BOLAS QUE NO SON "BOLAS"

Balls that are not "balls"

Juan E. Nápoles Valdes

Resumen

En este trabajo presentaremos algunas de las múltiples direcciones en que puede ser útil la manipulación de objetos matemáticos en el aprendizaje de la Matemática y la significación para la Educación de la Matemática, un uso que puede ser caracterizado como una tentativa para investigar los desarrollos conceptuales históricos, para profundizar nuestra comprensión de pensamiento matemático y para aumentar los logros conceptuales de los estudiantes. Aplicamos nuestras ideas a la noción de distancia en $\mathbf{R}^2$.

Palabras claves: Bolas. Distancia. Vecindades.

Abstract

In this paper, we present the manipulation of mathematical objects in the learning of mathematics and the significance for the Education of Mathematics, as an attempt to investigate the conceptual developments history, to deepen our understanding of mathematical thinking and to increase students' conceptual achievement. We apply our ideas to the notion of distance in $\mathbf{R}^2$.

Keywords: Balls. Metric. Neighborhoods.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns dos vários endereços que podem ser úteis na manipulação de objetos matemáticos na aprendizagem da matemática e significado para o Ensino de Matemática, um uso que pode ser caracterizado como uma tentativa de investigar a evolução histórica conceitual para aprofundar nossa compreensão do pensamento matemático e aumentar os resultados acadêmicos dos conceituais. Nós aplicamos as nossas ideias para a noção de distância em $\mathbf{R}^2$.

Palavras-chave: Bolas. Distância. Vizinhança.

Introducción

Hojeando un ejemplar de la revista Educação *Matemática em Revista-RS*, me encontré un interesante artículo que bajo el sugerente título **Existem bolas cuadradas?**[1] presentaba y manipulaba conceptos y ejemplos relativos a distancia y espacios métricos, manejo muy parecido al que realizo con mis estudiantes. A partir de aquí, mi mente emprendió un viaje que comienza hace más de un siglo…

La Matemática, como afirma Santaló (1966), debe empezar por la intuición, pero esta a veces nos conduce a resultados no consistentes con el patrón de rigor actual. La presentación de contribuciones originales de matemáticos que, en su momento, fueron consideradas "exactas" y luego desechadas, además de contribuir a la cultura matemática que mencionaba Klein (1895), permite mostrar, entre otras cosas, que la Matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden, su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos.

[1] Leivas (2003).

En el primer número de 1899, de una importante revista dedicada a la enseñanza de matemáticas, Henri Poincare[2] indicó claramente su posición en las relaciones entre los desarrollos conceptuales e históricos

> Sin duda alguna, es difícil para un maestro enseñar un razonamiento que no lo satisface completamente… Pero la satisfacción del maestro no es el único propósito de la enseñanza… Sobre todo uno debe preocuparse por la mente del estudiante y de lo que nosotros deseamos que llegue a ser. Los zoólogos reclaman que el desarrollo embrional de los animales resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados de épocas geológicas. Parece que lo mismo sucede al desarrollo de la mente. La tarea de los educadores es la de hacer que los niños sigan el sendero que fue seguido por sus padres, pasando rápidamente por ciertas etapas sin eliminar algunas de ellas. De esta manera, la historia de las ciencias tiene que ser nuestra guía. (POINCARE, 1899, p.159)

Poincaré dio ejemplos de conceptos para ser enseñados en una etapa intuitiva antes de presentarlos rigurosamente. Entre estos ejemplos figuran las fracciones, la continuidad, y el área. Por lo que sabemos, Poincaré nunca utilizó sus ideas directamente con maestros, cosa que sí hizo Felix Klein, otro partidario del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza. Así, Klein aplicó sus ideas en cursos para maestros futuros y en textos que él escribió[3].

