# ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

# TEACHING AND LEARNING OF CONCEPTS OF COMBINATORIAL ANALYSIS THROUGH THE METHODOLOGY OF PROBLEM SOLVING

**Ana Paula G. da Fonte**[1]

**Vanilde Bisognin**[2]

## Resumo

Neste trabalho, objetiva-se descrever e analisar parte dos resultados de uma pesquisa sobre o ensino dos conceitos de Análise Combinatória, realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi ancorada na teoria de conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner (1981), e, para o trabalho de sala de aula, utilizou-se a metodologia de Resolução de Problemas. Analisaram-se as contribuições que esta metodologia pode oferecer ao ensino e aprendizagem dos conceitos de Análise Combinatória: arranjos, permutações e combinações e, para isso, foi aplicada uma sequência de problemas, resolvida pelos alunos, organizados em pequenos grupos. Os resultados da pesquisa revelaram que o estudo permitiu aos alunos desenvolverem a capacidade de resolução de problemas, aprenderem a trabalhar de forma colaborativa e, à medida que resolviam os problemas, ganhar autonomia.

**Palavras-chave**: Análise Combinatória. Resolução de Problema. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

## Abstract

In this work, it is aimed at to describe and to analyze part of the results of a research on the teaching of concepts of Combinatory Analysis, accomplished with students of a Course of Degree in Mathematics. The research, of qualitative nature, was anchored in Concept of Image's theory and Definition Concept of Tall and Vinner (1981) and, for the classroom work, the Methodology of Resolution of Problems was used. The contributions that this resource can offer to the teaching and learning of concepts of Combinatory Analysis, arrangements, permutations and combinations were analyzed. For that, a sequence of problems was applied, solved by the students, organized in small groups. The results of the research revealed that, with the use of that methodology, the students developed the capacity of resolution of problems, they learned how to work in a colaborative way and, as they solved the problems, they won autonomy.

**Keywords:** Combinatory Analysis. Resolution of problems. Teaching and Learning of Mathematics.

## Introdução

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio, enfatiza-se que "[...] aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas" (BRASIL, 1998,

[1] Mestre em Ensino de Matemática do Centro Universitário Franciscano – Santa Maria/RS.

[2] Profª Drª do curso de Mestrado em Ensino de Física e Matemática, do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA.

p.44). Devido a essa gama de aplicações, cresceu também a importância de desenvolver o pensamento combinatório nos alunos, em diferentes níveis de ensino, configurando-se em uma possibilidade de motivação para o seu estudo. Dessa forma, torna-se fundamental uma abordagem dos conteúdos de Análise Combinatória não apenas para os alunos do Ensino Médio, mas também para aqueles dos cursos de formação inicial de professores em Matemática, por entender-se que esses estudantes devem vivenciar, na Universidade, diferentes abordagens desses conteúdos, a fim de poderem trabalhar com seus alunos, quando forem professores da educação básica.

Quando se trabalham os conceitos de Análise Combinatória, conforme Kapur (1970), nem sempre estão disponíveis os métodos poderosos de resolução de problemas, pois, segundo o autor, esses exigem imaginação e criatividade por parte do aluno. Afirma ainda que, em geral, isto não é o que acontece nas aulas de muitos professores que trabalham estes conteúdos, pois os problemas de combinatória reduzem-se a definições de algumas regras, que exigem dos alunos um mínimo de raciocínio e reflexão.

Nesta pesquisa, teve-se como foco os procedimentos apresentados pelos alunos diante do trabalho com Análise Combinatória em que se considerou a sua participação e a predominância no pensamento combinatório em vez da ênfase nas fórmulas. A pesquisa foi motivada pela percepção de que boa parte dos alunos, segundo levantamento realizado com a turma escolhida para a realização deste trabalho, apresentava dificuldades no tratamento de problemas relacionados à Matemática Discreta, em particular, de probabilidade e combinatória. Além disso, esses alunos revelaram que, no Ensino Médio, esses conteúdos eram de difícil compreensão e que não conseguiam distinguir as diferenças entre os conceitos trabalhados.

Entendendo-se que os conteúdos de Análise Combinatória podem desempenhar um papel fundamental na aprendizagem de métodos gerais de resolução de problemas e considerando-se essencial que o professor conheça a forma como os alunos raciocinam, neste trabalho, investigaram-se os processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de combinatória; verificaram-se as contribuições que emergiram dessa experiência, que tem a Resolução de Problemas como metodologia de trabalho de sala de aula, para a introdução dos conceitos da Análise Combinatória.

