ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA: EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS DO 7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

First degree equation in textbooks: Mathematical and didactical organizations

Edelweis Jose Tavares Barbosa
Abigail Fregni Lins

Resumo

Esta pesquisa de mestrado analisou a introdução do conceito de equação do primeiro grau em livros didáticos brasileiros do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Nesse sentido, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard e seus colaboradores, norteia teoricamente nossa pesquisa. No presente artigo, discutimos tal referencial, bem como apresentaremos o delineamento metodológico proposto para a análise dos dados. Foram analisadas duas coleções de livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental aprovados nas avaliações de 1999 e 2011. Os resultados indicam que as *organizações* existentes nesses livros nem sempre são feitas de forma a esclarecer as diferenças existentes entre os *subtipos de tarefas* trabalhadas, bem como as potencialidades das *técnicas* organizadas ou sistematizadas. Além destes, ao longo dessas duas avaliações do PNLD as coleções não alteram as *praxeologias matemáticas, modificando as praxeologias didáticas.*

Palavras-chave: Análise de Livro Didático de Matemática. Equação do Primeiro Grau. PNLD. TAD.

Abstract

We analyzed in our research the first degree equation introduction in Brazilian secondary school textbooks approved by the National Program of Text Books (PNLD). In this sense, the Anthropologic Didactical Theory (TAD), proposed by Yes Chevallard, frame worked the research. Here we discuss such theoretical framework as well as present the methodological approach used. Two Year 7 textbooks collections were analyzed as approved in the 1999 and 2011 evaluations. The results show that the existent organizations in the collections are not always done in a way of clarifying the existent differences between the subtypes of worked tasks as well as the potentialities of the organized or systematic technics. The collections do not change the mathematical praxeology but the didactical ones.

Keywords: Mathematics Texbook Analyses. First Degree Equation. TAD.

Introdução

A Matemática tem relevante papel social, seja no ambiente escolar ou nas ruas, na forma de incluir ou excluir pessoas. Para Lins e Gimenez (1997), as crianças aprendem ainda muito pequenas as noções de números e operações sem usar regras formais, fazendo as operações da forma mais simples possível, usando na maioria das vezes o cálculo mental. No processo de escolarização tradicional, a criança é introduzida ao conhecimento matemático formal a partir do estudo da Aritmética, com ênfase nas operações básicas tais como adição, subtração, multiplicação e divisão. Inicia-se, então, o seu percurso no estudo da Matemática, que vai acompanhá-la por toda sua vida escolar.

Em nossa experiência em sala de aula, um dos aspectos que caracteriza o início do estudo da introdução formal da Álgebra é o estudo das equações e, consequentemente, a utilização de letras para representar valores desconhecidos. Quando as letras representam valores desconhecidos, elas são usualmente denominadas de incógnitas. Entretanto, no decorrer das séries subsequentes, as letras têm outros atributos.

No espaço escolar, existe a ideia de que a Aritmética trata de números e a Álgebra de letras. Tenta-se também estabelecer limites entre conteúdos. No currículo da escola, a Aritmética é trabalhada desde a educação infantil até o 6º ano do Ensino Fundamental, e os conteúdos tradicionais da Álgebra, tais como equações, cálculo com letras, expressões algébricas, são abordados a partir do 7° ano do Ensino Fundamental. Observa-se que os conteúdos aritméticos são conhecimentos prévios para a introdução da Álgebra.

Desse modo, analisamos o capítulo referente às equações polinomiais do primeiro em duas coleções didáticas do Ensino Fundamental, as quais foram as únicas aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 1999 e 2011. Para isso, tomamos como referencial a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard.

Chevallard (1998) considera que não existe um mundo institucional ideal no qual as atividades humanas sejam geridas por praxeologias bem apropriadas que permitam realizar todas as tarefas desejadas de uma maneira eficaz, segura e inteligente. As praxeologias envelhecem na medida em que seus elementos (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias ou teorias) perdem seus créditos ou tornam-se opacos, dando origem à constituição de novas praxeologias, necessárias ao melhor funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas (tipos de problemas) que se apresentam a essa instituição.

Sendo assim, apresentamos o artigo em duas seções. A primeira com relação à fundamentação teórica, modelização *a priori* e seleção e caracterização das obras analisadas. A segunda seção discute os principais resultados e algumas considerações.

Álgebra escolar: aspectos históricos e concepções

No desenvolvimento da Álgebra observa-se que, desde civilizações antigas do Egito e Babilônia até os dias atuais, a linguagem matemática veio gradativamente evoluindo, passando por várias fases que marcaram época. Os historiadores dividem a história da Álgebra em três principais fases: retórica ou verbal, sincopada e simbólica. (GUELLI, 2005; BOYER, 1996):

Álgebra retórica (ou verbal) – A fase retórica ou verbal se estende desde os Babilônios (1700 a.C.) até o matemático grego Diofanto (250 d.C.). É caracterizada pela completa ausência de símbolos e abreviações que possam expressar o pensamento algébrico; todos os passos relativos a números e equações eram descritos na linguagem corrente. Essa teria sido a Álgebra dos Egípcios, dos Babilônios e dos gregos pré-diofantinos.

Álgebra sincopada – Essa fase teria surgido com Diofanto de Alexandria e ficado marcada pela introdução de um símbolo para a incógnita, utilizando uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. É registrada também na história uma sincopada similar à de Diofanto, que surgiu por meio dos Hindus, especialmente por Brahmagupta (século XII). Essa fase prolongou-se até o início do século XVI. Nesse momento histórico, temos a impressão de que os matemáticos não demorariam muito tempo para descobrirem os sinais.

