Gabriel Rubén **Soto**
Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina
gsoto@ing.unp.edu.ar

Matemática a enseñar o para enseñar: el caso de las fracciones

Resumen

La enseñanza de la matemática siempre ha estado en el centro de atención debido a que los resultados respecto a la adquisición de habilidades y competencias matemáticas de los estudiantes que transitan el sistema educativo no son los esperados. Las investigaciones sobre esta problemática han comenzado a focalizarse en la construcción de un conocimiento matemático profesional necesario para buenas prácticas docentes. En este trabajo presentamos un estudio sobre el concepto de fracción estableciendo relaciones directas con las estructuras matemáticas fundamentales explicitando la constante tensión que existe entre la matemática a enseñar (matemática escolar) y la matemática para enseñar (matemática profesional) a modo de aporte para la discusión sobre la construcción de saberes profesionales en la formación docente.

*Palabras claves:*matemática para enseñar, matemática a enseñar, fracciones, saberes profesionales.

Abstract

Mathematics education has been always at the center of attention due to the fact that results of the acquisition of abilities and competences of students during their scholarisation have not been what they have expected. Research on this problem has begun to focus on the construction of professional mathematical knowledge necessary for good teaching practices. In this paper we present a study of the concept of fractions and its relation with fundamental mathematical structures uncovering existing tensions between the mathematics to teach (elementary mathematics) and the mathematics for teaching (deep mathematics) as a tool for constructing professional knowledge for pre- and in-service teachers.

*Keywords:*mathematics to teach, mathematics for teaching, fractions, professional knowledge.

Introducción

La atención a la problemática de la enseñanza de la matemática desde la segunda mitad del S XX se ha centrado en los problemas asociados al aprendizaje de los alumnos (Ernest, 2010; Godino, 2010). Sin embargo, los resultados de los cambios introducidos en los sistemas educativos guiados por dichos constructos teóricos no han sido los esperados (C. Bosch, Álvarez Díaz, Correa, Druck, & McEachin, 2010, pp. 19-28). Una de las razones es que las prácticas docentes no han sido consecuentes con los cambios socio-culturales que la escuela está transitando (Artigue, 2012, p. 21).

Las prácticas docentes involucran no sólo saberes específicos a la matemática sino además saberes históricos, sociológicos, culturales, epistemológicos, pedagógicos, didácticos, metodológicos y éticos, que sumado a los problemas propios de la adquisición de saberes, convierte a la formación de docentes en matemática en un problema altamente complejo. Especial atención se ha puesto en los últimos años en Argentina (CUCEN, 2011; INFOD, 2007) sobre los *saberes profesionales* que debe adquirir un docente en formación, a través de la elaboración de estándares de calidad para las carreras de formación de docentes en matemática. De estas políticas públicas surge la necesidad de generar espacios de reflexión y producción de dispositivos de desarrollo profesional para los docentes en matemática que tengan en cuenta los aspectos disciplinares, metodológicos y éticos subyacentes en la toma de decisiones que a diario deben hacer en sus prácticas, permitiendo además el estudio de las condiciones de viabilidad y evolución de los mismos en los distintos ámbitos en los que el profesor debe desarrollar su práctica profesional en lo que refiere a la evolución de la matemática como disciplina científica.

La tarea docente se caracteriza por la constante toma de decisiones acerca de qué enseñar, cómo hacerlo y para qué (Bishop, 1976, p. 30). Estas decisiones deben considerar la especificidad de los objetos de conocimiento a ser enseñados, los contextos en los que tiene lugar la enseñanza y las características de los sujetos de aprendizaje. El análisis de las prácticas docentes requiere entonces, la consideración, reflexión y comprensión de las dimensiones disciplinar, metodológica y ética que la caracterizan. Definir qué significa ser un buen docente es una tarea compleja puesto que está definida por conceptos orientadores carentes de aspectos delimitadores (Elliot, 1991, pp. 27-38), los cuales están en constante tensión entre la experiencia y el dominio de la disciplina a enseñar (Litwin, 2009, p. 32).

Esta tensión se ve reflejada en la cada vez más evidente distinción entre *la matemática para enseñar y la matemática a enseñar* (Ball, Hill, and Bass (2005, pp.45-46), M. Bosch & Gascón (2009, p. 95), C. Bosch et al. (2010, pp. 41-43), Artigue (2012, pp. 25-28)).