## Resolução de problemas

Um problema é uma situação desafiadora, para a qual se busca uma solução. De acordo com Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2006), existem diferentes concepções de ensino com base na Resolução de Problemas: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar para a Resolução de Problemas e ensinar por meio da Resolução de Problemas. Segundo as autoras, George Polya (1994) é o principal representante dessa metodologia de Ensino de Matemática.

Na visão de Prado e Allevato (2010, p.26), essa metodologia "corresponde a teorizar sobre Resolução de Problemas, explicitando fundamentos, regras e passos para realizar esta atividade". Os autores, em seus estudos, sugerem as seguintes etapas para a resolução de um problema: compreensão do problema; concepção de um plano para solucionar o problema; execução do plano; e análise da solução encontrada.

Os estudos de Polya (1994) foram importantes e ainda são referenciais para o estudo da Resolução de Problemas. Dentro da concepção do autor, os procedimentos para solucionar um problema são previamente escolhidos e não levam em conta novas conjecturas, novos procedimentos, aprendizagem de novos conteúdos e desenvolvimento de diferentes estratégias que por ventura possam surgir durante o desenvolvimento das atividades.

Ensinar para a Resolução de Problemas, conforme Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2006), está relacionada com as aplicações da Matemática, constantes na maioria dos livros didáticos utilizados em sala de aula. Os professores, em geral, apresentam o conteúdo de forma teórica e, a seguir, apresentam uma série de problemas, contextualizados ou não, para serem resolvidos, como aplicação dos tópicos estudados.

A concepção ensinar por meio da Resolução de Problemas tem como referenciais os trabalhos de Allevato e Onuchic (2004; 2006, p.8) porque presumem que "se trata de um trabalho em que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se faz através de sua resolução". Essa concepção também está muito bem caracterizada pela definição de Prado e Allevato (2010, p.27)

> Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. Esse tipo de aprendizagem tem a intenção de levar ao aluno uma forma diferente de trabalho, deixando-o usar o seu raciocínio lógico, os conhecimentos prévios de que dispõem, e estimulando a sua criatividade.

De acordo com Onuchic (1999), o Ensino de Matemática deve ocorrer em um ambiente, no qual a investigação esteja presente, orientada pela Resolução de Problemas. Segundo a autora, o ensino sob este enfoque deixa de lado a explicação teórica seguida de uma lista de exercícios de fixação, por parte do professor, para ter o problema como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem.

Na pesquisa realizada, adotou-se a concepção de Ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, com estudo dos conceitos da Análise Combinatória alicerçada na teoria de Conceito Imagem e Conceito Definição de Tall e Vinner (1981).

## Conceito Imagem e Conceito Definição

Nas práticas pedagógicas de muitos professores de Matemática, ao se introduzir um novo conceito, é comum partir da definição formal que muitas vezes envolve outros conceitos prévios e o uso de estruturas matemáticas rebuscadas. Essa formalização em nada contribui para a compreensão de novos conceitos, pois os alunos não percebem o seu significado real. Diante disso, hoje, ganha força a teoria desenvolvida por Tall e Vinner (1981) sobre "imagem do conceito" e "definição do conceito". De acordo com Souza (2007, p.28), essa teoria "[...] faz uma distinção entre a matemática como atividade mental e a matemática como instrumento formal", ou seja, o autor diferencia o modo como é gerado o conceito na mente humana e a formalização Matemática do mesmo.

De acordo com Vinner (1991, p.69), "Adquirir um conceito significa formar um conceito imagem", isto é, a formação de conceitos é precedida de uma imagem mental e, após, a formação dessa imagem conceitual é que o indivíduo passa a descrevê-la por meio de palavras e do uso das estruturas matemáticas para, então, formalizar uma definição do conceito. A formação da imagem do conceito é fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos.

O modo como os conceitos matemáticos são trabalhados na sala de aula pode criar conflitos cognitivos. Nesse sentido, Vinner (1991) observou que muitos estudantes acreditavam que a tangente a uma curva, toca-a em um único ponto, mas não pode cortar a curva. Conforme o autor, isso é verídico no círculo trigonométrico, mas quando considerada a função $y = x^3$ e perguntado qual era a tangente à curva na origem, a maioria dos alunos não conseguiu responder a pergunta. Isso demonstra que os estudantes não possuíam uma imagem do conceito de tangente e, portanto, quando uma situação nova foi apresentada criou-se um conflito.