Klein apoyó la traducción alemana del famoso libro **A study of Mathematical Education** de Benchara Branford[4] en el que, según Fauvel (1991, p.3), no obstante, lo que Klein (1924) escribió en sus artículos y libros[5], eran recomendaciones avanzadas para la época. Cuando la opinión de Poincaré sobre el uso de la historia nació de su deseo por abolir el uso de lógica matemática y los excesos de rigor recomendado por algunos de sus colegas. Klein se interesó en la dicotomía de *"intuición contra rigor"* y, creyó que la escuela debe preocuparse por la intuición

> Mantengo la intuición matemática… Es siempre distante el avance del razonamiento lógico y cubre un campo más ancho… Yo ahora quizás introduzca un excursus histórico, mostrando que en el desarrollo de la mayor parte de las ramas de nuestra ciencia (las matemáticas), la intuición fue el punto de partida, mientras que el tratamiento lógico fue a continuación. Esto se cumple de hecho, no sólo en el origen del cálculo infinitesimal como un todo (este asunto fue discutido al principio del trabajo de Klein) sino también de muchos tópicos que han nacido sólo en el presente siglo (el XIX). (KLEIN, 1986, p.246)

Klein (1895) reclamó que en la escuela, así como en la investigación, la fase de formalización debe ser precedida por una fase de exploración basada en la intuición.

Los comentarios anteriores (y posteriores) nos llevan a adoptar el punto de vista del matemático práctico[6] que desafía la suposición que el conocimiento matemático es a priori e infalible. Argumenta que el conocimiento matemático es, en realidad, falible y, en este sentido, es similar al conocimiento de las ciencias naturales. *"Nuestro dogma filosófico heredado y no examinado es que la verdad matemática debe poseer absoluta certeza. Nuestra experiencia actual en el trabajo matemático ofrece incertidumbre en abundancia"* (HERSH, 1986, p.23)[7].

Una suposición que subyace en esta afirmación es que saber matemática es hacer matemática. Lo que caracteriza a la Matemática es su construcción, sus actividades creativas o procesos generativos. Esta visión de la Matemática "en acción" es consistente con la concepción de la enseñanza de la Matemática sostenida por diversos matemáticos (HALMOS (1975), POLYA (1963), STEEN (1988), THOM (1973)) y muchos

[2] Para mayores detalles biográficos del matemático, físico y filósofo francés Jules Henri Poincaré (1854-1912) puede consultarse, por ejemplo, Darboux (1913). Para una mayor información técnica, consúltese por ejemplo Mawhin (1994) y Nápoles y Negrón (1994).
[3] Recomendamos el ameno y excelente trabajo de Diego Pareja Heredia (s/f).
[4] Editado en 1921 por Clarendon Press, sobre el trabajo original de 1908.
[5] Ver Klein (1924).
[6] Ver Hersh (1986), Lakatos (1986) y Putnam (1986).
[7] Similar posición es adoptada por Kline (1985).

en Educación Matemática; una concepción reflejada en documentos tales como **The Cockcroft Report** (Committe of Inquiry into the Teaching of Mathematics in School (1983)) y **Every body counts** (National Research Council 1989-1995[8]). La concepción de la enseñanza de la Matemática que se recoge en estos documentos es aquella en la que los estudiantes se ocupan en actividades con un fin, que emergen de situaciones problémicas, que requieren razonamiento y pensamiento creativo, recolección y aplicación de información, descubrimiento, invención y comunicación de ideas y comprobación de esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación, sin negar, por supuesto, el valor y el lugar de los conceptos y procedimientos en el curriculum de Matemática.

Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de los conocimientos matemáticos, del razonamiento empírico-deductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo.

Todo lo anterior podemos reafirmarlo con el hecho que el desarrollo de la Matemática ha seguido un proceso heurístico – demostrado históricamente, contrario a los defensores del estilo deductivista que pretenden que la deducción es el patrón heurístico de la Matemática y que la lógica del descubrimiento es la deducción, al igual que la mayoría de los conceptos desarrollados por un matemático aislado.

El problema principal, en la Educación Matemática, es que estos modelos o metodologías no se han llevado – salvo muy pocos casos – al terreno de la enseñanza de la Matemática, siendo ellos de prioridades primordiales.