En este trabajo presentamos una instancia de reflexión sobre dicha tensión surgida a partir de acciones de intervención tanto en la formación inicial de profesores en Matemática que se ofrece en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (U.N.P.S.J.B.), como así también en acciones de formación continua para docentes en ejercicio de instituciones de la región de influencia de la U.N.P.S.J.B. En ellas se ha trabajado sobre saberes matemáticos elementales adquiridos en el ámbito escolar con el objeto de explicitar las relaciones entre éstos y los que se van construyendo durante la formación docente y así promover la expansión del *paquete de conocimientos* (Ma, 2010, pag. 97) o *equipamiento praxeológico* (M. Bosch & Gascón, 2009, p. 93) que los docentes van construyendo a lo largo de su vida profesional.

El concepto de fracción, a lo largo de las diversas intervenciones que hemos desarrollado con docentes en formación y/o en ejercicio, surge sistemáticamente como una actividad práctico-técnica, rígida y aislada (Chevallard, 1999); esto es, las fracciones forman un paquete de saberes desconexo que sólo consiste en fórmulas y algoritmos sin sentido: esto se pone de manifiesto cuando se les pregunta *¿por qué se multiplica cruzado en la división de fracciones?* y los estudiantes no pueden elaborar argumentos matemáticamente precisos. El motor de este trabajo entonces, ha sido el análisis de la *práctica matemática* (D'Amore & J. Godino, 2007, p. 208) alrededor del concepto de fracción teniendo en cuenta las formas comunicacionales, verbales o escritas, que se utilizan durante la resolución de problema haciendo una comparación con los problemas que a lo largo del desarrollo histórico de la matemática dieron lugar al concepto de fracción. Esto es, hemos recreado *la cultura matemática* alrededor de la creación de un objeto matemático, compuesta por el conjunto de valores y comportamientos que conduce a los matemáticos a experimentar la evolución de la matemática como ciencia social por excelencia, omnipresente en el mundo actual, dinámica y activa guiada por la necesidad de resolver problemas de interés comunitario (Burton, 2009, p. 159). Ésto debe formar parte de los saberes profesionales que el docente tiene a su disposición para poder generar las condiciones necesarias para poder recrear la práctica matemática en el aula (Ball et al., 2005, p. 45).

Desarrollo de las actividades

Las fracciones son introducidas generalmente a partir de la noción de *parte/todo*; esto es, el concepto de fracción surge como necesidad de subdividir en partes iguales a la unidad de medida (Courant & Robbins, 1996, pp. 52-53). Sin embargo, la evidencia de la matemática egipcia muestra que los problemas relacionados con el concepto de fracción surgieron a partir del problema de reparticiones equitativas (Boyer & Merzbach, 2011, p. 11): en términos modernos las fracciones resultan ser el *cociente exacto* entre dos números enteros. Esta dualidad que existe en la definición de los números racionales generada por las diferencias en los problemas que les dieron lugar, pone en evidencia aspectos fundamentales de la actividad matemática que muy a menudo están ausentes tanto en la enseñanza de la matemática como así también en la formación docente (Saiz, Gorostegui, & Vilotta, 2011, p. 127). Y es esta dualidad la que hemos explotado para desarrollar este dispositivo de desarrollo profesional.

Para dividir hay que sumar

La fracción *a/b*, según la interpretación egipcia, representa el problema de dividir equitativamente *a* panes entre *b* comensales sin que sobre nada. Por ejemplo, la fracción *2/4* representa lo que recibe cada uno de cuatro comensales al dividir equitativamente dos panes, como lo muestra el panel izquierdo de la Figura 1. De manera análoga, el panel derecho de la Figura 1 muestra la descomposición de *2/3* como lo que le corresponde a cada uno de los tres comensales cuando se desea repartir dos panes de manera equitativa. En símbolos

$$2/4 = 1/2 \quad y \quad 2/3 = 1/2 + 1/6$$

El problema de reparticiones equitativas, según los egipcios, se reduce entonces a expresar cada fracción como suma de fracciones de numerador 1 (Boyer & Merzbach, 2011, p. 11).

