizações do pensamento algébrico e da álgebra, principalmente as colocadas por Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini et al. (1993), bem como aspectos ligados à simbologia algébrica e à linguagem algébrica apontados por Arcavi (1994) e Kieran (1992, 2004). Também explicitamos os conteúdos algébricos e os modos de resolução abordados.

A álgebra escolar

O colóquio internacional "Research Perspectives on the Emergence and Development of **Algebraic** Thought", que aconteceu em Montreal, em 1993, apontou alguns "ingredientes básicos" da Álgebra Escolar:

- generalização de padrões numéricos e geométricos e das relações numéricas;
- resolução de problemas;
- situações funcionais (no que se refere a funções);
- modelagem de fenômenos físicos e matemáticos (BERDNAZ, KIERAN & LEE 1996, apud KIERAN 2004, p.21).

Cada um desses "ingredientes básicos" centraliza uma forma de trabalhar a álgebra, apontando avanços que o professor pode obter ou dificuldades que este poderá encontrar. Acreditamos que todas são relevantes e podem estar presentes na *práxis* pedagógica dos professores, pois a ênfase dada ao conhecimento matemático, e mais especificamente à álgebra, é particular.

O documento do NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), ressalta que:

> ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática. Em todos os níveis de escolaridade, os alunos deverão perceber que a matemática faz sentido através do desenvolvimento de ideias, da exploração de fenômenos, da justificação de resultados e da utilização de conjecturas matemáticas em todas as áreas de conteúdo. (NCTM, 2000, p.61)

Este mesmo documento considera que a álgebra deve ser abordada desde os primeiros anos de escolaridade, pois, mesmo antes do ensino formal, as crianças desenvolvem conceitos iniciais referentes a padrões, funções e álgebra; e quando, ao verbalizarem a sua compreensão matemática, elas começam a usar a linguagem formal do dia a dia, construindo elos com a linguagem matemática formal. Coloca que os alunos devem compreender que as representações escritas das ideias matemáticas são componentes importantes da aprendizagem e da produção matemática, e que a utilização das formas de representação convencional pode facilitar tanto a aprendizagem da Matemática quanto a comunicação com outras pessoas de suas ideias matemáticas. Acrescenta que um dos aspectos mais poderosos da Matemática consiste no uso da abstração[2] e descreve uma Matemática significativa, com os conteúdos e os processos matemáticos que os alunos deverão aprender, constituindo-se numa orientação curricular para esta disciplina, tanto no nível de conteúdos como das abordagens que deles se faz até os dias atuais, elencando seis princípios para a matemática escolar: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e

[1] National Council of Teachers of Mathematics.

[2] Eliminação, através da simbologia, de algumas características de um problema que não são essenciais para a sua análise, o que vai permitir que sua representação simbólica seja mais facilmente operacionalizada (NCTM, 2000, p.78).

tecnologia. Considerando esses seis princípios, Onuchic e Allevato (2005) afirmam que:

> [...] são apresentados cinco padrões de conteúdo: números e operações, álgebra, geometria, medida e análise de dados e probabilidade, os quais descrevem explicitamente o conteúdo a ser trabalhado e que os alunos devem aprender. Os outros cinco padrões são padrões de processo: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação, que realçam os caminhos de se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado (p.218).

Na perspectiva do documento do NCTM (2000), o trabalho com números e suas propriedades fundamentam as bases para a manipulação de símbolos e expressões algébricas. A tarefa com padrões propicia aos alunos identificar relações e fazer generalizações por meio de diversas atividades exploratórias. Também realça que, à medida que estes fazem generalizações, observando os números e as operações, estão construindo as bases do pensamento algébrico. Ainda segundo este documento, os programas de ensino deverão permitir aos alunos:

- compreender padrões, relações e funções;
- representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2000, p.104)

Nesse sentido, Kieran (1981) realizou um estudo com o objetivo de observar o comportamento de alunos de todos os anos de escolaridade e algumas das dificuldades que estes possuíam. A pesquisadora mostra que a compreensão do sinal de igualdade deve ser relevante no estudo da Álgebra Escolar. Muitos alunos não concebem o sinal de igualdade como um sinal de equivalência. A ideia de que conceber o sinal de igualdade apenas como um símbolo pode persistir por todo o ensino fundamental, mesmo quando os alunos se deparam com situações em que este se associa ao sinal de equivalência.

Em alguns de seus artigos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Escolar, a essência da álgebra e a identificação de estágios de desenvolvimento algébrico, Kieran (1992, 2004) assegura que o simbolismo facilitou o desenvolvimento de conceitos matemáticos como, por exemplo, o de função. Acredita que, na Álgebra Escolar, a aprendizagem pode ser interpretada como uma série de ajustamentos processo-objeto que os alunos desenvolvem até perceberem os aspectos estruturais da álgebra.