El término visualización es de uso reciente en Educación Matemática para describir aspectos tales como (ZIMMERMANN y CUNNINGHAM, 1991, p. 17)

> ...en la visualización matemática lo que nosotros estamos interesados es precisamente en la habilidad de los estudiantes en dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o con ordenador) para representar un concepto o problema matemático y utilizar el diagrama para alcanzar la comprensión, y como una ayuda en la resolución del problema... Visualizar un problema significa comprender el problema en términos de un diagrama o imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnología) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la compresión matemática.

En este trabajo, presentaremos algunas de las múltiples direcciones en que puede ser útil la manipulación de objetos matemáticos en el aprendizaje de la Matemática y la significación para la Educación de la Matemática, un uso que puede ser caracterizado como una tentativa para investigar los desarrollos conceptuales históricos, para profundizar nuestra comprensión de pensamiento matemático y para aumentar los logros conceptuales de los estudiantes. Nuestras ideas son ilustradas tomando como caso particular la noción de distancia, y el trabajo de Leivas (2003) ya mencionado, como punto de partida.

La noción de distancia

La noción de métrica o medida está inmersa en las matemáticas, al menos, desde los mismos orígenes de la *Geometría.* Cuenta Heródoto (Siglo V A.C.) en la historia del mundo antiguo, que, la geometría tuvo su origen en Egipto, y estaba asociada a las técnicas de medir terrenos; de allí su nombre griego: de *geo*, tierra y *metron*, medida. La medida es tema importante en toda rama de las ciencias fácticas, y particularmente llega a casi todo el espectro del análisis y las matemáticas aplicadas, desde las ecuaciones diferenciales hasta la teoría de probabilidades.

La teoría de la medida se convirtió en una parte independiente del análisis comenzando el siglo XX con los trabajos de Henri Lebesgue (1875-1941), Maurice Frechet (1878-1973) y Emile Borel (1871-1956) de un lado, y del otro con los aportes a la construcción de los espacios, llamados abstractos, por David Hilbert (1862-1943) y Stephan Banach (1892-1945) y la fuerza que imprimió a estos temas la escuela polaca de matemáticas liderada por Zygmunt Janiszewski (1888-1920), primero, y luego por Waclaw

[8] Disponible en http://www.lib.utexas.edu/taro/utcah/00358/cah-00358.html acceso 26 de mayo de 2011.

Sierpinski (1882-1969), Kazimierz Kuratowski (1896-1980), Stefan Mazurkiewicz (1888-1945), Alfred Tarski (1902-1983) y Stanislaw Ulam (1909-1984), entre otros. Un impulso importante en la generalización del estudio de la teoría de la medida, a nivel universitario, la inició Paul R. Halmos (1916-2006)[9] con su libro, ahora un clásico, **Measure Theory**. Halmos, un discípulo de J. L. Doob (el mismo de los Procesos Estocásticos), fue asistente de John von Neumann en el *Instituto de Estudios Avanzados de* la Universidad de Princeton y es hoy, un personaje de gran estatura en la comunidad matemática mundial.

La brevedad de esta nota, no permite estudiar las métricas en extenso. Un estudio detallado de estos temas se encuentra en las referencias[10]. Pero, la comprensión de lo que sigue no requiere más que la definición de métrica.

Una métrica definida en un conjunto producto S×S, siendo S no vacío, es una función *d*, de valor real, con las siguientes propiedades:

(i) d (x,y)≥0. Para todo par (x, y) en SxS y d (x, y) = 0, si y solo si x = y (No negatividad).

(ii) d(x,y)=d (y,x). Siempre que (x, y) en SxS (Simétrica).

(iii) d(x,z)≤d(x,y)+d(y,z), para todo x, y, z en S (Desigualdad Triangular).

Figura 1 - Maurice Frechét

[9] Ver Obituario de Paul Richard Halmos en http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos.htm acceso 26 de mayo de 2011.

[10] Fraguela (1987), Royden (1968) y una introducción aceptable para nuestros propósitos puede consultarla en el trabajo de Leivas (2003) ya citado.