Álgebra simbólica – Os registros indicam início a partir do momento em que as ideias algébricas passaram a ser expressas somente através de símbolos, deixando de lado o uso das palavras. Embora o jurista francês François Viète (1540-1603) ainda utilizasse um estilo sincopado, foi ele o principal responsável pela criação de novos símbolos na Álgebra.

No Brasil, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fizeram uma abordagem histórica e evidenciam *três concepções* de educação algébrica que vêm exercendo maior influência no Ensino de Matemática elementar.

A primeira, chamada de *linguístico-pragmática,* baseia-se no papel do Ensino da Álgebra buscando fornecer um instrumental técnico (superior ao da Aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. Para o aluno adquirir essa capacidade, considera-se necessário e suficiente primeiro dominar, ainda que de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe).

O currículo de Ensino da Álgebra tem, portanto, como ponto de partida, o cálculo literal (operações de adição, subtração, multiplicação/ fatoração e divisão de expressões algébricas), o qual é desenvolvido por meio de muitos exercícios visando capacitar os alunos no manejo preciso dessas expressões algébricas. Só depois disso é que são introduzidos problemas do tipo aplicação algébrica.

Os mesmos autores apresentam a segunda concepção, *fundamentalista-estrutural,* que surge aproximadamente na segunda metade do século XX, predominantemente nas décadas de 1970 e 1980, e vem contrapor-se à ideia anterior, com um cunho fundamentalista. O papel do Ensino da Álgebra seria o de fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar, inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações. Isso é realizado por meio da introdução dos campos numéricos, da teoria dos conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro,...), das relações e funções.

A terceira concepção, *fundamentalista-analógica*, é uma síntese das duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da Álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, não mais com base nas propriedades estruturais, por meio do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico. A Álgebra *geométrica* era didaticamente superior a qualquer outra abordagem lógico-simbólica, pois tornam visíveis certas identidades algébricas.

O ponto problemático e comum entre essas três concepções, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), é que elas praticamente reduzem o Ensino da Álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica que ao pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica). As três concepções enfatizam o Ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a Álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), desde 1799, momento em que a Álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até o início da década de 1960, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, no qual tudo era essencial. A matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques. Primeiro se estudava a Aritmética, depois a Álgebra e, em seguida, a Geometria. Nesse período, segundo a autora, a Álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) ressaltam o fato de que a Álgebra pós-Matemática Moderna parece retomar seu papel anterior, ou seja, de um estudo com a finalidade de resolver equações e problemas. Tentou-se recuperar seu valor instrumental, mantendo seu caráter fundamentalista. Os autores destacam ainda que a Álgebra, apesar de ocupar boa parte dos livros didáticos atuais, não tem recebido a devida atenção nos debates, estudos e reflexões a respeito do Ensino da Matemática.

Álgebra no currículo da educação básica

Educadores demonstram preocupação com a compreensão da Álgebra no ensino da Matemática, e especialmente as noções que devem ser trabalhadas para a compreensão do que venha a ser uma equação (BRITO MENEZES, 2006). De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo, propiciando ao aluno o desenvolvimento e o exercício de sua capacidade de abstração e generalização.

Para Souza e Diniz (1996), a Álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem, a Álgebra possui seus símbolos e suas regras. Para Garcia (1997), a Álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo das matemáticas de que todas as disciplinas científicas se nutrem para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Álgebra parece ser um domínio exclusivo da escola, e na Matemática dos não matemáticos a Álgebra é, antes de tudo, um conjunto de afirmações genéricas sobre quantidades para as quais se produziria significado com base no dinheiro. Nesse contexto, a Aritmética seria um conjunto de afirmações a respeito de como efetuar certos cálculos (LINS; GIMENEZ, 1997).

Entretanto, as atividades propostas pelos educadores seguem em caminhos contrários, isto é, nas orientações para o trabalho com os problemas algébricos, é dada ênfase puramente ao processo de resolução. Fazer o aluno pensar, questionar, fica em segundo plano, tornando essas atividades puramente mecânicas, rotineiras e muitas vezes desinteressantes para o mesmo.

Para Bednardz, Kieran e Lee (1996) a Álgebra escolar pode ser feita por meio de ideias, ou seja, resolução de equações, privilegiada no ensino atual da Álgebra; resolução de problemas que historicamente têm assumido um importante papel no desenvolvimento e ensino da Álgebra; generalização de leis envolvendo regularidades numéricas e de fenômenos, recentemente bastante enfatizados nos currículos; introdução de conceitos de variável e de função, com extensas raízes históricas, estudo das estruturas algébricas privilegiado no currículo escolar nos anos 60 sob a influência do movimento da Matemática Moderna.

Segundo Falcão (1997), existe uma perspectiva parcial acerca da Álgebra que é veiculada com frequência nos manuais introdutórios (livros didáticos) e ganha reforço na sala de aula. Para essa perspectiva, a Álgebra diz respeito a um conjunto de regras de manipulação que permitem passar da equação à solução. Isso significa que a Álgebra seria considerada apenas um objeto matemático, abandonando-se seu caráter de ferramenta.