Para Tall e Vinner (1981, p.152), o Conceito Imagem

> [...] descreve toda estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais e propriedades a elas associadas e os processos. É desenvolvido ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando tanto quando o indivíduo encontra novos estímulos quanto quando amadurece.

No processo de construção do Conceito Imagem, o indivíduo associa ao conceito algo que o reporte a ele, sempre que isso lhe for solicitado, por exemplo, ao necessitar desse conceito, pode lembrar-se de uma expressão, gráfico ou até mesmo de um problema que resolveu por meio dele.

O Conceito Imagem é exclusivo de cada indivíduo por estar relacionado com as experiências e com o ambiente em que a pessoa vive, uma vez que se trata de impressões e representações visuais que ele tem ao entrar em contato com tal conceito. A imagem, por sua vez, é constantemente alterada por ter relação com as experiências vivenciadas pelo sujeito, isto é, como o cérebro reage de maneira diferente aos diversos estímulos recebidos, logo não há um único Conceito Imagem.

A imagem conceitual precede a formalização do conceito. O conceito é construído passo a passo e por meio de diferentes estratégias. A definição do conceito é uma etapa formal que envolve um conjunto de palavras e estruturas matemáticas. Se de fato a compreensão do conceito existe, a sua definição formal é uma etapa que possui significado.

De acordo com Giraldo, Carvalho e Tall (2002, p.2),

> [...] uma imagem conceitual pode ainda estar associada a uma sentença usada para especificar o conceito em questão, denominada definição conceitual que, por sua vez pode ou não ser coerente com a definição matemática correta, isto é, aquela aceita pela comunidade matemática

Entende-se que a teoria desenvolvida pelos autores vem ao encontro do que preconiza a Metodologia de Ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas, por isso alicerçou-se o trabalho de pesquisa, tendo a preocupação de, por meio de problemas, criar diferentes imagens conceituais para auxiliar na compreensão dos conceitos de Combinatória.

## Procedimentos metodológicos

A pesquisa, aqui relatada, centrou-se no estudo do desenvolvimento dos processos de resolução de problemas sobre conteúdos de Análise Combinatória, seguidos por estudantes do primeiro ano de um curso de Licenciatura em Matemática, quando trabalharam este tema na disciplina de Probabilidade e Estatística. Havia 32 estudantes matriculados que participaram da investigação.

Os dados utilizados na pesquisa foram obtidos a partir das produções dos alunos, incidindo sobre os processos de construção das respostas dos problemas sobre Combinatória, e das observações da professora-pesquisadora responsável pela disciplina, durante o trabalho da sala de aula.

O trabalho da sala de aula foi realizado segundo os passos da metodologia de Resolução de Problemas, sugeridos por Onuchic e Allevato (2006): formar grupos e entregar as atividades; observar e incentivar; auxiliar nos problemas secundários; registrar as resoluções na lousa; realizar uma plenária; buscar um consenso; e formalizar o conteúdo. Para o desenvolvimento do trabalho na sala de aula, os alunos foram agrupados em oito grupos de quatro componentes, reunidos de acordo com seus interesses.

O trabalho foi organizado em três Unidades de Ensino, com duração de quatro horas semanais cada uma delas. As aplicações das atividades iniciaram-se procurando atender o nível de dificuldade, partindo do mais fácil para o mais difícil. Essas unidades foram assim constituídas:

a) Unidade 1, dedicada ao estudo do Princípio Fundamental da Contagem;
b) Unidade 2, dedicada ao estudo dos conceitos de arranjos e permutações;
c) Unidade 3, dedicada ao estudo de combinações.

Em todas as aulas, os conteúdos estudados tiveram como ponto de partida um problema gerador. Esses problemas foram retirados ou adaptados dos livros de Krulik e Rudnick (2005).

Cada unidade de ensino foi composta de duas partes: a primeira, trabalhada de forma presencial, na sala de aula, e a segunda, constituída de problemas complementares, em que os alunos trabalharam extraclasse e individualmente.

Para o presente trabalho, limitou-se o relato a apenas um problema de cada unidade e descreve-se o processo de construção das respostas de alguns grupos, com o objetivo de mostrar as estratégias seguidas pelos alunos, que permitiram a construção de diferentes imagens conceituais e auxiliaram na construção do conceito.

## Descrição e análise dos dados

Nesta seção, descrevem-se os processos seguidos pelos alunos na resolução das atividades apresentadas. Para a primeira unidade, foram trabalhados quatro problemas, com diferentes situações, a fim de que os alunos compreendessem o princípio fundamental da contagem.