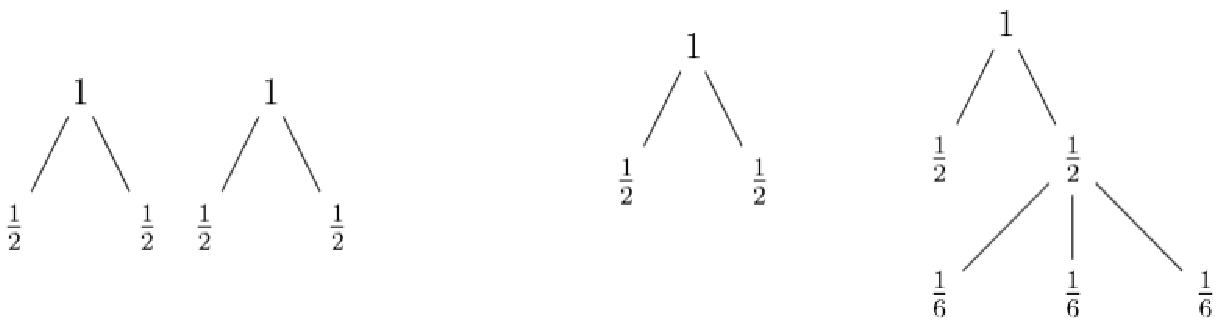

Figura 1. Panel izquierdo: la fracción *2/4* resulta *equivalente a 1/2* pues es lo que recibe cada uno de los cuatro comensales al repartir equitativamente 2 panes. Panel derecho: la fracción *2/3= 1/2+1/6*.

Esta descomposición induce de manera natural una clasificación de las fracciones, o en términos matemáticos, una *relación de equivalencia* en el conjunto de las fracciones al cual denotamos por ***F/~*** como

a/b~c/d si y sólo si tienen una misma descomposición en fracciones de denominador 1 (1)

Esta relación determina *clases de equivalencias* que definen una partición en ***F***; esto es, la unión de dichas clases de equivalencia es disjunta y resulta ***F*** (Gentile, 1988): al conjunto de clases, llamado *conjunto cociente* lo denotamos por ***F/ ~***. Llamamos entonces *fracción equivalente* a cada una de las clases de equivalencias en ***F***. A modo de ejemplo

$$\overline{1/2} =\{1/2,\ 2/4,\ 3/6,\ 4/8,\ \ldots\} \quad \overline{2/3} =\{2/3,\ 4/6,\ 3/9,\ 4/12,\ \ldots\}$$

La notación $\overline{1/2}$ se refiere a la clase de equivalencia a la cual pertenece la fracción *1/2*. En particular, *1/2* pertence a *F* pero $\overline{1/2}$ pertencece ***F/~*** . Estas clases están formadas por todas las fracciones que se escriben distinto pero representan el mismo problema.

Las *fracciones irreducibles*, aquellas fracciones cuyo numerador y denominador no tienen factores en común, aparecen de manera ubicua en los textos escolares pero descontextualizadas: cuando hemos preguntado a los docentes o alumnos por qué las utilizan obtenemos la misma respuesta: *porque es más simple*, a lo cual replicamos *¿más simple para quién?*. Claramente la definición egipcia de fracciones no permite definir las fracciones irreducibles pues no son necesarias para resolver el problema. Si bien la matemática se ha desarrollado a partir de problemas concretos que ayudan a construir lo que Freudenthal denomina *el sentido común* (Freudenthal, 1973, p. 4), una de las características fundamentales de la actividad matemática es interpelar las premisas en las que se basa, lo que permite la generalización e identificación de estructuras subyacentes (Freudenthal, 1973, pp. 20-30). La relación

$$a/b=c/d \text{ si y sólo si } a \times d = b \times d \ (2)$$

resulta ser una relación de equivalencia en ***F*** (Klein, 1945, p. 29), de característica enteramente aritmética. Es fácil convencerse o demostrar que las relaciones (1) y (2) definen las mismas clases de equivalencia. De esta definición se puede deducir fácilmente la noción de fracción equivalente y más aún, se puede concluir que cada clase de equivalencia puede ser *representada* por una fracción irreducible.