A la función *d* así definida, se le da el nombre de *métrica*, o *función distancia* en S. A funciones como *d,* se les da el nombre de funciones de conjunto, porque en efecto, asocian a cada conjunto de su dominio, un número real. El par (S,*d*) se conoce en el Análisis Matemático, como un *Espacio Métrico*, todos estos conceptos son debido a la labor del matemático Frechet[11] cuya tesis doctoral defendida en el 1906 marcó la consolidación de una disciplina matemática conocida hoy como *Análisis Funcional* al formalizar los trabajos de Volterra, Arzela, Hadamard y Cantor.

Ejemplos. En aras de completar el ya mencionado trabajo de Leivas mostraremos algunos casos en $\mathbf{R}^2$, aunque la definición será general.

1) Un espacio métrico sencillo y cercano a nosotros es el espacio euclídeo, definido en $\mathbf{R}^n$ por la llamada métrica euclídea usual:

$$d_2(x, y)= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Donde, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2, \ldots ,y_n)$.

Las siguientes son también métricas definidas en $\mathbf{R}^n$. En todos los casos dejamos al lector comprobar que las propiedades (i)-(iii) anteriores se cumplen.

2) $d_1(x, y)= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$. Con $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2, \ldots ,y_n)$.

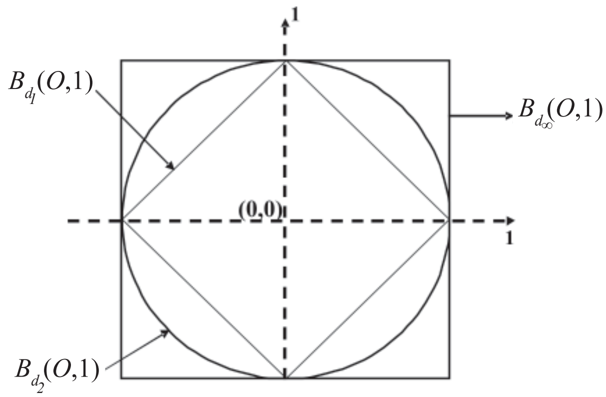
3) $d_\infty(x, y)= \max_{1\le i\le n}\{|x_k - y_k|\}$ Con $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2, \ldots ,y_n)$.

Las bolas con cada una de estas distancias, admiten una representación simple, son círculos, rombos y cuadrados (FRAGUELA, 1987) y sirven a Leivas (2003) para darle nombre a su artículo. Ver una representación esquemática de ellas en la Figura 2, donde por comodidad se han representado las bolas cerradas centradas en el origen y con radio 1.

[11] **Maurice René Fréchet** matemático francés nacido en Maligny, el 2 de septiembre de 1878 y falleció en París, el 4 de junio de 1973. Se destacó por sus resultados en Topología, Probabilidad y Estadística.

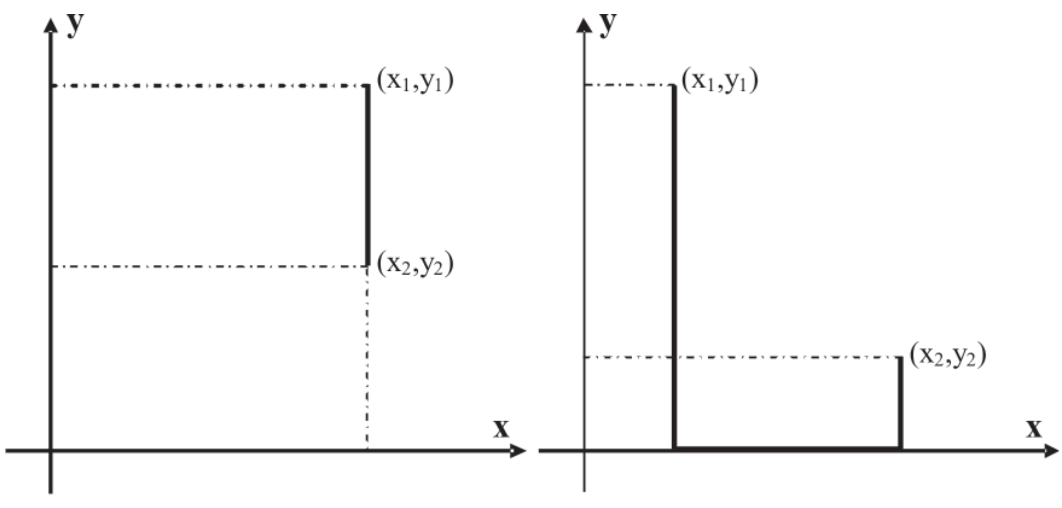
Sin embargo, existen otros ejemplos de métrica, en los que las bolas no admiten una interpretación geométrica tan sencilla. Por ejemplo:

Figura 2: Bolas en R^2 con distintas métricas.