Equações do primeiro grau: elementos

O estudo de equações do 1° grau com uma incógnita baseia-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios a uma indeterminada. Esse anel é simbolizado usualmente por $R[x]R$, representando o corpo dos números reais, e consiste das expressões formais $p(x) = a_0 +...+ a_n x^n$, n um número natural no qual se definem as operações de adição de dois polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real, as quais se supõem, satisfazem as propriedades expressas nas regras usuais da Álgebra (ARAUJO, 2009, p.35).

A operação de adição de dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1^+...+ a_n x^n$ com um polinômio $p(x) = a_0 +...+ a_n x^n$ com um polinômio $p(x) = b_0 + b_1 x^+...+ b_n x^n$ é definida por: $p(x) + q(x) = p(x) = a_0 + a_1^+...+ a_n x^n + p(x) = b_0 + b_1 x^+...+ b_n x^n = (a_0 + b_0.) + (a_1 + b_1) x + ... + (a_n + b_n) x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $p(x).q(x)$__e___ $r(x)\, p(x).\, q(x)$ e $r(x)$ pertencem a $R[x]\ \mathbb{R}[x]$,

a) $p(x) + q(x) = p(x) + q(x)$

b) $[p(x) + q(x)] + (r) = q(x) + [p(x) + r(x)]$

c) $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x)$, em que $0(x)$ representa um polinômio nulo $0_0 + 0x + ...0x^n$, $n \varepsilon \mathbb{N}$.

d) Para todo $p(x) + q(x) = a_0 + a_1 x...+ a_n x^n$ existe o polinômio $p'(x)$ tal que $p(x) + p'(x) = 0(x)$.

Sabe-se que $p'(x) = (-a_0) + (-a_1)\, x... + (-a_n)\, x^n$

A operação de multiplicação de um número real K por um polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x...+ a_n x^n$ é definida por: $Kp(x) = (Ka_0) + (ka\ 0)x + ... + (Ka_n) x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $K, K_1, K_2 \in R$ e $p(x)$ e $q(x) \in R[x]$,

a) $K[p(x) + q(x)] = kp(x) + kq(x)$

b) $K_1[k_2\, p(x)] = (k_1 \mathrm{k}_2)\, p(x)$

c) $1p(x) = p(x)$

O polinômio assim definido tem grau n se $a_n \neq 0$. No caso em $n = 1$, dizemos que $p(x) = a_0 + a_1 x$ tem grau 1. Nesse caso, $p(x)$ é denominado polinômio do 1° grau na indeterminada x.

Por outro lado, para cada polinômio

$p(x) = a_0 + a_1... + a_n x^n \in R[x]$ é possível definir uma função polinomial $f{:}R \rightarrow R$, indicada por $f(x) = a_n x^n + ...a_0$. A função assim definida, associada cada número $k \in R$ em $f(k) \in R$.

Se existe um número $k \in R$ tal que $f(k) = 0$, dizemos que k é raiz (zero) de $f(x)$. Nesse caso, para determinar as raízes do polinômio, é necessário determinar os valores de $x \in R$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $a_n x^n + ...a_0 = 0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n. No caso em que $n = 1$, temos uma equação polinomial do 1° grau ($a_0 + a_1x = 0$)), que é o nosso objeto de estudo. Os números reais tais que $f(\infty) = 0$ são denominados soluções da equação $f(x) = 0$ (ARAUJO, 2009).

Com base nas definições anteriores, denomina-se equação do 1° grau toda equação na forma $ax + b = 0$, em que a incógnita possui expoente 1. A equação do 1° grau é chamada linear, pois sua representação gráfica é uma linha reta.

As operações e propriedades dos polinômios, enunciadas anteriormente, permitem-nos ainda elaborar os princípios que fundamentam a resolução de equações (ARAUJO, 2009, p.45):

- Princípio aditivo: se adicionarmos a ambos os membros (por exemplo: $2x + 4 = x - 1$ antes da igualdade chamamos de 1° membro, e após a igualdade de segundo membro) de uma equação um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica, obteremos uma equação equivalente à primeira; e,
- Princípio multiplicativo: se multiplicarmos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero) ou uma mesma expressão algébrica (não nula), obteremos uma equação equivalente à primeira.

Esses dois princípios são usados na elaboração de técnicas para resolver, por exemplo, equações do 1° grau.

Em relação ao ensino de resoluções de equações, Bernard e Cohen (1995) recomendam um conjunto gradativo de ensino para encontrar as raízes de uma equação, sendo descrito em quatro métodos, assim denominados: (1) gerar e avaliar (2), esconder (3), desfazer e (4) equações equivalentes. Para esses autores, cada novo método subsequente de resolução deriva de seu anterior, beneficiando a passagem de procedimentos aritméticos para o algébrico.

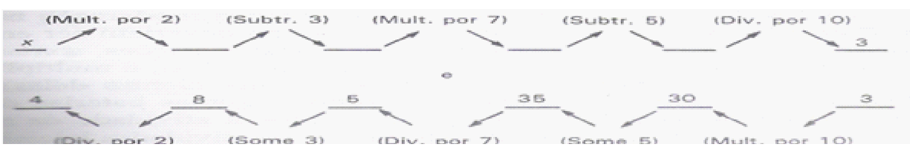
O método de *gerar e avaliar* incide em levar o aluno a pensar no conceito de número e a provocar diferentes valores para serem testados por tentativa e erro. Bernard e Cohen (1995) analisam que nesse gerar e avaliar o aluno não se limita a ficar fazendo tentativas e erros, aleatoriamente. Para esses autores, intuitivamente, o aluno segue um esquema de cálculo de valores que se realimenta no processo de geração de valores.