Kieran (1992, apud PESQUITA, 2007) descreve seis níveis de interpretação da letra, considerando um nível mínimo de compreensão necessário para realização correta das atividades propostas pelos estudantes:

> *a) Letra avaliada*: é atribuído um valor à letra desde o princípio. Exemplo: Se $a = 3$, qual é o valor da expressão $a + 5$?
>
> *b) Letra não considerada*: a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado. Exemplo: Se $x + y = 10$, $x + y + 5 = \ldots$?
>
> *c) Letra considerada como objeto*: a letra é entendida como o nome de um objeto concreto. Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde l é o comprimento do lado do quadrado.
>
> *d) Letra considerada como incógnita*: a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido. Exemplo: Dada a equação $2x + 1 = 7$, qual o valor de x?
>
> *e) Letra considerada como número generalizado*: a letra é entendida como uma representação de vários números e não de apenas um. Exemplo: A expressão de números ímpares, $2n - 1$.
>
> *f) Letra considerada como variável*: a letra é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos e é vista a existência de uma relação sistemática entre esses dois conjuntos de valores. Exemplo: Qual é maior, $2n$ ou n^2? (p.20)

Até meados do século XVIII, a álgebra aparecia descontextualizada como uma coleção de símbolos soltos e sem envolvimento entre si, e os estudantes não entendiam a necessidade de sua utilização. Para eles, a álgebra era uma parte da Matemática muito complexa e difícil.

Apesar de muitos estudantes ainda acharem que a álgebra é apenas isso, sabemos que hoje ela abarca também relações matemáticas abstratas e as estruturas algébricas.

Nessa perspectiva, Carpenter et al. (2003) afirmam que os alunos podem aprender aritmética de uma forma produtiva, na qual seu conhecimento de aritmética sirva de base para aprender álgebra. Sendo assim, consideram importantes algumas discussões, desde as séries iniciais, sobre o sinal de igualdade, tanto na aritmética quanto na álgebra, as relações que se estabelecem entre as expressões numéricas, a construção de conjecturas, as representações simbólicas, a justificação e a prova de conjecturas matemáticas e as relações de implicações da aritmética e da álgebra. “Introduzir a álgebra nas séries iniciais abriria um espaço curricular necessário para o nível secundário e acrescentaria um novo nível de coerência, profundidade e potência à matemática elementar” (BLANTON e KAPUT, 2001, apud LINS e KAPUT, 2003, tradução nossa).

Carpenter et al. (2003) sugerem que a integração entre a aritmética e a álgebra deve acontecer nas séries iniciais para que os estudantes não apresentem maiores dificuldades nas séries subsequentes; e que as crianças possam desenvolver o pensamento algébrico e generalizar relações ou padrões. “Muito embora os conceitos discutidos nas séries iniciais sejam algébricos, tal fato não significa que os alunos destes primeiros anos tenham que lidar com o simbolismo frequentemente ensinado nas tradicionais aulas de Álgebra” (NCTM, 2000, p.105). Existem muitas propriedades, estruturas e relações que são comuns à álgebra e à aritmética que podem ser abordadas de forma integrada.

Alguns autores, como Sfard (1991) e Kieran (1992), salientam que as dificuldades de estudantes em aprender álgebra ou a linguagem simbólica da álgebra estão na incapacidade de relacionar expressões simbólicas ao seu significado. A fonte de muitos erros está na insuficiência de tais relações. Além de ignorarem os significados, inventam novos e torna-se difícil convencê-los do erro cometido.

Já na perspectiva de Kaput (1999), o pensamento algébrico pode adquirir diversas formas que se combinam. Considera que, a partir de situações aritméticas, os alunos podem chegar à expressão e formalização de generalizações (aritmética generalizada) e trabalhar com regularidades numéricas para descrever e generalizar situações funcionais (pensamento funcional). Aponta também a modelação como uma forma de exprimir e formalizar generalizações, bem como a generalização relativa a estruturas abstratas. Dessa maneira, a álgebra e, consequentemente, o pensamento algébrico, podem ser iniciados com base nas experiências dos alunos e não pela aprendizagem descontextualizada de regras de manipulação simbólica.

Acreditamos que as caracterizações do pensamento algébrico precisam estar presentes nas pesquisas e nas discussões em sala de aula como qualquer outro conteúdo pertinente à Matemática. A compreensão dos conceitos algébricos fundamentais é um processo lento e requer dos professores e alunos um trabalho ao longo de vários anos.

Várias caracterizações de álgebra e de pensamento algébrico foram propostas por diferentes autores. Lins coloca que: “[...] escolhas a respeito do que é álgebra e pensamento algébrico têm um grande impacto no desenvolvimento de pesquisas e materiais para a sala de aula” (LINS, 2001, p.37).

Para Lins e Gimenez (1997, p.137), a álgebra consistiria em “um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”.

Assim, existem modos diferentes de produção desses significados, entre eles o pensamento algébrico. Este modo possui, então, de acordo com os mesmos autores, três características fundamentais:

> 1. Produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (*aritmeticismo*);
>
> 2. Considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos (*internalismo*);
>
> 3. Operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (*analiticidade*). (LINS E GIMENEZ, 1997, p.151)

Lins e Gimenez nos apontam que pensar algebricamente é pensar envolvendo essas três características, é produzir significado para as situações que nos apresentam, envolvendo números e operações e transformá-las em expressões que são obtidas a partir dessas características. Ao afirmar que pensar algebricamente é *pensar aritmeticamente*, Lins nos remete "à ideia de modelar com números" (LINS, 1992, p.12). Pensar aritmeticamente significa que estamos lidando exclusivamente com números, operações aritméticas e uma relação de igualdade (LINS, 1992).

Referindo-se ao *pensar internamente*, Lins (1992) afirma que, quando pensamos algebricamente, estamos tomando como referência as propriedades das operações. Sendo assim, podemos verificar a existência de modelos não aritméticos como outras formas de produção de significados.