Esta interpretación de la fracción como resultado de una división exacta entre números enteros ha sido utilizada por Streefland para analizar una secuencia de actividad aúlica alrededor de la enseñanza del concepto de fracción (Streefland, 1997, p. 350). Más aún, la división exacta entre números enteros permite establecer que $a/1= a$ para cualquier a en ***Z***, el conjunto de números enteros. Esta identificación de los números enteros como fracciones de denominador 1 se basa enteramente en el sentido común generado por el problema de repartos equitativos (Freudenthal, 1973) y es complementario a las identificaciones más algebraicas como la presentada por Centeno Pérez (1997, p. 64).

Con esta definición de fracción, tanto el numerador como denominador tienen significados diferentes a los que usualmente se les asignan cuando se considera a las fracciones a partir de la subdivisión de la unidad: el denominador indica en cuántas partes se divide el entero y el numerador indica cuántas de esas partes se toman (Dallura, 2008, p. 86).

A partir de esta definición de fracción equivalente se puede introducir el orden en F/~ , por ejemplo

$$2/3<3/4$$

pues existen representantes $8/12$ de $2/3$ y $9/12$ de 3/4 que satisfacen la misma desigualdad:

$$8/12 <9/12$$

permitiendo introducir otra clase de problemas relacionados. Por ejemplo:

> En el supermercado *A* tienen esta semana la promo *Lleve 4 pague 3* para gaseosas de 2,25 litros. Al mismo tiempo, el supermercado *B*, al enterarse de tamaño desafío, ofrecieron la promo *Lleve 3 pague 2* para las mismas gaseosas. Si tenés que comprar gaseosas para tu fiesta de cumpleaños, ¿dónde te conviene comprarlas? (Tener en cuenta que el precio de venta de las gaseosas está fijado por la compañía que las fabrica y no por los supermercados.)

Más aún, la noción de orden definida anteriormente permite establecer la densidad como propiedad distintiva de los números racionales respecto de los números enteros (Soto, Etcheverrito, Etcheverrito, & Mellado, 2013, p. 7).

Aritmética en *F/~*

La suma de números enteros surge a partir de *agrupar* magnitudes del mismo tipo: *tres manzanas más seis manzanas equivalen a nueve manzanas*. Esta idea permite definir la suma de fracciones de igual *denominación*: tres *cuartos* más cinco *cuartos* sean ocho *cuartos*. En símbolos,

$$3/4+5/4=8/4.$$

Elegimos éste nombre en lugar de fracciones de igual denominador ya que estamos utilizando el carácter fonético del problema como una de las características fundamentales de la construcción de la matemática pues cualquier resultado debe ser validado socialmente y para ello hay que comunicarlo; esto es, el lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias (J.D. Godino, Batanero, & Font, 2007, p. 130).
Ahora bien, ¿cómo se resuelve $3/4+5/7$? Para dar sentido a esta operación entre fracciones que tienen diferente denominación tenemos necesariamente que volver al concepto de fracción equivalente para poder transformar este problema en otro que sabemos resolver, activando herramientas o dispositivos inherentes a la actividad matemática:

$$3/4+5/7=21/28+20/28=41/28 \quad (3)$$

La suma de fracciones se reduce entonces a la elección apropiada de fracciones equivalentes. Esta libre elección de fracciones de igual denominador se basa en el hecho que la suma en ***F*** define una suma en el cociente ***F/~*** ; esto es la suma *pasa al conjunto cociente* a través de un homomorfismo de grupo (Hungerford, 1974). Este paso al cociente también está implícito en los criterios de divisibilidad por 3 y 9.
El uso de fracciones equivalentes y la posibilidad de utilizar el representante más conveniente respecto al problema que se está resolviendo, también forma parte de actividad matemática y es de gran utilidad al momento de hacer aritmética con las fracciones. Más aún, la noción de fracción equivalente es importante para la construcción el significado algebraico del signo = (Sessa, 2005, cap. 2), del cual no nos ocuparemos en este trabajo**.** A partir de esta libre elección de representantes de una misma clase de equivalencia podemos definir la suma de fracciones con el mismo significado que la suma de números enteros; en particular el sentido común sigue siendo válido. Resulta importante observar que (3) se puede escribir