O método de *esconder* consiste em levar o aluno a resolver a equação pensando sobre o que ela pede. Por exemplo, na equação $10 - x = 6$ esconde-se o x e pergunta-se que número devemos subtrair de 10 para 6? Os autores consideram que esse método permite chegar a uma conceituação mais ampla de incógnita, levando o aluno a perceber que uma expressão pode ser uma incógnita.

O método de *desfazer* fundamenta-se na noção de operações inversas e na reversibilidade de um processo, envolvendo um ou mais passos invertíveis. Desse modo, o aluno deve ser orientado a raciocinar sobre o que está acontecendo operacionalmente com uma incógnita e criar uma sequência de perguntas dirigidas sobre como voltar ao ponto de partida, isto é, a incógnita. Assim, por exemplo, no caso da equação

$$\frac{7(2x-3)-5}{10} = 5$$

Figura 1 – Modelo gerado pelo método de desfazer.



Fonte: Bernard e Cohen (1995, p.117).

Esse procedimento de voltar ao ponto de partida, utilizando apenas cálculo aritmético, estimula o aluno a desenvolver a reversibilidade, a análise e a resolução de problema.

O método de *equações equivalentes* fundamenta-se em efetuar operações de equilíbrio nos dois membros da igualdade (somando um número ou expressão aos dois membros da igualdade) até que de um lado esteja a incógnita e, do outro, um número. As novas equações obtidas por esse processo preservam o mesmo conjunto de soluções, e por isso são denominadas equações equivalentes.

Teoria Antropológica do Didático

Segundo Chevallard (1999, p.1), essa teoria estuda o homem perante o saber matemático e, mais especificamente, perante situações matemáticas. Um motivo para utilização do termo *antropológica* é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Assim, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) considera como elementos primitivos INSTITUIÇÕES (I), INDIVÍDUOS (X) e OBJETO (O).

Chevallard (1999, p.1) considera que uma instituição (I) é um dispositivo social total que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite e impõe a seus sujeitos [...] maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD, cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode *viver* em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado.

A TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, de acordo com Chevallard, acrescenta às noções acima descritas as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar às práticas sociais em geral as atividades matemáticas, como descritas a seguir.

Organização praxeológica

Podemos entender uma organização praxeológica como a realização de certo tipo de tarefa t que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo T, através de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Parte do postulado que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard (1998) de praxeologia, simbolizada pela notação $[t, \tau, \theta, \Theta]$.

Chevallard (1998) considera ainda que o par $[t, \tau]$ está relacionado à *prática*, e pode ser compreendido como um saber-fazer, e o par $[\theta,\Theta]$ relacionado a razão, é compreendido como o *saber*. O mesmo autor define assim a organização praxeológica $[t, \tau, \theta, \Theta]$, em que temos um bloco prático $[t, \tau]$, composto das tarefas e técnicas, o chamado saber fazer, e um bloco teórico $[\theta, \Theta]$, composto pelas tecnologias e teorias, o bloco do saber. Considera ainda que a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia relativa a essa técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

Os tipos de *tarefas* (t) que se situam em acordo com o princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza. Eles são artefatos, obras, construtos institucionais como, por exemplo, uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (CHEVALLARD, 1998, apud ARAUJO, 2009). Por exemplo, resolva a equação $2x + 6 = 10$. A noção de tarefa, ou especificamente do tipo de tarefa, tendo como um objetivo bem-definido, por exemplo, encontrar o valor de x, é um tipo de tarefa, mas *calcular* não explicita o que é calcular. Assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa, mas somente *calcular* não seria um tipo de tarefa. Para esse exemplo, *calcular* é gênero de tarefa.

Uma técnica (τ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas $\tau \in t$. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa t necessita, em princípio, de uma técnica τ relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\tau \in t$. Ela pode funcionar para uma parte $p(\tau)$ das tarefas t e fracassar para $t/p(\tau)$. Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de t (CHEVALLARD, 1998, apud ARAUJO, 2009). Por exemplo, a multiplicação no conjunto dos números naturais sempre aumenta, mas pode fracassar em outro conjunto numérico.

A *tecnologia* (θ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica

τ, cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo t. Em matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de demonstração. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ·, isto é, em expor por que ela funciona bem. Além disso, a tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (CHEVALARD, 1998, apud ARAUJO, 2009).

A *teoria* (Θ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação- produção, [...] retomando com relação à tecnologia o papel que esta possui em relação à técnica. O autor adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (CHEVALLARD, 1998, apud ARAUJO, 2009).

Uma organização matemática (OM) é elaborada em torno de uma noção, ou conceito, inerente à própria matemática. As praxeologias didáticas são as respostas (a rigor) a questões do tipo como realizar o estudo de determinado assunto. Refere-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias, entre outras, mobilizadas para o estudo de um tema. Por exemplo, encontrar o valor de uma incógnita de uma equação.

Quaisquer que sejam as escolhas adotadas nos cursos dos trabalhos de estudo de dada OM, algumas situações estão necessariamente presentes, mesmo que estas se apresentem de formas variadas, tanto de forma quantitativa como qualitativamente falando. Essas situações serão denominadas de momentos de estudos, ou momentos didáticos, porque podemos dizer que, qualquer que seja o caminho escolhido, ele conduzirá inevitavelmente a um momento de fixação, ou de institucionalização, ou a um momento que demandará o questionamento do que é valido acerca do que foi construído, que caracteriza o momento de avaliação, entre outros.