4) Métrica del Bosque. Representemos en $\mathbf{R}^2$ la situación de una tribu que habita en un lugar muy boscoso, con un río situado en el eje y=0 con respecto al habitual sistema de coordenadas cartesianas. Los habitantes de la mencionada tribu para llegar al aula han hecho brechas perpendiculares al río. Si alguien desea ir de un punto (x_1,y_1) a un punto (x_2,y_2), solo puede hacerlo por las brechas o por la orilla, debido a lo espeso del bosque (ver la Figura 3 siguiente).

Figura 3: Distancia según la Métrica del Bosque.



¿Cuál es la representación geométrica de las bolas con esta métrica? Construyamos tres casos:

a) La bola cerrada centrada en el origen y radio 1, llamémosla B_1.
b) La bola cerrada centrada en el (0,1) y radio ½, en este caso B_2.
c) La bola cerrada centrada en el (0,1) y radio 2, B_3.

Es fácil obtener que la bola B_1 del caso a) coincide con la bola $B_{d_1}(O,1)$, es decir, un rombo.

En el caso b), como el radio es menor a la distancia al origen, solo se puede recorrer verticalmente sobre el eje y, media unidad, por tanto es el segmento centrado (1/2,3/2) sobre dicho eje.

El caso c) es una combinación de estos anteriores, pues se puede desplazar dos unidades en sentido creciente sobre el eje y (un segmento que va de 1 hasta 3), mientras que como la distancia al origen es menor al radio, en el sentido decreciente de y tenemos un rombo con ejes que van de 1 a -1 sobre cada eje.

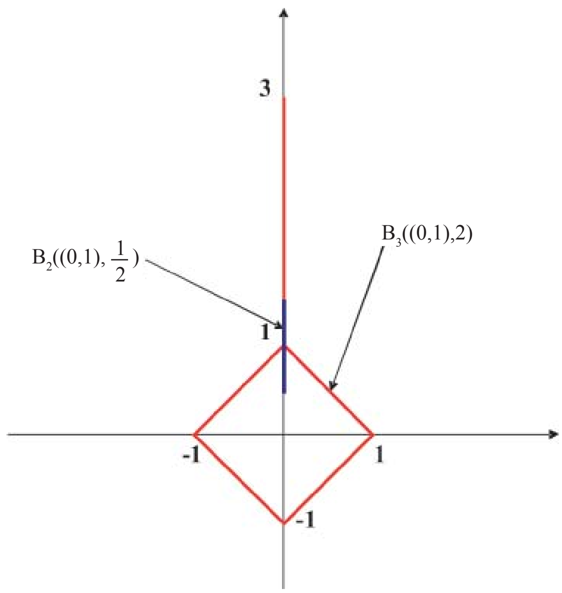
Las bolas B_2 y B_3 se han representado en la Figura 4.

5) Bolas elípticas. Quisiéramos concluir estos ejemplos con una pregunta al lector ¿Cómo definir una distancia en $\mathbf{R}^2$ para que las bolas generadas con ésta, sean elipses? Si tenemos en cuenta que en el caso de la distancia d_2, el radio de las circunferencias no es otra cosa que el radio de la bola, aquí la cuestión central es la elección de los semiejes a y b de la elipse en función del radio de la bola. Contrariamente a lo que pudiéramos suponer, la unicidad de tal bola no puede ser garantizada, pues existen infinitas posibilidades de elección de a y b. Veamos esto.