Na última característica do pensamento algébrico, *pensar analiticamente*, o pensamento algébrico é caracterizado "como um método de procura das verdades e que no pensamento algébrico o desconhecido é tratado como conhecido" (LINS, 1992, p.16).

Lins (1992) afirma que o pensamento algébrico

> [...] pode acontecer no contexto da notação simbólica (literal ou outra). [...] a notação algébrica compacta que tem se desenvolvido – sustentada pela notação aritmética – não é apenas possível no contexto do pensamento algébrico, mas adequada. [...] no contexto algébrico, os números podem ser entendidos simbolicamente. (p.17-18)

Lins (1992) acredita que essas caracterizações podem contribuir para uma melhor compreensão das soluções apresentadas pelos estudantes e podem tornar o ensino da álgebra muito mais coerente e útil do que modelos prontos.

Já Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) estabelecem uma caracterização do pensamento algébrico a partir da análise de situações nas quais acreditam ser possível a manifestação desse pensamento, mas não de forma evidente.

> [...] acreditamos subsistir entre o pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas um relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam ao elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico. (FIORENTINI et al., 1993, p.85)

Concluem também que não existe apenas uma forma única de expressar o pensamento algébrico e consideram que o pensamento algébrico

> [...] pode expressar-se através de uma linguagem natural, através de uma linguagem aritmética, através de uma linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI et al., 1993, p.88)

Os mesmos autores apontam "a existência de elementos que caracterizam o pensamento algébrico tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (p.87) e que devemos levar nossos alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" (p.87).

Esses autores ressaltam algumas implicações pedagógicas no que se refere ao pensamento algébrico:

1ª) o pensamento algébrico pode ser abordado desde as séries iniciais, pois esse tipo de pensamento não prescinde uma linguagem simbólico-formal, não havendo motivos para seu trabalho tardio;

2ª) a linguagem simbólico-formal, além de fornecer um simbolismo conciso que possibilita abreviar a resolução de uma situação-problema, facilita a simplificação de cálculos;

3ª) o pensamento algébrico é indispensável na constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea;

4ª) o pensamento algébrico deve basear-se em etapas que são importantes no desenvolvimento da Educação Algébrica, dentre as quais se destacam: o trabalho com situações-problema, a atribuição de algumas significações às expressões algébricas e o transformismo[3].

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) caracterizam três fases do desenvolvimento do pensamento algébrico: a fase pré-algébrica (em que o aluno utiliza algum outro elemento considerado algébrico – letra, por exemplo –, mas não consegue, ainda, concebê-lo como número generalizado); a fase de transição (na qual o aluno aceita conceber a existência de um número qualquer, estabelecendo alguns processos e generalizações, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica); e, finalmente, o pensamento algébrico mais desenvolvido (quando o aluno concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz de operá-las). Na concepção desses autores, podemos inferir que o pensamento algébrico se potencializa à medida que os estudantes desenvolvem uma linguagem mais apropriada para ele.

Nesse sentido, para Kaput (1999), muitas vezes a experiência com a álgebra faz com que alguns alunos fiquem desmotivados para aprender Matemática, antes mesmo de construir o conhecimento matemático, para compreender sua importância e utilidade em suas vidas. Acrescenta ainda que "sem o simbolismo algébrico não existiria a Matemática superior nem a ciência quantitativa, a tecnologia e a vida moderna como as conhecemos" (p.4).

Finalmente, Lins e Gimenez (1997) acreditam numa "proposta para a educação matemática em que álgebra, aritmética e geometria sejam consideradas instrumentos que participam da organização da atividade humana" (p.28).

Procedimentos metodológicos

Optamos pela pesquisa qualitativa e, visando atingir nosso objetivo, buscamos no *site* da Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior (SETI) as universidades públicas estaduais paranaenses cadastradas e encontramos UEL, UEM, UEPG, UNICENTRO e UNIOESTE.

Como essas universidades realizavam o exame vestibular em duas etapas, optamos por aquelas em que a primeira etapa consistia em uma prova de conhecimentos gerais, aplicada a todo candidato, independente do curso, pois acreditamos que essa etapa exija do estudante conhecimentos básicos que um egresso do Ensino Médio deve possuir para ingressar no Ensino Superior e, assim, selecionamos UEPG, UEL e UEM[4]. Nosso próximo passo foi a delimitação do período para a coleta de dados e optamos pelo período de 2005 a 2007 para a seleção e análise das questões, por serem os últimos anos que antecederam o início de nossa pesquisa. Após a seleção das universidades e do período, buscamos nas provas de verão de conhecimentos gerais as questões de Matemática, totalizando 46 questões.

Feita essa seleção, enviamos as questões a especialistas, doutores e mestres em álgebra, solicitando que nos indicassem quais destas questões eram referentes à álgebra. Optamos por analisar as onze questões que foram apontadas por, pelo menos um especialista, como sendo uma questão de álgebra.

Essas questões foram aplicadas a 24 professores de Matemática da Rede Pública de Telêmaco Borba, atuantes no Ensino Médio, e a 50 estudantes que cursavam o 3º ano do Ensino Médio. Os estudantes eram pertencentes às turmas dos professores que aceitaram participar da pesquisa e foram convidados pelo pesquisador para tomar parte dela. A aplicação das questões deu-se no primeiro semestre de 2009.