O primeiro momento é o primeiro encontro com a organização que está sendo estudada. O segundo é o da exploração do tipo de tarefas t e de elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas. O terceiro momento é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. O quarto é o do trabalho da técnica que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. O quinto momento é o da institucionalização, apontando os elementos que permanecerão definitivamente e os que serão dispensados.

Finalmente, o sexto momento, o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização e permite relançar o estudo, demanda a retomada de alguns dos momentos, e eventualmente do conjunto do trajeto didático.

Analisando as coleções

A metodologia adotada para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas e didáticas existentes sobre o ensino de equações do 1° grau em duas coleções aprovadas nos PNLD de 1999 e 2011, constitui-se de duas etapas do trabalho. A primeira trata-se da modelização *a priori*, das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno da resolução de equações do 1° grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos. A segunda etapa constitui-se da caracterização das obras analisadas, apresentando sua identificação, os motivos da escolha, descrição da estrutura e da forma de organização dos conteúdos.

Modelização *a priori*

Chevallard (1994) classifica os procedimentos de resoluções de equações do primeiro grau em duas categorias: (1) equações do tipo $ax + b = c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos e (2) equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e $a_1, b_1 \in \Re$ com $a_1 \neq 0$.

No entanto, nem sempre as equações do 1º grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Frequentemente, numa atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dentre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x) = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$, em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais, na variável x, que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax + b$, e $a,b \in \Re$ e $a \neq 0$, mas que podem ser reduzidas a essa forma por processo de desenvolvimento e redução.

Portanto, para este estudo, classificamos e caracterizamos *a priori* os seguintes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, no campo do $\Re$, em quatro categorias: (1) resolver equação uma equação do tipo $ax + b = c$ (t_1), como por exemplo $2x + 5 = 10$; (2) resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma (t_2), por exemplo, $2(x + 3) + x = 7$; (3) resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ (t_3), por exemplo, $2x - 2 = x + 10$; (4) resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$ expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica (t_4), por exemplo, $6(x - 2) + 3x = 2x - 2$.

Para resolver tais subtipos de tarefas, foram identificadas e categorizadas a priori as seguintes técnicas (τ): a) *testar a igualdade* (τ_{TI}), por tentativas e erros; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), invertendo as operações; c) *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade; d) *reagrupar os termos semelhantes* (τ_{RTS}), invertendo o sinal dos termos transpostos.

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas τ_2 e τ_4, temos também a seguinte técnica: e) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), eliminando parênteses e/ou agrupando termos semelhantes. Enfim, dependendo das variáveis mobilizadas na construção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem às técnicas mistas.

Para justificar as técnicas caracterizadas acima para resolver equações do 1º grau com uma incógnita, foram identificadas e caracterizadas *a priori* as seguintes tecnologias: a) *princípios de equivalência entre equações*: equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}); b) *princípio aditivo*: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; c) *princípio multiplicativo*: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; d) *propriedades das operações inversas em* $\Re$ (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ_{POI}): 1) se a, b, c são números reais tais que $a + b = c$, então $a = b - c$; 2) se a, b e c são números reais tais que $a \,.\, b = c$, então $a = c \div b$, $b \neq 0$; 3) propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei do cancelamento: 1) se $a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$; 2) se $a.b = a.c \Leftrightarrow b = c$ com $a \neq 0$; 3) propriedades distributivas (θ_{PDM}): Se k, a, b, c e d são números reais, então $k(a + b) = ka + kb$ e $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Depois da apresentação e categorização das tarefas, bem como de suas tecnologias, analisamos duas coleções didáticas do 7º ano do Ensino Fundamental aprovadas nas avaliações do PNLD de 1999 e 2011. Assim, essas coleções são *Matemática*, de Imenes e Lellis, e *Ideias e desafios*, de Iracema e Dulce, sendo as duas coleções as únicas a permanecerem nas duas avaliações.

Apresentamos os principais resultados desse estudo comparativo das organizações existentes nesses livros.

Principais resultados

Em outras instâncias (BARBOSA; LINS, 2011), discutimos alguns de nossos resultados. Aqui analisamos os principais resultados do estudo das organizações didáticas e das praxeologias matemáticas nas coleções didáticas do 7º ano, especificamente o capítulo de equações do 1º grau. Desse modo, utilizamos as categorias modelizadas *a priori* relativas às praxeologias matemáticas relativas ao subtipo de tarefa resolver equações do primeiro grau, em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias:

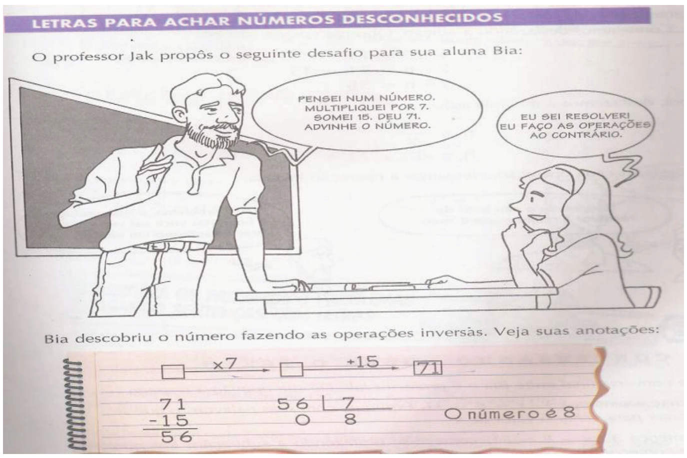
Quadro 1 – Comparativo entre dois livros aprovados no PNLD de 1999 quanto aos subtipos de tarefas.