**Atividade 1:** *Raul está se vestindo para ir à escola. No armário há três calças, nas cores cáqui, cinza e azul-marinho; duas camisas: uma* *listrada e uma xadrez; e dois pares de sapatos: marrons e preto. Se Raul pegar uma peça de cada tipo sem olhar, qual a probabilidade de ele chegar à escola de calças cáqui, camisa listrada e sapatos marrons?*

A atividade foi apresentada aos alunos, reunidos em grupos, sendo explicados quais os passos que deveriam ser seguidos. Nos grupos, a professora-pesquisadora auxiliou os estudantes com os seguintes questionamentos:

*a) Quantas calças Raul possui? Quantas camisas? Quantos pares de sapatos?*
*b) Se Raul usa a calça cinza, quantas escolhas de camisas ele pode ter?*
*c) Se ele usa calça azul-marinho e uma camisa xadrez, quantas escolhas de sapatos ele tem?*
*d) Quantas escolhas diferentes de calças e camisas ele tem? E de camisas e sapatos?*
*e) Quantas combinações diferentes Raul pode fazer, vestindo uma das calças, uma das camisas e um dos pares de sapatos?*
*f) É mais provável que Raul vista calças cinza ou uma camisa listrada? Por quê?*
*g) Qual a probabilidade de Raul vestir uma camisa xadrez? E a calça marinho? E o sapato preto?*
*h) Qual a probabilidade de Raul ir à escola de calça cáqui, camisa listrada e sapatos pretos? E de Raul ir à escola de sapatos pretos, camisa xadrez e calça marinho?*
*i) Se Raul ganhasse mais um conjunto de roupas, sendo uma calça verde, uma camisa preta e um par de sapatos cinza, quantas seriam as possibilidades de combinações diferentes para ele ir à escola?*
*j) Qual a probabilidade de Raul ir à escola vestido com a combinação nova?*

Nesta atividade, foi proposto um problema em que os alunos não deveriam apenas encontrar uma resposta, mas também, por meio do questionamento, tinham que responder outros itens da atividade e, para isso, eles deveriam compreender bem o que foi proposto. Os alunos foram encorajados a organizar uma lista de combinações de roupas, sempre procurando evitar que uma combinação aparecesse uma única vez. Foram também incentivados a fazer um desenho, um diagrama de árvore, tabela de combinações e outras estratégias que os alunos poderiam propor.

A seguir, descrevem-se as respostas de alguns grupos, referentes a esta atividade. Os grupos foram identificados pelas letras do alfabeto. Salienta-se que não foi apresentado um conteúdo antes da realização da atividade e que esse foi construído a partir dos diferentes problemas que compuseram a unidade.

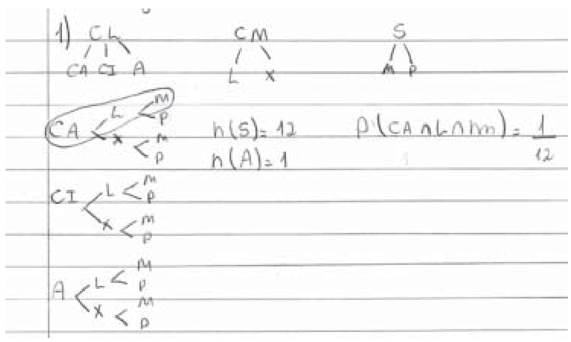


Figura 1: resolução do Grupo A para o problema 1.

Esta resposta foi dada por três grupos diferentes e observa-se que os alunos procuraram resolver o problema, mas não foram além da construção de um diagrama em forma de árvore. Não usaram uma fórmula explícita, apenas apresentaram a operação numérica. Os grupos não conseguiram relacionar o número de elementos do espaço amostral com a multiplicação dos elementos de cada opção de vestimenta.

A construção da imagem conceitual do princípio fundamental da contagem, representada pelo espaço amostral, se deu na forma de uma esquematização, caracterizada pela árvore das possibilidades.

A seguir, a solução apresentada pelo grupo B, que representa a dos demais grupos também.

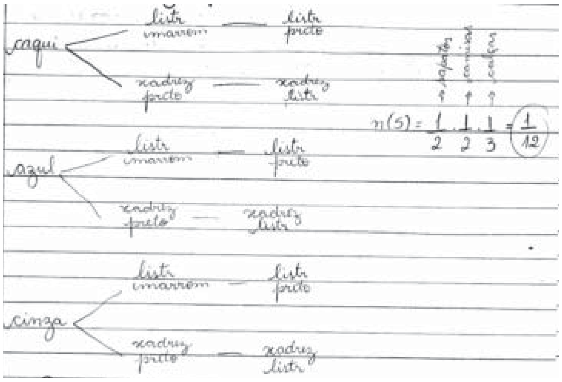


Figura 2: resolução do Grupo B para o problema 1.