Antes da análise da produção escrita contida nas provas, corpus de nossa pesquisa, nosso primeiro passo foi resolver todas as questões para fazer um levantamento das impressões que tivemos de cada item, dos "caminhos" que percorremos em cada resolução para encontrar o resultado correto. Nos exames vestibulares cujas questões apresentaram-se sob forma de questões abertas[5] e questões de

[3] Modo como uma expressão algébrica transforma-se em outra equivalente e os procedimentos que legitimam essas transformações.

[4] A UEM no ano de 2005 ainda não realizava a prova de conhecimentos gerais. Seu exame vestibular ainda era similar ao exame vestibular da UNICENTRO E UNIOESTE. Somente a partir do ano de 2006 a referida universidade optou por este formato no seu exame vestibular.

[5] Questões abertas são aquelas que admitem respostas em valores numéricos inteiros compreendidos entre 00 e 99, incluindo esses dois valores (MANUAL DO CANDIDATO- UEPG).

alternativas múltiplas[6], adotamos alguns critérios para a correção: consideramos código 1 para pontuação total, ou seja, aquelas em que os participantes apresentaram a soma correta dos números correspondentes às alternativas verdadeiras; código 2 para a soma que apresentou a atribuição de pontos em que o valor numérico assinalado incluiu pelo menos uma alternativa verdadeira e nenhuma alternativa falsa. Portanto, a pontuação integral ou parcial de uma questão só foi feita se a soma apresentada não incluísse alternativa(s) falsa(s); e código 3 para as questões que os participantes não resolveram ou apresentaram uma soma incluindo alternativa falsa. Seguimos, assim, um procedimento similar com base no *Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática AVA/2002* (BURIASCO, CYRINO e SOARES, 2004).

A partir das produções escritas de professores e estudantes, iniciamos uma leitura de cada questão para buscar os detalhes de cada produção, e assim estabelecermos os agrupamentos[7], os quais não são excludentes, com base nos modos de resolução de cada questão, em uma análise descritiva e interpretativa dos dados[8], e, posteriormente, procedemos a uma análise de conteúdo, que, segundo Laville e Dionne (1999), "consiste em desmontar a estrutura e os elementos de um conteúdo para esclarecer suas diferentes características, extraindo sua significação" (p.214). Em algumas questões, criamos subgrupos desses modos devido a processos de resolução e caminhos diferentes utilizados na produção, buscando uma análise mais detalhada. Inferimos que houve indícios de pensamento algébrico quando um ou mais dos seguintes indicadores se fizessem presentes explicitamente: generalização; regularidade; uso ou cálculo de incógnitas; uso ou cálculo com variáveis e uso de equações.

Análise da produção escrita

Optamos em analisar, inicialmente, a produção escrita dos participantes questão a questão, pois, quando um estudante ou professor resolve uma questão e registra seu modo de resolução numa avaliação, nos possibilita inferir sobre os mesmos. Posteriormente, fizemos uma sistematização dessas análises. Como exemplo, apresentamos a análise da questão um. Contudo, no Anexo I, encontram-se as demais questões aplicadas aos professores e estudantes.

Quadro 1: enunciado da questão 1.

De acordo com a tabela, com 3 colheres de pó de café e 0,5 litro de água, são feitos 8 cafezinhos. Com base nessas informações, calcule os valores de x, y, r e s da tabela e assinale o que for correto.

01) $\frac{r}{s}$ é um número natural.
02) r é um múltiplo de 4.
03) $x > s$.
08) $x + r$ é um número primo.
16) x é um divisor de r.
32) y é um número racional.

cafezinhos	colheres de pó de café	água(ℓ)
8	3	0,5
x	4,5	y
r	s	1,5

O enunciado da questão relaciona grandezas de uso cotidiano, e a forma de apresentação da mesma é aberta, pois o estudante deve calcular o valor das incógnitas para verificar a veracidade das alternativas. Assim, o estudante precisa reconhecer uma relação de proporcionalidade entre as colheres de pó, água e cafezinhos. Após esse reconhecimento, deve utilizar a multiplicação, a divisão e a regra de três para descobrir o valor das incógnitas. Como as alternativas envolvem os termos número natural, múltiplo, etc., o estudante deve conhecer o significado desses termos, bem como alguns símbolos algébricos.

A partir da correção realizada dessa questão, baseados nos critérios de correção descritos anteriormente, construímos a seguinte tabela com a qual podemos inferir que o item foi resolvido facilmente pela maioria dos participantes e os modos e procedimentos de resolução adotados levaram à obtenção da pontuação integral da questão.

[6] Questões de alternativas múltiplas são aquelas que apresentam seis alternativas, indicadas com os números 01, 02, 04, 08, 16 e 32. A resposta correta será a soma dos números correspondentes às alternativas verdadeiras. O valor numérico do somatório encontrado, obrigatoriamente, terá dois algarismos (MANUAL DO CANDIDATO- UEPG).

[7] Segundo Laville e Dionne (1999), a abordagem é indutiva: o pesquisador parte com certo número de unidades, agrupando as de significação aproximada para obter um primeiro conjunto de categorias rudimentares. Esse conjunto constitui o ponto de partida de um procedimento que, por etapas sucessivas, conduzirá às categorias finais (LAVILLE e DIONNE, 1999, p.219).

[8] Segundo Gomes (1994), é a articulação dos dados com a fundamentação teórica.

Tabela 1: distribuição das pontuações obtidas pelo grupo de professores e alunos na questão 1.