SUBTIPOS DE TAREFAS	LIVRO MATEMÁTICA		LIVRO IDEIAS E DESAFIOS	
	TÉCNICA	TECNOLOGIA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
t1: $ax + b = c$	τTTC	θPOI	τTI	Regras de propriedades operatórias
			τNTC_ τTTC	θPEE
				θPGI_PEE
t2: $A(x) = c$	τDRE_ tTTC	θPDM	τTTC	θPGI_PDM
				θPGI
t3: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	τNTC	θPGI	τED_DRE_ NTC	θDRE_PGI
t4: $A_1(x) = A_2(x)$	τDRE_ NTC	θPDM / θPGI		θDRE_PEE

Fonte: Edelweis (2011, p.54).

A coleção *Matemática* em relação à transposição das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno dos subtipos de tarefas referentes às resoluções de equações do 1° grau ocorreu em três momentos. *Primeiro momento,* introdução de um problema ou situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio da explicação do procedimento de resolução. Além disso, nesse momento se enunciam as propriedades ou afirmações que integram os elementos tecnológicos que explicam ou justificam a técnica sistematizada.

Figura 2 – Introdução à noção de equações do 1° grau.



Fonte: Imenes e Lellis (1998, p.201).

Segundo momento – destinado à *avaliação* dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação e ocorrem nas seções denominadas *conversando sobre o texto*. Nesse momento, o aluno tem chance de participar de maneira significativa de sua aprendizagem, pois é nele que os autores apresentam questionamentos que permitem ao aluno fazer indagações sobre os conceitos e procedimentos explorados no momento anterior.

Figura 3 – Questionamentos sobre as resoluções de equações.

- *Veja a conversa final entre Bia e o professor Jak. Dê sua opinião a respeito.*
- *Considere a sentença $3 \cdot x - 8 = 31$. Explique, com suas palavras, o que se deve fazer para achar o valor de* **x**.
- *Na sentença $3 \cdot x - 8 = 31$, começa-se desfazendo a subtração. Por que não se começou desfazendo a multiplicação?*

Fonte: Imenes e Lellis (1998, p.211).

O *terceiro momento* dedicado ao *trabalho da técnica*, indicado nas seções intituladas *problemas e exercícios*.

Concluímos ainda que, nessa coleção, a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que os autores afirmam que há dois processos (técnicas) principais que podem ser agrupados para resolver equações. Os autores não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos efetuando a mesma operação nos dois membros da equação.

Em *Ideias e desafios,* a transposição das praxeologias matemáticas existentes em volta dos subtipos de tarefas referentes à resolução de equações do 1° grau se deu por meio de três momentos. *Primeiro momento,* introdução de um problema ou uma situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio de uma explicação do procedimento de resolução. No entanto, é nesse momento que se enunciam as propriedades ou afirmações que integram os elementos tecnológicos que explicam ou justificam a técnica sistematizada.

Figura 4 – Exercício para introduzir a noção de expressões algébricas.

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Um empacotador embala 70 pacotes por hora. A quantidade de pacotes embalados por hora é registrada por um inspetor. De que modo ele pode fazer esse registro?

O inspetor poderá fazer esse registro, anotando o número de pacotes embalados conforme o número de horas decorridas.

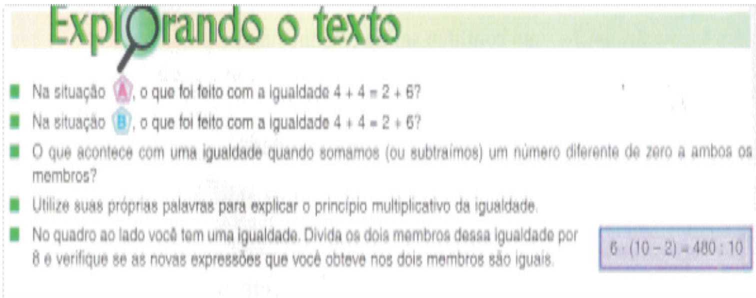
Anotações:

1h — 70 pacotes
2h — 140 pacotes
3h — 210 pacotes
4h — 280 pacotes
⋮ ⋮

Fonte: Iracema e Dulce (1998, p.95).

O *segundo momento,* destinado à avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, ocorre de forma implícita nos enunciados em 1999. Na avaliação de 2011, as autoras realizam de forma explicita a avaliação dos elementos técnico-tecnológicos.

Figura 5 – Extrato com reflexos sobre equações.



Explorando o texto

- Na situação (A), o que foi feito com a igualdade 4 + 4 = 2 + 6?
- Na situação (B), o que foi feito com a igualdade 4 + 4 = 2 + 6?
- O que acontece com uma igualdade quando somamos (ou subtraímos) um número diferente de zero a ambos os membros?
- Utilize suas próprias palavras para explicar o princípio multiplicativo da igualdade.
- No quadro ao lado você tem uma igualdade. Divida os dois membros dessa igualdade por 8 e verifique se as novas expressões que você obteve nos dois membros são iguais.

6 · (10 – 2) = 480 : 10

Fonte: Iracema e Dulce (2009, p.165).