Verifica-se que este grupo relacionou o diagrama de árvore com a probabilidade de cada evento (calça, camisa e sapato) para encontrar a solução do problema.

Questionados sobre a forma como construíram a solução, argumentaram que: *"com o diagrama vimos que para cada opção temos as seguintes probabilidades: calça 1 para 3; camisa 1 para 2 e sapatos 1 para 2. Então, ele tinha que vestir uma calça, uma camisa e um par de sapatos, por causa do "e" multiplicamos as chances"*.

Observa-se que o processo de construção seguido pelos grupos foi baseado em duas estratégias: a operação numérica e o diagrama de árvore. Eles não recorreram a fórmulas, tabelas de combinações, desenhos, etc. As estratégias seguidas pela maioria dos alunos permitiram, a partir das esquematizações traçadas, que eles demonstrassem a construção de uma imagem conceitual sobre o princípio fundamental da contagem. Esta constatação ficou clara nas análises das soluções dos demais problemas propostos. Dessa forma, tendo o problema como origem, foi possível construir um novo conhecimento, conforme afirmam Prado e Allevato (2010).

Os passos desse trabalho foram repetidos nas demais situações-problema, e, ao final das atividades propostas, observou-se que os alunos conseguiram descobrir a natureza multiplicativa do processo de contagem; criar diferentes imagens conceituais relacionadas com o princípio fundamental de contagem; e formalizar o conceito.

**Atividade 2**: *Quatro times de futebol disputam um campeonato regional, sendo eles: Atlético F. C., Esportivo F. C., Gaudério F. C. e Cálculos F. C.*

*a) Quais as possíveis classificações, neste campeonato, do primeiro ao quarto colocado?*

*b) Dentre as classificações possíveis, qual a probabilidade de ocorrer a seguinte classificação: CAMPEÃO: Gaudério F. C. e VICE-CAMPEÃO: Esportivo F. C.?*

*Se houvesse, neste campeonato, mais três times disputando a competição, sendo eles: Integral F. C. ; PFC F. C.; Derivada F. C , totalizando, assim, sete times, pergunta-se:*

*c) Com este número de times, quais seriam as possíveis classificações do campeonato do primeiro ao último classificado?*

*d) Qual a probabilidade de haver a seguinte classificação: CAMPEÃO: Gaudério F. C. e VICE-CAMPEÃO: Esportivo F. C.?*

*Que relação é possível de ser feita entre o número de times e as possíveis classificações, se houvesse "n" times?*

Para esta atividade, objetivou-se construir o conceito de arranjo simples e, para isso, seguiram-se os passos de Resolução de Problemas, já descritos. No acompanhamento dos trabalhos dos grupos, a professora propunha os seguintes questionamentos para cada etapa do problema.

*a) Quantas escolhas há para o primeiro lugar? E para o segundo?*

*b) Qual a probabilidade do Cálculos F. C. ser o campeão?*

*c) Escolhendo-se o campeão, quantas opções restam para o segundo lugar?*

*d) Sendo Cálculos F. C. o campeão, qual a probabilidade do Esportivo F. C. ser o vice-campeão?*

*e) Quantos times restam para o terceiro?E para o quarto lugar?*

*f) Qual a probabilidade da classificação ser a seguinte: primeiro: Atlético F. C.; segundo: Esportivo F. C.; terceiro: Gaudério F. C.; quarto: Cálculos F. C.?*

*g) Quantas escolhas há para o primeiro lugar? Para o segundo colocado? Para o terceiro e quarto lugares?*

*h) Escolhidos os quatro primeiros colocados, quantas chances restam para o quinto e sexto colocados?*

*i) E para o último classificado, quantas alternativas restam?*

*j) Ocupado o primeiro lugar, quantos times restam para o segundo?*

Com esta atividade esperava-se que os alunos tentassem usar o princípio fundamental da contagem e que, por meio dele, pudessem identificar algumas particularidades. Era importante que a turma identificasse que ao se ocupar uma posição, a próxima teria um a menos e assim sucessivamente, até se chegar à última posição com apenas um ocupante. Também, esperava-se que os alunos percebessem que todos os elementos do conjunto deveriam ser utilizados. Finalmente, pretendia-se que os estudantes usassem a recorrência para obter a generalização e, assim, obter uma fórmula para a permutação simples.