$$3/4+5/7= 21\ 1/28+20\ 1/28 = 41\ 1/28$$

y ahora la suma de fracciones de igual denominación no sólo suena igual sino que también se *ve* igual a la suma de magnitudes enteras de igual tipo introduciendo otra forma de comunicación de resultados para la validación de la solución del problema: la comunicación escrita.
Podemos definir, *pensando en voz alta nuevamente*, la división de fracciones como una división

entera siempre y cuando tengan la misma denominación:

$$5/3 \div 5/6 = 10/6 \div 5/6 = 10/5 = 2 \quad (4)$$

el significado de esta operación es el de preguntarse cuántos grupos de *cinco sextos* se pueden formar con *diez sextos*. Esto es, la división de fracciones de igual denominación tiene la misma interpretación que la división exacta de números enteros. Una de las consecuencias de trabajar con fracciones equivalentes para resolver divisiones entre fracciones es que surge naturalmente la regla de *multiplicar cruzado* como se muestra en el ejemplo siguiente.

$$3/5 \div 1/2 = 6/10 \div 5/10 = 6/5, \text{ pero } 6/5 = (3\times2)/(5\times1) \quad (5)$$

Es importante observar que, cuando analizamos el resultado de división, éste entra en conflicto con él: *la división siempre achica* y observamos que en la división (4) ¡el resultado es más grande! Esta aparente contradicción con el sentido común alrededor del concepto de la división surge como un *obstáculo epistemológico* (Brousseau, 2002, pp. 79-84), herramienta que ofrece la matemática para permitir la objetivación de las fracciones y sus operaciones aritméticas que permite, a posteriori, comprender las estructuras matemáticas subyacentes, que en este caso son algebraicas.

Hasta el momento hemos definido las operaciones de suma y división de fracciones haciendo uso de la analogía con las respectivas operaciones en el conjunto de las números enteros. Lo que resta discutir es cómo definir la multiplicación de fracciones, teniendo definidas las operaciones presentadas anteriormente. Por ejemplo ¿cómo se resuelve o qué significa $2/3\times1/4$?

Si utilizamos el mismo método que antes; esto es fracciones equivalentes, obtenemos

$$2/3\times1/4 = 8/12\times3/12. \quad (6)$$

Cuando leemos en voz alta (6) lo primero que surge es preguntarnos qué significa multiplicar dos magnitudes del mismo tipo; esto es, dos números con la misma denominación. En este punto no tenemos un significado similar en la multiplicación de números enteros, por tanto necesariamente tenemos que buscar una interpretación alternativa de la multiplicación de números enteros: el modelo de sumas repetidas para representar la multiplicación de números enteros pierde todo sentido aquí. Recurriendo nuevamente al carácter fonético del este problema nos preguntamos ¿a qué suena la multiplicación *ocho doceavos por tres doceavos*? El modelo rectangular para la multiplicación aparece como adecuado pues multiplicar dos números con la misma denominación tienen sentido si pensamos en el cálculo del área de un rectángulo (Centeno Pérez, 1997, pp. 199-201). Por tanto, *ocho doceavos por 3 doceavos*, suena igual que *ocho cm por 3 cm* que resulta igual a *24* cm^2, por tanto *ocho doceavos por 3 doceavos debe ser igual a 24 doceavos al cuadrado*. En símbolos

$$2/3\times1/4 = 8/12\times3/12 = 24/12^2 = 24/144.$$

El sentido de la multiplicación como cálculo del área de un rectángulo presupone las nociones de perímetro y área, que aparecieron al mismo tiempo que las fracciones en la línea histórica de la matemática. También podemos prescindir de esta representación y proponer la multiplicación como un problema enteramente aritmético basándonos en la noción de división exacta. Esto es, la multiplicación (6) resultará en un número x tal que al dividirlo por alguno de los factores obtenemos el restante. En símbolos

$$2/3\times 1/4=x \text{ de modo que } x\div 2/3=1/4 \quad (7)$$

Primero ¿qué clase de número debe ser x? Esta pregunta está directamente relacionada con la definición de operación en una estructura algebraica (Hungerford, 1974). Dado que la división de fracciones, como fue definida anteriormente es cerrada en $\boldsymbol{F}$; esto es, si dividimos dos fracciones el resultado es una fracción, es natural suponer que x también sea una fracción. Así

$$2/3\times 1/4=a/b$$

y en vista de la regla de multiplicar cruzado para la división de fracciones (5)