Sujeitos da pesquisa	**Pontuações**							
	Pontuação integral		**Pontuação parcial**		**Pontuação nula**		**Total da amostra**	
	Código 1		Código 2		Código 3			
	N	%	N	%	N	%	N	%
Professores	24	100	0	0	0	0	24	32,43
Estudantes	30	60	13	26	7	14	50	67,57
Total da amostra	54	73	13	17,6	7	9,46	74	100,00

Por meio da análise da produção escrita dos participantes, conseguimos estabelecer três grupos de modos de resolução, os quais apresentamos a seguir:

No Grupo G1 temos doze produções, nas quais os participantes encontraram os valores das incógnitas da tabela por meio de uma regra de três explícita. A atribuição da pontuação completa ou parcial estava vinculada à atribuição de verdadeira ou falsa às alternativas 01, 02, 04, 08, 16, 32. Lembramos que a pontuação parcial foi atribuída ao participante cujo valor numérico da somatória incluiu pelo menos uma alternativa verdadeira e nenhuma alternativa falsa. Das alternativas apresentadas, apenas duas eram falsas (alternativas 01 e 08). Desta forma, dez produções receberam pontuação integral e duas (E05 e E34) receberam pontuação parcial. Segue a produção escrita do participante E04:

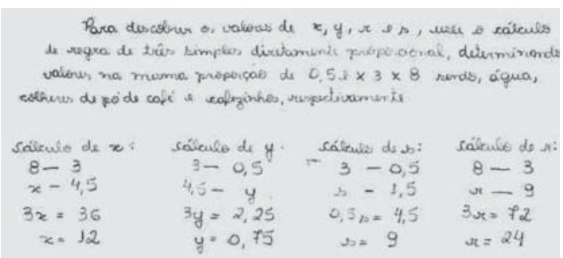


Figura 1: produção escrita presente na prova do participante E04 do grupo G1.

Podemos inferir que houve indícios de pensamento algébrico na produção escrita do grupo G1, pois o participante E04 usou incógnitas para encontrar os valores desconhecidos da tabela. Porém, essas incógnitas já se encontravam explicitadas no enunciado da questão, podendo ter induzido os participantes a este tipo de resolução. O enunciado da questão dá sentido à tabela. A linguagem utilizada é uma linguagem algébrica e sua utilização foi correta na maioria dos registros, bem como a simbologia utilizada. As letras, nessas produções, foram consideradas como incógnitas (KIERAN, 1992).

O segundo grupo de modos de resolução (Grupo G2) apresentou cinquenta produções nas quais os participantes encontraram o valor das incógnitas utilizando uma regra de três implícita. Dessas produções, 45 receberam pontuação integral e cinco receberam pontuação parcial.

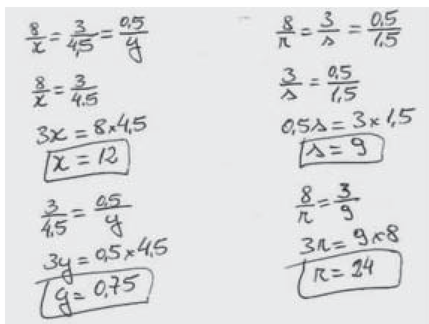


Figura 2: produção escrita presente na prova do participante P04 do grupo G2.

Nesse grupo, o pensamento algébrico se caracteriza pela representação implícita da regra de três, na qual as letras também são consideradas incógnitas e os cálculos explicitam a propriedade das proporções que se enuncia: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A linguagem e o simbolismo algébrico podem ter sido utilizados devido ao enunciado da questão que induz a este modo de resolução.

O terceiro grupo de modos de resolução (Grupo G3) apresentou cinco produções nas quais os participantes encontraram o valor das incógnitas utilizando a proporcionalidade, considerando que as grandezas são diretamente proporcionais. Todas as produções desse grupo receberam pontuação integral. Apresentamos aqui a produção escrita do participante P08:

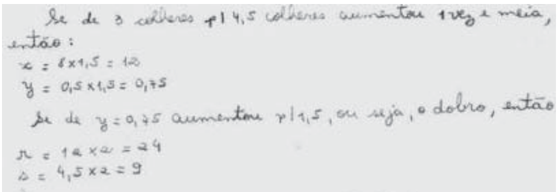

Se de 3 colheres p/ 4,5 colheres aumentou 1 vez e meia, então:
x = 8 x 1,5 = 12
y = 0,5 x 1,5 = 0,75
Se de y = 0,75 aumentou p/ 1,5, ou seja, o dobro, então
r = 12 x 2 = 24
s = 4,5 x 2 = 9

Figura 3: produção escrita presente na prova do participante P08 do grupo G3.

Inferimos que houve indícios do pensamento algébrico nesse grupo por meio de relações de proporção entre os elementos da tabela numa linguagem natural. Segundo Fiorentini et al. (2005), podemos perceber aqui um exemplo da fase pré-algébrica na qual a letra foi considerada como letra avaliada (KIERAN, 1992) e uma concepção estrutural das noções matemáticas, pois estas são concebidas como objetos (SFARD, 1991).

Foram excluídos dos agrupamentos os participantes E06, E07, E08, E09, E10, E11, E21, os quais não apresentaram produção escrita e apenas assinalaram uma das alternativas falsas.