Si la distancia euclidiana $d_2(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ en el caso general nos lleva en el plano a la ecuación de la circunferencia $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ (podemos simplificar tomando la circunferencia centrada en el origen $x^2+y^2=r^2$ que es el mismo análisis). Para construir una distancia que nos lleve a bolas elípticas, consideramos la ecuación canónica de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, de donde con una simple manipulación obtenemos $b^2x^2+a^2y^2=(ab)^2$ de aquí que puedo definir $d^*(P,P_1)=\sqrt{b^2(x-x_1)^2+a^2(y-y_1)^2}$ siendo $P(x,y)$ y $P_1(x_1,y_1)$. Supongamos que quiero obtener la bola centrada en el origen y radio 4, es fácil darse cuenta que a.b=2, es decir, cualquier pareja de valores de a y b que nos lleve al producto 2, son "elegibles" para estar en la definición de d*, por ejemplo 1/2 y 4 ó 6 y 1/3. Esto nos lleva a la no unicidad de dicha bola.

Conclusiones. ¿Qué beneficios puede traer el uso de tales ejemplos? Como decíamos al principio, el desarrollo de la intuición, de la visión geométrica, la concepción del rigor matemático que provee la construcción de los objetos matemáticos "a mano". En fin, la discusión que se puede generar con el ejemplo 4) anterior, puede ser enriquecida con las siguientes preguntas.

Figura 4: Bolas B_2 (azul) y B_3 (rojo) con la métrica del bosque.

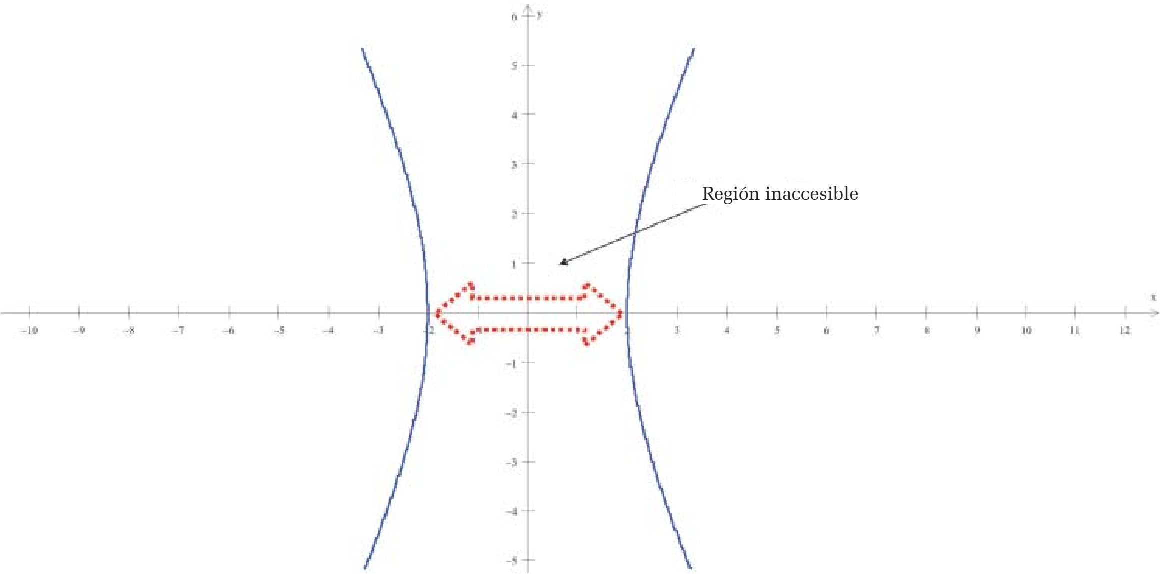


¿Existe alguna distancia que genere bolas hiperbólicas? ¿Qué restricciones debemos imponer? ¿Podemos medir la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano con esta distancia?

Estas preguntas nos llevan a la consideración de una función muy parecida a d*, en este caso el radical sería $\sqrt{b^2(x-x_1)^2-a^2(y-y_1)^2}$ pero la diferencia bajo el radicando, hace que debamos imponer condiciones muy restrictivas para la existencia de valores reales, lo que significa en concreto que hay regiones "inaccesibles" del plano para esta distancia. En la figura 5, siguiente, hemos partido de la hipérbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ y la región inaccesible es la comprendida entre las dos ramas de la hipérbola. Esto significa que no puedo calcular la distancia, por ejemplo, entre los puntos (-1,0) y (1,0) usando esta "distancia".