$$a\times 3=1 \text{ y } b\times 2=4 \quad (8)$$

Sin embargo, la ecuación para a no tiene solución en $\boldsymbol{Z}$. Nuevamente aparece una situación que desafía el sentido común en las prácticas aúlicas: ¡en matemática hay problemas que no tienen solución! dado que las fracciones son en realidad representantes de una clase de equivalencia, podemos cambiar el representante de la clase que contiene a $1/4$ para que ambas ecuaciones (8) tengan solución en $\boldsymbol{Z}$; esto siempre se puede hacer debido a la existencia de los múltiplos comunes en $\boldsymbol{Z}$ (Gentile, 1988). Por ejemplo si en lugar de $1/4$ tomamos por ejemplo $3/12$ entonces la solución de (8) es $a = 1$ y $b = 6$ de donde $x = 1/6$. Para poder obtener la regla de *multiplicar derecho* es necesario elegir el representante correcto. En nuestro caso $2/12=1/6$ y si volvemos a (6) tenemos que

$$2/3\times 1/4=2/12=(2\times 1)/(3\times 4)$$

Es importante notar que la regla de *multiplicar derecho* no siempre surge de manera natural a partir de los problemas analizados anteriormente, a diferencia de la multiplicación cruzada para la división de fracciones lo que explica en parte que el producto de fracciones generalmente se introduzca en un contexto aritmético.

Como última observación es importante aclarar que la elección de $\boldsymbol{F}$ para denotar el conjunto de fracciones en lugar de la notación usual $\boldsymbol{Q}$ pues el objetivo de este trabajo ha sido el de resaltar la definición de la multiplicación de fracciones. Hay que otar que F forma un grupo conmutativo respecto a la multiplicación. Con respecto a la suma, $\boldsymbol{F}$ es tan sólo un semigrupo conmutativo pues no hemos definido las fracciones negativas (Saiz et al., 2011, pp.127-128) pues el excede al alcance del objetivo de este trabajo.

Discusión

La tarea docente se caracteriza por la constante toma de decisiones acerca de qué enseñar, cómo hacerlo y para qué, y como tal es un proceso estocástico desde el punto de vista del docente pues no es posible controlar a priori *todos* los tipos de dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje. Es necesario entonces, considerar la toma de decisiones como parte del equipamiento praxeológico del docente y por tanto generar dispositivos que permitan solidificar este proceso en los programas de formación docente, incial y continua.

En este trabajo hemos presentado un análisis del concepto de fracciones y su aritmética en función del momento histórico en que aparecieron y las estructuras matemáticas subyacentes (Hungerford, 1974), proponiendo de esta manera un marco de discusión para el diseño de posibles dispositivos de formación que permite la construcción de habilidades relacionadas con la toma de decisiones y así fortalecer los saberes profesionales docentes. El concepto de fracción y su aritmética, como saber escolar elemental generalmente consiste de fórmulas y algoritmos sin sentido; para reconectarlos y resignificarlos nos hemos concentrado en explicitar las relaciones entre estos saberes elementales (la matemática a enseñar) y las estructuras subyacentes (la matemática para enseñar) y que consideramos fundamentales como dispositivos de construcción de saberes profesionales. Una de las características de este análisis es la validación social de los problemas o situaciones que dieron origen a las fracciones y en particular el uso del lenguaje hablado como disparador de nuevas ideas sobre las cuales se construyen nuevos saberes matemáticos (Keitel & Kilpatrick, 2005, p. 114).

Este trabajo es parte de un programa más amplio que hemos inaugurado hace un tiempo atrás, en el cual a partir de saberes escolares adquiridos por parte de los futuros docentes se explicitan conexiones con los saberes matemáticos que se construyen durante la formación inicial (e.g. Soto, 2011, 2012, 2013); esto es, no hemos buscado la innovación o novedad en las propuestas de enseñanza sino la reflexión y búsqueda de relaciones entre el conjunto de creencias de tipo disciplinar, emocional y metodológico que ponen en juego la tensión entre la matemática a enseñar y la matemática para enseñar. Estos dispositivos permiten estudiar además el alcance de la formación matemática disciplinar de un profesor pues su práctica profesional es diferente a la del matemático y por tanto es necesario seguir reflexionando sobre la matemática para enseñar como fundacional para el desarrollo de buenas prácticas docentes que sean dinámicas con tasas de evolución comparables con las de los cambios que la sociedad experimenta diariamente.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial para Mónica González, Llanet Da Luz Pereira y a María de Gracia Mendonça cuyas observaciones y críticas contribuyen a mejorar mi trabajo como matemático y como formador de formadores.