Após esse exemplo, passemos à sistematização das análises. Nas questões 1, 4, 5, 7, 8 e 9, os participantes optaram por regra de três e proporção. Acreditamos que muitas vezes a proporcionalidade é associada a procedimentos mecânicos, na propriedade das proporções ou na regra de três simples e que raciocínio proporcional é concebido apenas como a utilização de um algoritmo de resolução. O documento do NCTM (2000) evidencia a proporcionalidade como um tópico a ser abordado com outros tópicos matemáticos durante todos os anos de escolaridade básica.

Na questão 2, os participantes utilizaram apenas o conceito de média aritmética. O documento do NCTM (2000) considera que "os alunos devem desenvolver uma compreensão dos dados agregados" (p.54). Dessa forma, os alunos poderão visualizar os dados como um todo e assim necessitar de ferramentas para descrever esse conjunto, esse todo. As medidas de tendência central, dentre elas a média, tornam-se úteis como descritores.

Na questão 3, os participantes optaram por equações do 1º grau para descobrir os valores das incógnitas de um quadrado mágico. Acreditamos que essa opção, como já mencionamos anteriormente, foi induzida pelo enunciado da questão. O documento do NCTM (2000) ressalta que o foco da álgebra é "a capacidade de reconhecer e trabalhar eficazmente com relações lineares e suas representações correspondentes" (p.248). Este documento considera que o trabalho envolvendo equações constitui um importante componente do currículo e que os conhecimentos dos alunos a respeito desse assunto devem ir "além do simples reconhecimento de que uma letra pode ser usada na representação de uma incógnita em equações" (p.265). Kaput (1999) defende que o professor deve propiciar aos alunos a análise de padrões e regularidades, pois, assim, este encoraja os alunos a trabalharem com símbolos, sem se referir a números, incentivando a compreensão.

Na questão 6, as produções escritas focaram a multiplicação e potenciação de números inteiros, exigindo também que os participantes identificassem e utilizassem conexões entre essas duas operações. Segundo o documento do NCTM (2000), os alunos devem ser capazes de compreender números, suas formas de representação e suas relações entre os sistemas numéricos; além de compreender significados de operações e como elas se relacionam umas com as outras.

As produções escritas dos participantes, na questão 10, abordaram gráficos; umas fazendo uma leitura interpretativa destes, e outras apenas analisando os coeficientes das funções polinomiais, as quais foram informadas no enunciado da questão. Podemos dizer mais precisamente que esta questão aborda estatística e probabilidade. Consideramos que os gráficos auxiliam na comunicação do pensamento ou na investigação de dados por meio de variadas representações e que o confronto com problemas do mundo real pode auxiliar os alunos na busca de estratégias para solucioná-los. Segundo o documento do NCTM (2000), os conteúdos do currículo devem habilitar os alunos para "usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas" (p.262) por meio de diversas representações, dentre elas a representação gráfica. Achamos pertinente destacar a questão 10, que exigia que os participantes analisassem a variação num contexto. Dos 24 professores participantes, 14 não apresentaram produção escrita para essa questão. Podemos inferir que, apesar de terem concluído o Ensino Superior e serem detentores de um diploma de licenciados em Matemática, ainda apresentam defasagem em sua própria formação acadêmica, formação esta mais voltada para a Matemática do ensino superior do que para matemática escolar. Dos 50 estudantes, 35 não apresentaram produção escrita para essa questão. Acreditamos que estes podem "saber Matemática", mas não entenderam o enunciado da questão. Estes resultados nos levam a refletir como os professores e, consequentemente, os estudantes concebem o conhecimento algébrico.

A última questão (questão 11) fez referência ao raciocínio lógico. Cremos que o raciocínio lógico seja um fator importante na aprendizagem da Matemática, pois este pode conduzir os alunos à compreensão do que está sendo proposto e não somente fazer com que decorem e apliquem fórmulas. Inferimos que o pensamento algébrico esteve presente nas estratégias que os participantes precisaram estabelecer para o preenchimento correto da casa marcada no quadro, como pudemos notar na produção escrita. De acordo com o NCTM (2000), o professor deve "ajudar os seus alunos a reconhecerem o raciocínio enquanto componente central da atividade matemática" (p.224).

Considerações finais

Em nossa pesquisa, pudemos constatar indícios de todos os indicadores que estabelecemos de início para o pensamento algébrico. O uso de incógnitas foi o que mais se evidenciou nas produções. Acreditamos que isso se deva ao fato de os próprios enunciados das questões, os quais já apresentavam letras, induzirem os participantes a utilizá-las em suas produções.

Das características fundamentais apresentadas por Lins e Gimenez (1997), aritmeticismo foi a mais evidenciada nas produções. Sabemos que a aritmética, com suas operações, símbolos e propriedades, é base do pensamento algébrico e está ligada à operacionalidade, mas consideramos que o pensamento algébrico vai além. Inferimos que os participantes recorreram, segundo Arcavi (1994), aos números e às operações aritméticas básicas para produzir significados, demonstrando que não sentiram necessidade do conhecimento algébrico ou até mesmo diante da dificuldade em manipular e "ler" expressões simbólicas como dois aspectos diferentes de resolver problemas. Com relação às letras apontadas por Kieran (1992), tivemos a predominância da letra como incógnita e da letra avaliada. Já a concepção que mais apareceu foi a operacional (SFARD, 1991), contudo houve indícios, como visto na análise da questão 1, da concepção estrutural em algumas questões.