A maioria dos grupos construiu as soluções a partir do princípio fundamental da contagem, e, utilizando diagramas e esquematizações, conseguiram, por recorrência, fazer a generalização e formalizar o conceito de permutação.

Para construir imagens conceituais que pudessem levar os alunos a compreenderem o conceito de permutação, foram propostos mais três problemas distintos, seguidos de questionamentos.

**Atividade 3:** *Considerando-se, no mesmo campeonato regional da Atividade 2, que serão atribuídos prêmios apenas para o time campeão e o vice-campeão, perguntou-se:*

*a) De quantas formas os prêmios poderão ser distribuídos, havendo quatro times na disputa? E se houvesse sete times na disputa? E se houvesse "n" times na disputa?*

*b) Qual a probabilidade de o Atlético F. C. ser o campeão?*

Com esta atividade, pretendia-se que os alunos construíssem diferentes imagens conceituais sobre arranjo simples; construíssem o conceito e conseguissem diferenciar permutação simples de arranjo simples.

Os questionamentos a seguir auxiliaram os alunos no alcance dos objetivos.

*a) Quais as colocações que interessam para a premiação?*

*b) Quantas possibilidades há para o primeiro lugar? Quantas há para o segundo?*

*c) As chances do terceiro e do quarto lugares interferem nas premiações? Por quê?*

*d) Havendo sete times na competição, de quantas formas os prêmios poderão ser entregues?*

Esperava-se que os alunos recorressem ao princípio fundamental da contagem como estratégia de resolução desta situação e que, por meio deste recurso, percebessem que, no conceito trabalhado anteriormente, a ordem não importava, e nesta outra atividade, além da ordem, deveriam levar em consideração a natureza dos elementos. Na figura a seguir, apresenta-se a estratégia utilizada por um dos grupos sobre as situações (a) e (b):

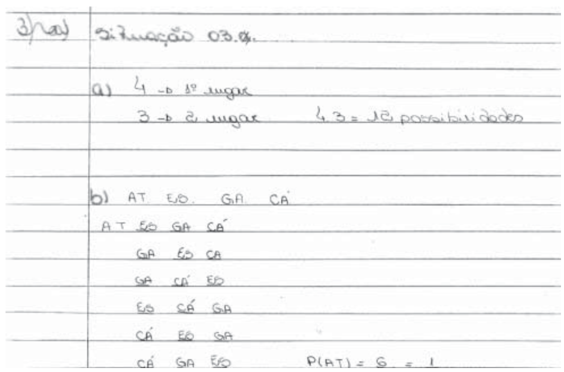


Figura 3: resolução do Grupo A para o problema 3.

Percebe-se que o esquema seguido pelos alunos fazia uso de pequenos agrupamentos e que não interessavam todas as posições, mas apenas as duas primeiras.

A maioria dos grupos realizou esquematizações desse tipo, que contribuíram para a construção de imagens conceituais do conceito de arranjo simples. Isso pode ser comprovado pelas respostas do grupo C ao questionamento da professora:

***Professora:*** *O que significam estes esquemas (referindo-se ao conjunto com os times e os agrupamentos ao lado)?*

***Grupo C:*** *Este é o conjunto de todos os quatro times e dele tiramos duplas, todas as que forem possíveis formar, uma vez que apenas o primeiro e o segundo lugares serão premiados.*

Os alunos foram capazes de fazer uma generalização e, quando questionados na plenária, o grupo B assim argumentou:

***Grupo B:*** *O que pensamos foi realmente generalizar as situações, pois tínhamos "n" elementos que ocupariam duas posições e, por isso, devemos ter n. (n-1).*

Na plenária, discutiu-se a diferenciação entre o conceito de permutação e o de arranjo simples e percebeu-se que a maioria dos alunos conseguiu expressar a diferença.