Estamos seguros que la respuesta a estas y otras preguntas que los docentes pueden elaborar, redundarán en beneficio de nuestros alumnos, y le brindarán el necesario significado a objetos matemáticos que de otra forma, parecen sin vínculo directo con la Matemática Escolar.

Figura 5: Hipérbola e región inaccesible.



Referencias

DARBOUX, G.-**Eloge historique d'Henri Poincar´e lu dans la séance publique annuelle du 15 d´ecembre**, Paris: Gauthier-Villars, 1913.

FAUVEL, J.-Using history in mathematics education, **For the Learning of Mathematics**, 11(2), 3–6, 1991.

FRAGUELA, Andrés-**Análisis Matemático en Espacios Métricos**, Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

HALMOS, Paul R.-The teaching of problem solving, **American Mathematical Monthly** 82(5), 446-470, 1975.

HERSH, Reuben-Some proposals for revising the philosophy of mathematics, en T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of Mathematics, Boston: Birkhauser, 1986.

KLEIN, F.-**Elementarmathematik vom noheren¨ Standpunkte aus, 1**, Berlin: Springer, 1924 (hay traducción inglesa **Elementary mathematics from an advanced standpoint**, New York: Dover, 1945).

KLEIN, F.-**The arithmetizing of mathematics.** An address delivered at the public meeting of the Royal Academy of Sciences of Gottingen, November 2, 1895 (hay traducción inglesa en **Bulletin of the American Mathematical Society**, series II, 2, 241–249, 1896).

KLINE, Morris-**Matemática.** La pérdida de la certidumbre, Madrid, Siglo XXI, 1985.

LAKATOS, Imre-A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? in T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of Mathematics, Boston: Birkhauser, 1986.

LEIVAS, J. C. P.-Existem bolas cuadradas? **Educação Matemática em Revista-RS**, Dezembro 2003, 21-25.

MAWHIN, J.-The Centennial Legacy of Poincar´e and Lyapunov in Ordinary Differential Equations, **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo**, Serie II, no. 34, 9–46, 1994.

NÁPOLES V., J. E. y C. Negrón-De la mecánica analítica a las ecuaciones diferenciales ordinarias, **LLULL 17** (no. 32), 190–206, 1994 (un resumen de este trabajo fue publicado en el **Bol. Soc. Cub. Mat. Comp.**, no. 15, 1–9, 1993.

PAREJA HEREDIA, Diego-**Educación matemática. De Felix Klein a Hyman Bass**, Universidad del Quindío, Colombia, s/f. Disponible en http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm acceso 26 de mayo de 2011.

POINCARE, H.-La logique et l'intuition dans la science mathematiqué et dans l'enseignement, **L'enseignement Mathematique**, 1, 157–162, 1899.

POLYA, George-Learning, teaching, and learning teaching, **American Mathematical Monthly**, 70, 605-619, 1963.

PUTNAM, Hilary-What is mathematical truth? en T. Tymoczko (ed.) New Directions in the philosophy of Mathematics, Boston: Birkhauser, 1986.

ROYDEN, H. L.-**Real Analysis**, The Macmillan Company, Toronto, 1968.

SANTALÓ, L.-**La Matemática en la Escuela Secundaria**, EUDEBA, 1966.

STEEN, L.-**The science of patterns**, Science 240, 611-616, 1988.

THOM, René-Modern mathematic: does it exist? en A.G. Howson (ed.) Developments in mathematical education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education, 194-209, Cambridge: Cambridge University Press, 1973.

ZIMMERMANN, W. and S. Cunnigham-**Visualization in Teaching and Learning**, Mathematical Association of America, USA, 1991.

Juan E. Nápoles Valdes – UNNE-FACENA – Av. Libertad 5460 (3400) Corrientes

jnapoles@exa.unne.edu.ar; UTN-FRRE, French 414 – (3500) Resistencia, Chaco jnapoles@frre.utn.edu.ar

RECEBIDO EM: JUL. 2010

CONCLUÍDO EM: NOV. 2011