No que se refere à linguagem e ao simbolismo algébrico, pudemos perceber que a linguagem natural permeou grande parte das produções escritas. Acreditamos que os professores demonstraram, em suas produções, que muitas vezes não concebem a Matemática com uma linguagem própria, com sua ampla simbologia e, ao utilizarem essa simbologia, fazem-na erroneamente. A produção escrita do participante P03, do grupo G2, na questão 6, evidencia nossas afirmações. O participante escreve $a^2 \rightarrow +$, considerando que um número negativo elevado ao quadrado tem sempre como resposta um resultado positivo. Da mesma maneira o participante procede ao escrever $b^3 \rightarrow$ -, considerando que qualquer número negativo elevado ao cubo tem como resposta um resultado negativo. Isso pode acarretar aos estudantes grandes dificuldades na leitura e interpretação de muitos textos ou conteúdos matemáticos. Observando a produção do participante P03, os estudantes podem adotar como regra que qualquer número elevado ao cubo tem como resultado um valor negativo, independente de ser este um número positivo ou negativo. Os símbolos matemáticos devem estar bem definidos e usados de forma correta para não gerar dúvidas aos estudantes. O excesso de simbologia pode impedir que os estudantes compreendam a ideia representada e assim não produzam significados.

Pudemos também observar que a fase mais usada nas produções é a fase de transição (FIORENTINI et al., 2005), uma fase intermediária, não tão simples como a retórica nem tão desenvolvida como a simbólica. Contudo, existem algumas generalizações que não seriam possíveis de serem feitas apenas com a fase de transição. A produção escrita do participante E13, na questão 5, justifica nossa afirmação.

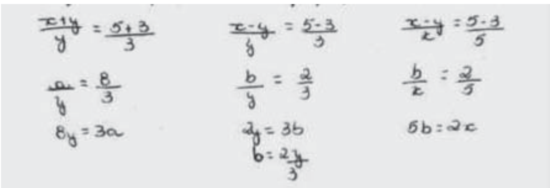


Figura 4: produção escrita presente na prova do participante E13 do grupo G1.

Compreendemos que para entender como a Matemática é processada pelo aluno é preciso entender como ele conecta os símbolos. Para isso, é necessário estabelecer uma relação dialógica entre professor e aluno, a fim de possibilitar que o aluno explicite a leitura que faz da Matemática e assim procurar entender o significado dos símbolos em sua mente.

Referências

ARCAVI, A. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 14(1), 24-35, 1994.

BURIASCO, R. L. C. de; CYRINO, M. C. de C. T.; SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática AVA – 2002**. Curitiba: SEED/CAADI, 2004.

CARPENTER, T. P. et al. **Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school.** Portsmouth, NH: Heinemann, c2003.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática**, 2005, Porto. v.1. p.1-13.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999, p.133-155.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: MacMillan, 1992, p.390-419.

______. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: **The future of teaching and learning of algebra**: the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer, 2004, p.21-33.

______; CHALOUH, L. Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In: OWERS, D. (Ed). **Research ideas for the classroom middle grades mathematics**. New York, NY: Macmillan, 1993, p.179-198.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Ph.D. Thesis. University of Nothing, UK, 1992.

______; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. 2000, Reston: VA.

PESQUITA. I. M. P. **Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8º ano**. 2007. 262p. Dissertação (Mestrado em Educação – Especialidade em Didática da Matemática). Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, 21, 1991, 1-36.

Anexo I – Demais questões aplicadas

2. Determinada loja de fotografias de um *shopping* revela, em média, 20 rolos de filme fotográfico por dia, inclusive nos sábados e domingos. No mês de novembro, a média foi mantida até o dia 25. Do dia 26 ao dia 30, o número de rolos trazidos à loja obedeceu à tabela a seguir. Calcule a média diária de filmes revelados em novembro.

Dia	Número de rolos
26	28
27	27
28	26
29	25
30	24

3. No quadrado abaixo, multiplicando-se os três números de qualquer linha, coluna ou diagonal, o resultado é sempre o mesmo. Então, assinale o que for correto.

01) $c = -4$
02) $e = -36$
04) $a + b = 9$
08) $b - a - c = -23$
16) $d - c = -2$
32) $b + e = -27$

– 12	– 1	a
b	6	c
d	e	– 3

4. O *byte* é a unidade de medida das informações armazenadas em computadores. Seus múltiplos são:

kilobyte = 2^{10} bytes
megabyte = 2^{10} kilobytes
gigabyte = 2^{10} megabytes

Sobre *byte*, assinale o que for correto.

01) Um arquivo de 2 kilobytes equivale a 2^{20} bytes.
02) Um kilobyte equivale a 2^{100} megabytes.
04) Um arquivo de 8 gigabytes equivale a 2^{23} kilobytes.
08) Um arquivo de 2 megabytes equivale a 2^{21} bytes.
16) Um gigabyte equivale a 2^{30} bytes.
32) Um arquivo de 4 megabytes equivale a 2^{20} gigabytes

5. Se $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, $x + y = a$ e $x - y = b$, assinale o que for correto.

01) $3a = 8y$
02) $b = \frac{3y}{2}$
04) $5x = 2b$
08) x equivale a 60% de y
16) Se $b = 20$, então $x > y$
32) Para $a = 40$, x é um número natural.