**Atividade 4:** *João e Mário são amigos e apostadores dos jogos das loterias brasileiras. Certo dia, discutiram sobre quem teria maior chance de ganhar o primeiro prêmio da Mega Sena, caso as apostas fossem assim realizadas: João com dois bilhetes de seis dezenas cada um ou Mário com um bilhete de oito dezenas. Qual dos amigos tem maior chance de ganhar o primeiro prêmio?*

Nesta atividade, o objetivo era construir o conceito de combinação simples. Nos grupos, a professora auxiliava os alunos com os seguintes questionamentos:

a) *Quantas dezenas há num bilhete de aposta da Mega Sena?*
b) *Numa aposta simples, qual o número mínimo de dezenas que podem ser apostadas?*
c) *Quantas apostas de seis dezenas são possíveis de serem feitas?*
d) *Qual a chance de se ganhar o primeiro prêmio com um jogo de seis dezenas?*
e) *Quais as chances de se ganhar o primeiro prêmio, aumentando o jogo para sete dezenas?*

Todos os alunos conheciam que a probabilidade de uma pessoa ganhar o prêmio era de "1 para 50.000.000", mas então ficaram curiosos para saber como chegar a este número.

As primeiras tentativas dos grupos foram fazer esquemas como se fosse um arranjo simples, mas logo perceberam que a ordem do sorteio não importava, mas sim as dezenas que eram sorteadas. A agitação era grande, pois sabiam o resultado que deveriam obter, já que é um resultado amplamente divulgado na mídia. Um aluno do grupo C questionou a professora:

***Aluno***: *Se, no sorteio, fossem sorteadas as dezenas: 06-19-37-45-53-69, seria o mesmo que 45-06-19-69-53-37?*

***Professora***: *Sim.*

***Aluno***: *Então, o negócio é eliminarmos as dezenas repetidas.*

***Professora***: *De que modo vocês podem eliminar todas as repetições?*

***Aluno***: *Eliminando as repetições, pode-se dizer que a ordem não importa, pois tanto faz a dezena ser sorteada no início ou no fim do sorteio.*

***Professora***: *Isso mesmo, e, então, pode-se dizer que o que importa nesses agrupamentos é a natureza dos elementos e não sua ordem.*

***Aluno***: *Se precisamos eliminar as repetições, temos que eliminar as ordens diferentes de sorteio, será que dá para ser por permutação de seis?*

Ao perceber isso, o aluno imediatamente concluiu que, se dividisse o resultado que eles haviam obtido por meio de arranjos simples pelas permutações das seis dezenas, então ele chegaria à resposta. Com esta constatação, o aluno foi até a lousa e explicou para os demais estudantes da turma, sem esperar que os grupos concluíssem os seus trabalhos. Foi na plenária, provocada por este aluno, que a turma conseguiu chegar à generalização e à construção do conceito de combinação simples, após a resolução deste problema e dos demais que compunham esta unidade.

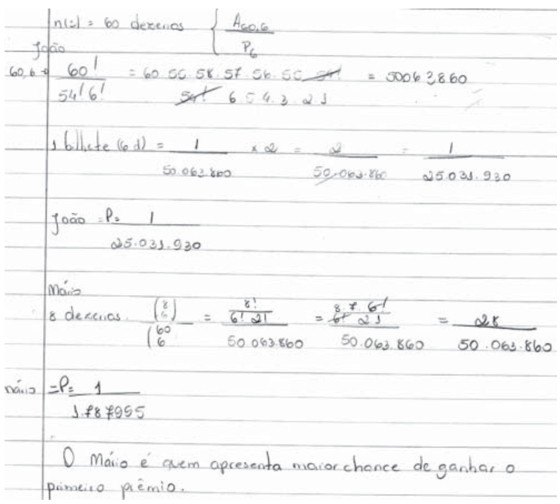


Figura 4: Rresolução do Grupo D para o problema 4.

Todos os alunos participaram, ativamente, da plenária, indagando, colocando novas ideias, sugestões e fazendo referências aos conceitos já estudados, procurando estabelecer as diferenças entre eles. Percebeu-se que os conceitos construídos anteriormente serviram como suporte para explicar e formalizar o conceito de combinação.

## Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi descrever e analisar os resultados de uma investigação sobre o ensino dos conceitos de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas, desenvolvendo algumas reflexões sobre as possibilidades de aplicação na sala de aula. Teve-se como base teórica os pressupostos de Conceito Imagem e Conceito Definição de Tall e Vinner (1981) e, com a Metodologia de Resolução de Problemas, buscou-se analisar as possíveis contribuições para o ensino e a aprendizagem dos conceitos da Análise Combinatória.