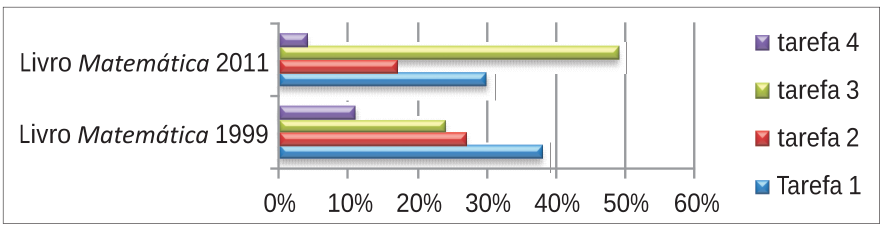
O *terceiro momento*, dedicado ao trabalho da técnica, é indicado nas seções *exercícios; exercícios complementares e problemas*.

Concluímos ainda que, nessa coleção, a transposição dos procedimentos aritméticos para os procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita. As autoras indicam dois processos (técnicas): o processo geral para resolução de equações, em que adotam procedimentos para encontrar a raiz da equação, e o outro processo, em que a regra prática resumiria as etapas, isto é, isolar o x para o 1° membro invertendo os sinais dos coeficientes ou incógnitas.

No que concerne à *organização didática*, o mesmo se dá em dois momentos didáticos. O *primeiro*, denominado de *elaboração e sistematização* das técnicas, para resolver equações (subtipos de tarefas) exploradas nas situações introdutórias, realizadas por meio da explicação do processo de resolução. É nesse momento que se enunciam as propriedades ou afirmações que constituem os elementos tecnológicos que explicam ou justificam as técnicas sistematizadas. O *segundo*, denominado momento do *trabalho das técnicas*, ocorre através da realização de exercícios apresentados logo em seguida ao processo de sistematização.

O gráfico abaixo apresenta o comparativo dos subtipos de tarefas do livro *Matemática* das avaliações de 1999 e 2011 do PNLD:

Gráfico 1 – Comparativos subtipos de tarefas – livro *Matemática* 1999 e 2011.



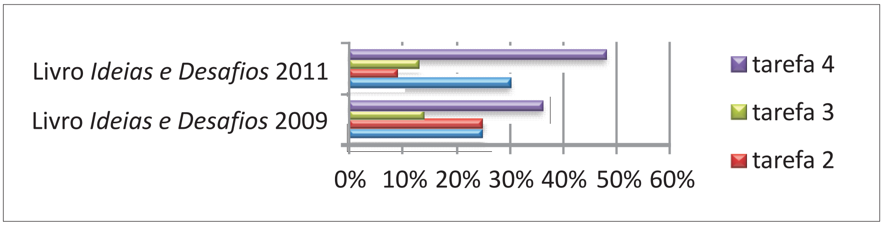
Fonte: Barbosa (2011, p.102).

Podemos destacar, com base na tabela acima, a coleção *Matemática*, que, na primeira avaliação, em 1999, apresentava ênfase maior nas tarefas t_1 ($ax + b = c$), ou seja, equações do tipo $2x + 4 = 30$ com 38% das atividades propostas em seus exercícios.

Em relação à avaliação 2011, t_3 ($a_1x + b_1 = a_2x + b_2$), por exemplo, $2x – 2 = x + 10$ com 49%. Podemos perceber que na primeira avaliação eram trabalhadas as equações menos complexas, tendo apenas uma incógnita. Na avaliação de 2011, os autores priorizaram as equações com duas incógnitas, aumentando a complexidade em resolver as equações.

A seguir, apresentamos o Gráfico 2 referente a *Ideias e desafios.*

Gráfico 2 – Comparativos subtipos de tarefas – livro *Ideias e desafios* 1999 e 2011.

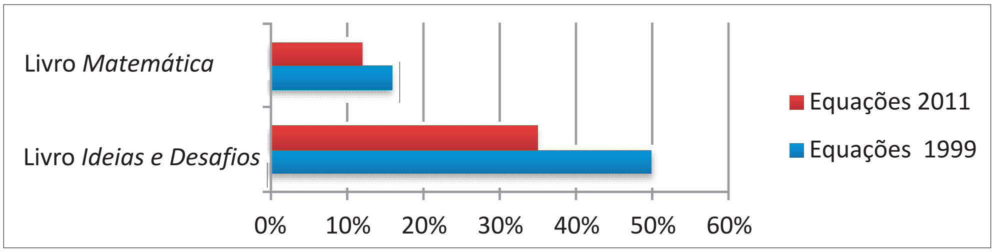


Fonte: Barbosa (2011, p.105).

A coleção *Ideias e desafios* concentra-se nas tarefas t_4 ($A_1(x) = A_2(x)$) equações do tipo $2(x+3)=2(2x-1)$, com 36% das atividades propostas nos exercícios. Em 2011, alterou o percentual, que passou a ser de 48%, de forma que podemos inferir que a coleção *Matemática* concentra-se nas questões mais simples de introdução às equações do primeiro grau, e a coleção *Ideias e desafios* faz oposto, trabalhando mais as equações mais complexas.

O Gráfico 3 mostra um comparativo das duas coleções relacionado aos quantitativos de equações formadas (exercícios) ao longo dos capítulos:

Gráfico 3 – Comparativo de equações nos livros *Matemática* e *Ideias e desafios*.



Fonte: Barbosa (2011, p.116).