6. Considerando os números inteiros a, b e c, tais que $a < b < 0$, assinale o que for correto.

01) $a^2.b^3 > 0$
02) $a.b > 0$
04) $a - b > 0$
08) $b - a > 0$
16) $a + b > 0$
32) $(a + b).a > 0$

7. Um investidor compra, no dia 20/8/2004, um lote de ações da empresa *A*, cotado em R$ 1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes à "taxa de corretagem" chegam a R$ 24,50, e os "emolumentos", a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto.

01) Se, em 20/12/2004, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$ 1.640,00, o ganho patrimonial do investidor, considerando-se para o cálculo as despesas operacionais, será de 60%.

02) Em 20/9/2004, o lote de ações estava cotado a R$ 1.500,00. A valorização, sem levar em consideração quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.

04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.

08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%, o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.

16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.

32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$ 25,00 com despesas operacionais. Assim, com as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$ 200,00.

8. Um investidor compra, no dia 20/8/2004, um lote de ações da empresa *A*, cotado em R$1.000,00. Considerando que as despesas operacionais correspondentes à "taxa de corretagem" chegam a R$ 24,50, e os "emolumentos", a R$ 0,50, e são pagos à parte, assinale o que for correto.

01) Se, em 20/12/2004, o valor total do lote de ações estiver cotado a R$ 1.640,00, o ganho patrimonial do investidor, considerando-se para o cálculo as despesas operacionais, será de 60%.

02) Em 20/9/2004, o lote de ações estava cotado a R$ 1.500,00. A valorização, sem levar em consideração quaisquer despesas operacionais, foi de 50%.

04) Para que o lucro do investidor seja de 100% em relação a todo o dinheiro gasto na operação, é necessário que o lote de ações atinja a cotação de R$ 2.050,00.

08) Se, ignorando as despesas operacionais, o investidor pretende que seu lote de ações tenha a valorização mínima de 35%, o lote de ações deverá atingir a cotação de R$ 1.350,00 ou mais.

16) O percentual de corretagem cobrado, para o lote negociado, é de 0,245%.

32) Quando seu lote de ações atingiu a cotação de R$ 1.250,00, o investidor o vendeu, gastando mais R$ 25,00 com despesas operacionais. Assim, com as despesas efetuadas com a compra e a venda, seu ganho foi de R$ 200,00.

9. João dispõe de R$ 30.000,00 e quer comprar um imóvel. Para isso analisa a planta de um pequeno apartamento, de forma retangular, medindo 12cm por 18cm, na escala 1:50. O custo do m^2 é R$ 600,00. Nestas condições, assinale o que for correto.

01) A área do apartamento é de $54m^2$.

02) Ele precisa ainda de R$ 2.400,00.

04) Com o dinheiro que tem, ele pode comprar um apartamento de até $50m^2$.

08) Ele pode comprar o apartamento e ainda sobram R$ 2.000,00.

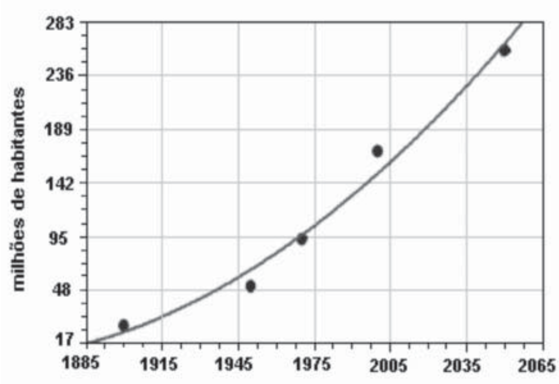
16) Ele precisa ainda de R$ 3.200,00.

32) Ele tem a quantia exata para a compra.

10. A população do Brasil, em 1900, era de 17.438.434. Em cinquenta anos a população passou a ser 51.944.397. Em 1970, quando o Brasil ganhou o tricampeonato, e toda a torcida brasileira cantava "90 milhões em ação", isto correspondia a 93.139.037 habitantes. Em 2000, a população já contava com 169.590.693 pessoas. A previsão para 2050 é que a população será de 259.800.000 brasileiros.

Fonte: http://www.ibge.gov.br/ibgeteen/pesquisas/ demograficas.html. Acesso em: 20/8/2006.

No gráfico seguinte, são apresentados os pontos que representam a população em cada um destes anos, e esses pontos são aproximados por uma função.



I. A função pode ser a exponencial: $y = ae^{bx}$, com a>0 e b>0.

II. A função pode ser a polinomial de grau 3: $y= ax^3+ bx^2+ cx +d$, com $a>0$.

III. A função pode ser a polinomial de grau 2: $y= ax^2+ bx+ c$, com $a<0$.

IV. A função pode ser a logarítmica: $y=a \log (bx)$, com $a<0$ e $b>0$.

Estão corretas apenas as afirmativas:

a) I e III.

b) II e IV.

c) I e II.

d) III e IV.

e) I e IV.

11. O "Sudoku" é um jogo de desafio lógico inventado pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783). Na década de 1970, este jogo foi redescoberto pelos japoneses, que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado "número sozinho". É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. *Folha de Londrina*, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8		1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada no quadro a seguir é:

a) 2
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

Gefferson Luiz dos Santos – Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina.

Angela Marta Pereira das Dores Savioli – angelamarta@uel.br. Doutora em Ciências pela Universidade de São Paulo, docente e pesquisadora do Programa em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

RECEBIDO em: 24/8/2010.
CONCLUÍDO em: 28/9/2010.