A partir da análise das estratégias seguidas pelos alunos na resolução de problemas, foi possível fazer algumas considerações sobre o aspecto conceitual da Análise Combinatória. Das observações do trabalho na sala de aula e da análise das respostas dos alunos, percebeu-se que a maioria não conseguiu associar os conceitos já estudados com as atividades que estavam realizando. Isso mostrou uma limitação conceitual sobre estes conteúdos, pois não conseguiram, inicialmente, evocar um conceito "*conhecido*". Ou seja, os alunos não conseguiram fazer uso da "*imagem de conceito evocado*" que, segundo Tall e Vinner (1981), descreve a parte do conceito ativada em um dado contexto. Segundo os autores, ela é a porção da imagem do conceito que é ativada em um dado momento, e isso ocorre quando o nome do conceito é visto ou ouvido.

Na realidade, o estudo mostrou que os alunos construíram poucas imagens conceituais sobre os conceitos de combinatória, ao longo do tempo de formação no nível médio, pois poucos evocaram e expressaram algum conhecimento do assunto.

As limitações dos alunos sobre o tema puderam ser notadas nas estratégias descritas em seus trabalhos, pois eles se detiveram em escrever o resultado ou fazer sempre o diagrama de árvore, não fazendo uso de outras representações.

Por outro lado, à medida que os problemas foram sendo solucionados, percebeu-se que os alunos foram superando algumas limitações e erros e conseguiram criar novas imagens conceituais ou modificando e aperfeiçoando as que já possuíam sobre os conteúdos de combinatória. As limitações percebidas estão relacionadas com as esquematizações, sempre descritas com base no diagrama de árvore, enumeração e fórmula, não tentando construir tabelas, desenhos, listagens, entre outras representações; limitações de entendimento dos enunciados dos problemas; problemas de escrita e de expressão oral; dificuldades nos raciocínios indutivos e recursivos. De acordo com Batanero et al. (1994, apud CORREIA, 2008, p.352), "os processos de construção das respostas, ao envolverem os raciocínios indutivo, analógico e recursivo, enfatizam a importância de Combinatória no desenvolvimento destes raciocínios, essenciais à resolução de problemas". Os alunos revelaram, também, dificuldades em estabelecer conexões entre arranjos, permutações e combinações.

Por outro lado, a investigação permitiu aos alunos aprofundarem as suas estratégicas espontâneas, vencendo limitações e erros. Percebeu-se que este avanço ocorreu mais fortemente nas operações de combinação e permutação simples e que os alunos foram avançando na construção do pensamento combinatório em diferentes estágios. O estudo do princípio fundamental da contagem, como um estágio anterior à introdução dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, revelou-se eficaz e ajudou os estudantes na compreensão dos problemas e na construção de imagens conceituais relacionadas com estes conteúdos.

No desenvolvimento do trabalho foi possível perceber que os passos da metodologia de resolução de problemas sugeridos por Onuchic e Allevato (2006) e as atividades propostas para a construção dos conceitos, na ótica de Tall e Vinner (1981), foram contemplados nesta investigação.

## Referências

BATANERO, C.; NAVARRO, P. V.; GODINHO, J. Effect of the implicit combinatorial model n combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics**, 32, 1997, p.181-199.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998.

CORREIA, P. F.; **Raciocínios em combinatória de alunos do 9º ano de escolaridade.** 2008. Dissertação de Mestrado em Ciências – Universidade do Minho, Braga, 2008.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.; TALL, D. **Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada**. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf. Acesso em: 20 maio 2008.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent**. Paris: Press Universitaires de France, 1955.

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v.3, n.1, 1970, p.111-127.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. A. **Problem-driven Math:** applying the mathematics beyond solution, grades 6-8. New York: McGraw Hill, 2005.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em educação matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

______. Ensino-aprendizagem: avaliação de matemática através da resolução de problemas – uma possibilidade para o trabalho de sala de aula. In: VII REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 7, 2006. Águas de Lindóia: **Anais...** São Paulo: PUCSP, 2006, 1 DC-ROM.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PRADO, M. A.; ALLEVATO, N. S. G. O ensino-aprendizagem: avaliação de geometria através da Resolução de Problemas. **Actae Scientiae**, v.12, n.1, p.24-42, 2010.

SOUZA, F. E. de. **A integral na visão de professores de cálculo diferencial e integral frente à produção de alunos.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, PUCSP, São Paulo, 2007.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, 1981.

VINNER, S. The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

Ana Paula G. da Fonte é mestre em Ensino de Matemática pelo Centro Universitário Franciscano-UNIFRA, professora do ensino municipal de Itaqui. E-mail: profaleao@gmail.com.

Vanilde Bisognin é doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, integrante do corpo docente do curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. E-mail: vanilde@unifra.br.

RECEBIDO em: 18/9/2010.

APROVADO em: 3/11/2010.