Subsidios

Las actividades que se presentan a continuación fueron desarrolladas en el marco del proyecto de investigación *Aplicación de la teoría de redes al desarrollo de dispositivos de formación para docentes en matemática* (Res 8217/2014), financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la

Universidad Nacional de la Patagonia san Juan Bosco.

Referencias y Bibliografía

Artigue, M. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. UNESCO.

Ball, D. L., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator.*

Bishop, A. (1976). Decision-making, the intervening variable. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 41–47.

Bosch, C., Álvarez Díaz, L., Correa, R., Druck, S., & McEachin, R. (2010). *Mathematics education in latin america and the caribbean: a reality to be transformed*. ICSU-LAC.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. González, M. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII*. Santander: SEIEM.

Boyer, C. & Merzbach, U. (2011). *A history of mathematics* (Thrid Edition). John Wiley & Sons, Inc.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Burton, L. (2009). The culture of mathematics and the mathematical culture. En O. Skovsmose, P. Balero, & O. Christensen (Eds.), *University science and mathematics education in transtition*. Springer.

Centeno Pérez, J. (1997). *Números decimales. ¿por qué?, ¿para qué?* Editorial Síntesis.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221–266.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?* Oxford University Press.

CUCEN. (2011). Anteproyecto estándares para la acreditación de la carrera de profesorado universitario en matemática. Retrieved from http://www.cucen.org.ar/profesorados/ matematica/verProfMatematica.action

Dallura, L. (2008). *La matemática y su didáctica en el primero y segundo ciclo de la E.G.B. Un* *enfoque constructivista.* Aique.

D'Amore, B. & Godino, J. [J.]. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didaáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*, 191–218.

Elliot, J. (1991). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Morata.

Ernest, P. (2010) In B. Sriraman & L. English (Eds.), Reflexions on theories of learning. En *Theories of mathematics education. Advances in mathematics education,* pp. 39– 47 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht.

Gentile, E. (1988). *Álgreba*. Eudeba.

Godino, J. [J.]. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como una disciplina científica*. Disponible en www.ugr.es/jgodino/.

Godino, J. [J.D.], Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127–135.

Hungerford, T. (1974). *Algebra*. Springer.

INFOD. (2007). Lineamientos curriculares nacionales para la formación docente inicial. Retrieved from http://repositorio.educacion.gov.ar:8080/dspace/bitstream/handle/123456789/53990/12924.pdf?sequence=1

Keitel, C. & Kilpatrick, J. (2005). Mathematics education and common sense. En *Meaning in mathematics education ,* Vol. 37. Mathematics Education Library. Springer.

Klein, F. (1945). *Elementary mathematics from an advanced point of view. arithmetic, algebra and analysis*. Dover.

Litwin, E. (2009). *El oficio de enseñar. condiciones y contextos.* Paidos.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics. teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the united states*. Taylor & Francis.

Saiz, I., Gorostegui, E., & Vilotta, D. (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales.

Educación Matemática, *23*, 123–151.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del Zorzal.

Soto, G. (2011). El teorema de bayes. *Revista de Educación Matemática*, *26* (3).

Soto, G. (2012). Secciones cónicas: ¿y esto... ¿qué me sirve? En J. Adrover & G. García (Eds.), *Trabajos de matemática - Serie B*.

Soto, G. (2013). *(Des)-haciendo matemática: desde Pitágoras y Thales a descartes*. Editorial Patagónica Universitaria.

Soto, G., Etcheverrito, M., Etcheverrito, M., & Mellado, M. (2013). El laboratorio de geometría: un lugar para recuperar la motivación por aprender. En U. M. Argentina (Ed.), *XXXVI reunión de educación matemática*. Universidad Nacional de Rosario.

Streefland, L. (1997). Charming fractions of fractions being charmed? En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics. an international perspective* (Cap. 14, pp. 347–372). Phycology Press.