Ainda podemos inferir que as coleções passaram por mudanças no tocante ao quantitativo de exercícios. A coleção *Matemática,* desde a primeira avaliação, fazia uso de mais problemas relacionados a equações. A coleção *Ideias e desafios*, na avaliação de 1999, fazia uso de 50% de problemas e 50% de equações. Nas avaliações seguintes, passou a fazer mais uso de problemas, ficando cerca de 25% de equações para serem resolvidas nos exercícios. Podemos destacar que a coleção *Ideias e desafios* faz uso de mais equações, chegando a quase três vezes mais equações apresentadas que a coleção *Matemática.*

Considerações finais

Tomando como referência as coleções aprovadas nos PNLD de 1999 e 2011, este trabalho de pesquisa nos permitiu concluir que as coleções analisadas desenvolvem trabalhos de elaboração e sistematização de diferentes técnicas para realizar os diferentes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do 1º grau. Todavia, tais coleções não justificam a existência dessas diferentes técnicas, e assim não deixam claros os limites ou potencialidades de cada técnica, além de não esclarecerem a distinção entre procedimentos aritméticos e algébricos (CHEVALLARD, 1984).

As transposições didáticas realizadas nessas coleções relativas ao conceito de equação do 1º grau falham em não deixar clara a transição dos métodos de resolução aritméticos para os métodos de resolução algébricos, assim como não realizam adequadamente a passagem da Aritmética para a Álgebra, como também apontou Araujo (2009). O uso da metáfora da balança de dois pratos nessas coleções é bem presente nessas avaliações.

Por fim, podemos inferir que as coleções passaram por mudanças no tocante ao quantitativo de exercícios. A coleção *Matemática*, na primeira avaliação, fazia uso de mais problemas relacionados a equações. A coleção *Ideias e desafios*, na avaliação de 1999, fazia uso de 50% de problemas e 50% de equações. Na avaliação de 2011, passou a fazer uso de mais problemas, ficando cerca de 25% de equações para serem resolvidas nos exercícios. Verificamos que duas as coleções não modificaram as *praxeologias matemáticas* ao longo das avaliações. Contudo, percebemos que os autores modificaram suas coleções em relação às *praxeologias didáticas*.

Referências

ARAUJO, A. J. de. *O ensino de Álgebra no Brasil e na França:* um estudo sobre o ensino de equações do 1° grau à luz da teoria antropológica do didático. Tese de doutorado, UFPE, 2009.

BARBOSA E. J. T.; LINS A. F. (Bibi Lins). Equação do primeiro grau: um estudo das organizações matemática e didática. In: *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, jun. 2011.

BARBOSA, E. J. T. *Equação do Primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático*. Dissertação de mestrado, UEPB. 2011.

BEDNARDZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Peblisshers, London, 1996.

BERNARD, J. E.; COHEN, M. P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizagem. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As ideias da álgebra*. Parte 3, Cap. 10. São Paulo: Atual, 1995. p.111-126.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2.ed. Tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino Fundamental. *Guia de livros didáticos.* Brasília, DF, 1998, vol. único, 5ª a 8ª séries. 599p.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino Fundamental. *Guia de livros didáticos.* Brasília, DF, 2010, v.3, 6ª a 9ª séries. 96p.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries). Matemática.* Brasília, DF, 1998. 142p.

BRITO MENEZES, A. P. A. *Contrato didático e transposição didática: Inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6º série do Ensino Fundamental*. Tese de doutorado, UFPE, 2006.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1999. p.221-266.

______. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique*. Actes de l'U.E. de la Rochelle, 1998.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A Álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. et al. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997. p.85-107.

FIORENTINI D; MIORIM, M. A; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. *Pro-Posições*. São Paulo: Cortez, 19 mar., v.1, n.1, p.39-54, 1993.

FREITAS, J. L. M. Produção de provas em Aritmética-Álgebra por alunos iniciantes de licenciatura em Matemática. In: *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2004, Recife.

GARCIA, F. F. Aspectos históricos del paso de la aritmética al Álgebra. In: *Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Número 14, ano IV, out. 1997. Barcelona: Graó.

GUELLI, O. *Equação: O idioma da Álgebra.* Contando a história da Álgebra. São Paulo: Ática, 2005.

IMENES, L. M. *Matemática.* Imenes & Lellis. Obra em 4v. para alunos de 5ª a 8ª séries. São Paulo: Scipione, 1998.

______. *Matemática.* Imenes & Lellis. Obra em 4v. para alunos de 6° ao 9° ano. São Paulo: Moderna, 2009.

KIERAN, C. *The learning and teaching of algebra*. Montreal: Université du Québec à Montréal, 1992.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN,C.; LEE, L. (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives of Research and Teaching.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.87-106.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 4.ed. Campinas: Papirus, 1997. 176p.

MIGUEL, FIORENTINI; MIORIM. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? *Pró-posições*, v.3, n.1, Campinas, SP, 1992.

MIORIN, A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro. *Zetetiké* n.1, Unicamp, Campinas, SP, 1993.

MORI, I. *Matemática:* ideias e desafios. Iracema & Dulce. Obra em 4v. para alunos de 5ª a 8ª séries. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 1998.

______. *Matemática: ideias e desafios.* Iracema & Dulce. Obra em 4v. para alunos de 6° ao 9°ano. 15.ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Edelweis Jose Tavares Barbosa é Mestre do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – MECM/UEPB. E-mail: edelweisb@yahoo.com.br

Abigail Fregni Lins é orientadora e docente do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – MECM/UEPB. E-mail: bibilins2000@yahoo.co.uk